# Девять лекций по кварковой структуре адронов

Б.В.Мартемьянов

*Институт Теоретической и Экспериментальной Физики*

*117259, Б.Черемушкинская 25, Москва, Россия*

5 апреля 2001 г.

**Аннотация**

Настоящие лекции посвящены кварковой структуре адронов, построенных из легких кварков. При описании кварковой структуры использовались, единственно, симметрии сильного взаимодействия.

Модели частиц (каких много) не рассматривались. Не рассматривалась также структура адронов, в состав которых входят тяжелые кварки. Первый круг вопросов (модели частиц) не излагается ввиду его обширности. Второй круг вопросов ( тяжелые кварки) не излагается ввиду того, что обсуждение физики тяжелых кварков тяготеет, в основном, к электрослабым взаимодействиям и рассматривается в курсе электрослабых взаимодействий.

Поэтому представленный здесь материал, являясь некоторой законченной частью теории элементарных частиц, излагается отдельно.

Настоящие лекции формировались с 1989 года, составляя часть курса по теории элементарных частиц для студентов МФТИ. Основным источником этих лекций была неопубликованная рукопись Л.Б.Окуня "Адроны и кварки". Другим источником были "Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц" Нгуен Ван Хьеу (Атомиздат, Москва 1967).

Список используемой литературы, ввиду ее малочисленности, отсутствует.

# 1 Лекция 1. Частицы и взаимодействия

## 1.1 Классы частиц и типы взаимодействий

В настоящее время существует твердое убеждение, что все в природе построено из элементарных частиц, а все природные процессы обусловлены взаимодействием этих частиц. Под элементарными частицами сегодня понимают кварки, лептоны, калибровочные бозоны и хиггсовские скалярные частицы. Под фундаментальными взаимодействиями- сильное, электро-слабое и гравитационное. Таким образом, условно можно выделить четыре класса элементарных частиц и три типа фундаментальных взаимодействий.

**Первый класс** содержит на сегодня фотон ($\gamma$), $W^+, W^-, Z$- бозоны, восемь глюонов ($g^a, a = 1, ..., 8$) и предполагает существование гравитона. Все эти частицы являются переносчиками взаимодействий. За излучение $\gamma, W^+, W^-, Z$- бозонов ответственно электро-слабое взаимодействие, глюоны переносят сильное взаимодействие, гравитоны- это предполагаемые кванты гравитационного поля.

**Второй класс** содержит лептоны. Их в настоящее время шесть: электрон ($e$), мюон ($\mu$), тау-лептон ($\tau$) и соответствующие нейтрино ($\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$). Удобно представить шесть лептонов в виде трех семейств

$$\begin{pmatrix} \nu_e(< 5.1eV) \\ e(0.511MeV) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu(< 0.27MeV) \\ \mu(105.6MeV) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau(< 31MeV) \\ \tau(1777MeV) \end{pmatrix}$$

Нейтрино электрически нейтральны; электрон, мюон и тау-лептон обладают электрическими зарядами. Лептоны участвуют в электро- слабом и гравитационном взаимодействии.

**Третий класс**- это кварки. Сегодня известно шесть кварков- $u, d, s, c, b, t$, каждый из которых может быть "окрашен" в один из трех цветов. Как и лептоны их удобно расположить в виде трех семейств

$$\begin{pmatrix} u(2 - 8MeV) \\ d(5 - 15MeV) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(1 - 1.6GeV) \\ s(100 - 300MeV) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(175GeV) \\ b(4.1 - 4.5GeV) \end{pmatrix}$$

Кварки в свободном виде не наблюдаются. Вместе с глюонами они являются составляющими адронов, которых несколько сотен. Адроны, как и составляющие их кварки, участвуют во всех типах взаимодействий.

**Четвертый класс**- хиггсовские частицы, экспериментально пока необнаруженные. В минимальной схеме достаточно одного хиггсовского скаляра. Их роль в природе на сегодня-в основном "теоретическая" и состоит в том, чтобы сделать электро-слабое взаимодействие перенормируемым. В частности, массы всех элементарных частиц- это "дело рук" хиггсовского конденсата. Возможно, введение хиггсовских полей необходимо для разрешения фундаментальных проблем космологии, таких как однородность и причинная связность Вселенной.

Последующие лекции по теории кварковой структуры адронов посвящены адронам и кваркам. Основное внимание будет уделяться классификации частиц, симметриям и законам сохранения.

## 1.2 Частицы и античастицы Фермионы и бозоны

У всех частиц имеются партнеры-античастицы, обладающие теми же значениями массы, спина, времени жизни, но имеющие противоположный знак электрического заряда, других зарядов, например, лептонного, барионного, гиперзаряда, странности и т.д.. Античастицей электрона $e^-$ является позитрон $e^+$, протона $p$- антипротон $\bar{p}$, нейтрона $n$- антинейтрон $\bar{n}$ и т.д. Если у частицы нет никаких зарядов, ее античастица совпадает с ней самой и частица называется истинно нейтральной. Примерами истинно нейтральной частицы являются $\gamma-$квант, $Z^0$-бозон, $\pi^0$-мезон и т.д. Окружающая нас часть Вселенной, а,возможно, и вся Вселенная зарядово асимметрична: она состоит из $e^-, n, p$ и почти не содержит $e^+, \bar{p}, \bar{n}$. Причины такой асимметрии объясняются в теориях Великого объединения взаимодействий элементарных частиц.

Все частицы имеют либо целый, либо полуцелый спин. Частицы с полуцелым спином называются фермионами и подчиняются статистике Ферми, согласно которой данное состояние может занимать не более,чем один фермион. Волновая функция системы фермионов антисимметрична относительно перестановок переменных фермионов. Частицы с целым спином называются бозонами и подчиняются статистике Бозе, согласно которой данное состояние может занимать произвольное количество бозонов. Волновая функция системы бозонов симметрична относительно перестановок переменных бозонов. В дальнейшем мы неоднократно столкнемся с проявлениями принципов Ферми и Бозе в физике адронов.

## 1.3 Краткая характеристика взаимодействий

Сильное взаимодействие проявляет себя на двух уровнях: во-первых, это взаимодействие кварков в адронах. Оно описывается обменом глюонами на малых расстояниях и механизмом конфайнмента-на больших. Во-вторых, это взаимодействие между адронами, например, между протонами и нейтронами в ядрах. Предполагается, что второе является следствием первого, хотя конкретная реализация взаимодействия между адронами на кварковом уровне неясна. Адроны делятся на барионы (нечетное число кварков,фермионы) и мезоны (четное число кварков, бозоны), на частицы (стабильные по сильным взаимодействиям) и резонансы (распадающиеся сильным образом). Деление на частицы и резонансы становится все более условным с открытием адронов, в состав которых входят тяжелые кварки.

Электро-слабое взаимодействие осуществляется обменом $\gamma, W, Z$-частиц. Оно распадается на электромагнитное и слабое при энергиях меньших,чем массы $W$ и $Z$ - бозонов. Безмассовый фотон обеспечивает дальнодействие, а массивные $W$ и $Z$ дают контактное четырехфермионное взаимодействие с размерной константой Ферми.

Гравитационное взаимодействие элементарных частиц пренебрежимо мало до энергий порядка $10^{19} GeV$, где это взаимодействие могло бы объединиться с другими взаимодействиями.

## 1.4 Система единиц

В физике элементарных частиц встречаются, как правило, скорости порядка скорости света $c$, действия и угловые моменты порядка постоянной Планка $\hbar$. Поэтому естественно работать в такой системе единиц, где $\hbar = c = 1$. При этом угловой момент, действие и скорость-безразмерны:$[J] = [s] = [v] = 1$. Энергия и импульс имеют размерность массы $[E] = [p] = [m]$, а время и длина имеют размерность обратной массы $[l] = [t] = [m^{-1}]$. В качестве единицы энергии удобно принять $1 GeV$.

## 1.5 Задача 1

а) выразить $1 fm = 10^{-13} cm$ через $1 GeV^{-1}$

б) оценить гравитационную постоянную и найти ее значение в системе

$\hbar = c = 1.$

# 2 Лекция 2. Основные состояния легких адронов

## 2.1 Арифметика зарядов

На прошлой лекции мы говорили о кварках. Существует шесть кварков

$$\begin{pmatrix} u(5MeV) \\ d(7MeV) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(1.5GeV) \\ s(150MeV) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(175GeV) \\ b(4.5GeV) \end{pmatrix}$$

Если сравнить массы кварков с характерным адронным масштабом $1GeV$, то будет уместно разделить их на легкие ($m_q << 1GeV$) и тяжелые ($m_q > 1GeV$). Ниже мы будем, в основном, обсуждать свойства адронов, состоящих из легких кварков.

В сильных и электромагнитных взаимодействиях отдельно сохраняется число $u$-кварков, $d$-кварков и $s$-кварков. Поэтому можно ввести заряды $U, D, S$, сохраняющиеся в этих взаимодействиях. Тогда

| $\frac{charge}{quark}$ | $U$ | $D$ | $S$ |
|---|---|---|---|
| $u$ | 1 | 0 | 0 |
| $d$ | 0 | 1 | 0 |
| $s$ | 0 | 0 | 1 |

Вместо зарядов $U, D, S$ удобно ввести другие, являющиеся их линейными комбинациями

$$B = \frac{U + D + S}{3}$$

(барионный заряд),

$$T_3 = \frac{U - D}{2}$$

(3-я компонента изотопического спина),

$$Y = \frac{U + D - 2S}{3}$$

(гиперзаряд).

Тогда

| $\frac{charge}{quark}$ | $B$ | $T_3$ | $Y$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| $u$ | 1/3 | 1/2 | 1/3 | 2/3 |
| $d$ | 1/3 | -1/2 | 1/3 | -1/3 |
| $s$ | 1/3 | 0 | -1/3 | -1/3 |

Барионный заряд выбран таким образом, чтобы протон (или любой другой барион), состоящий из трех кварков имел барионный заряд равный единице. Барионный заряд сохраняется во всех взаимодействиях. 3-я компонента изотопического спина выбрана таким образом, чтобы $u$ и $d$ кварки образововали изотопический дублет ($T = 1/2$), а странный кварк $s$ был изосинглетом. Наконец, гиперзаряд выбран таким образом, чтобы выполнялось соотношение Гелл-Манна- Нишиджимы

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

В сильных и электромагнитных взаимодействиях $T_3$ и $Y$ сохраняются. В слабых взаимодействиях, где возможны переходы $d \to u(\Delta T_3 = 1, \Delta Y = 0)$ и $s \to u(\Delta T_3 = 1/2, \Delta Y = 1)$ $T_3$ и $Y$ не сохраняются, но нарушаются вполне определенным образом.

Сильные взаимодействия обусловлены только цветовыми зарядами кварков, которые одинаковы для $u, d, s$ кварков, поэтому их сильные взаимодействия одинаковы. Если бы и массы кварков были равны $m_u = m_d = m_s$, то $u, d, s$ кварки были бы просто неразличимы с точки зрения сильных взаимодействий, т.е. можно было бы "безболезненно" заменять $u$ на $d$ или на $s$ в адронах и ни массы, ни сильные взаимодействия этих адронов не менялись бы. В действительности, $m_u \neq m_d \neq m_s$, но их неравенство выглядит малым по сравнению с характерным адронным масштабом, особенно малым для $u$ и $d$ кварков. Поэтому можно говорить о почти строгой $SU(2)$ симметрии (изотопический спин)

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to U(2) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

и приближенной $SU(3)$ симметрии

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to U(3) \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

С симметриями связаны сохраняющиеся величины, генераторы этих симметрий. В случае $SU(2)$ симметрии - это изотопический спин $\mathbf{T}$. Заметим, что $T_3$ - это диагональный генератор группы $SU(2)$, а $T_3$ и $Y$ - диагональные генераторы группы $SU(3)$. Состояния частиц (адронов) классифицируются по неприводимым представлениям этих групп, в частности в случае группы $SU(2)$ по $\mathbf{T}^2 = T(T+1)$, где $T = T_{3max}$ в мультиплете.

Проведем классификацию основных состояний мезонов и барионов по $T_3$ и $Y$.

## 2.2 Мезоны

Основные состояния мезонов- это 9 $q\bar{q}$ состояний со спином 0 или 1. Их представляют:
изотопический триплет $\pi(140)(\rho(770))$ - мезонов

$$T = 1; T_3 = +1, 0, -1; Y = 0$$

$$\begin{pmatrix} u\bar{d} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ d\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^- \end{pmatrix};$$

изотопические дублеты $K(490)(K^*(890))$ - мезонов

$$T = 1/2; T_3 = +1/2, -1/2; Y = +1, -1$$

$$\begin{pmatrix} u\bar{s} \\ d\bar{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^{+*} \\ K^{0*} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} s\bar{d} \\ s\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{K}^{0*} \\ K^{-*} \end{pmatrix};$$

изотопические синглеты $\eta, \eta'$ $(T = 0, T_3 = 0, Y = 0)$

$$\frac{1}{\sqrt(6)}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) = \eta(550)$$

$$\frac{1}{\sqrt(3)}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) = \eta'(960)$$

для скалярных частиц и изотопические синглеты $\omega, \phi$ ($T = 0, T_3 = 0, Y = 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{(2)}}(u\bar{u} + d\bar{d}) = \omega(780)$$

$$s\bar{s} = \phi(1020)$$

для векторных частиц .

## 2.3 Барионы

Из 27=3*3*3 состояний $qqq$ со спином 1/2 и 3/2 статистика Ферми допускает только октет барионов со спином 1/2 ((8,1/2)) и декуплет барионов со спином 3/2 ((10,3/2)). В октет входят: изотопический триплет $\Sigma(1190)$ - гиперонов

$$T = 1; T_3 = +1, 0, -1; Y = 0$$

$$\begin{pmatrix} uus \\ uds \\ dds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix};$$

изотопические дублеты нуклонов ($N(939)$) и $\Xi(1320)$ - гиперонов:

$$T = 1/2; T_3 = +1/2, -1/2; Y = +1, -1$$

$$\begin{pmatrix} uud \\ ddu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} ssu \\ ssd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix};$$

изотопический синглет ($T_3 = 0, Y = 0$)- $\Lambda(1116)$ -гиперон, состоящий из $uds$-кварков.

В декуплет барионов со спином 3/2 входят: квартет $\Delta(1232)$ - изобар

$$T = 3/2; T_3 = +3/3, +1/2, -1/2, -3/2; Y = 1$$

$$\begin{pmatrix} uuu \\ uud \\ ddu \\ ddd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^{++} \\ \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \end{pmatrix};$$

изотопический триплет $\Sigma^*(1385)$ - гиперонов

$$T = 1; T_3 = +1, 0, -1; Y = 0$$

$$\begin{pmatrix} uus \\ uds \\ dds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^{*+} \\ \Sigma^{*0} \\ \Sigma^{*-} \end{pmatrix};$$

изотопический дублет ($\Xi^*(1530)$) - гиперонов

$$T = 1/2; T_3 = +1/2, -1/2; Y = -1$$

$$\begin{pmatrix} ssu \\ ssd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi^{*0} \\ \Xi^{*-} \end{pmatrix}$$

и изотопический синглет ($T_3 = 0, Y = -2$)- $\Omega^-(1672)$ -гиперон, состоящий из $sss$-кварков.

## 2.4 Распады

Самый легкий из всех адронов - $\pi^0$-мезон- распадается электромагнитным образом на два $\gamma$-кванта

$$\pi^0 \to 2\gamma$$

и живет порядка $10^{-16}$ секунд.
Его заряженные партнеры $\pi^\pm$ распадаются слабым образом

$$\pi^\pm \to \mu^\pm \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$$

и живут порядка $10^{-8}$ секунд.
$K$ - мезоны распадаются слабо на $2\pi, 3\pi, ...$ и имеют времена жизни от $10^{-8}$ до $10^{-10}$ секунд.
$\eta$- мезон распадается на $3\pi, 2\gamma, ...$ с несохранением изотопического спина. Его распад на $2\pi$ мезона запрещен по $CP$ - симметрии (см. ниже лекцию 3).
Мезон $\eta'$ распадается на $\eta\pi\pi$ благодаря сильным взаимодействиям.

Протон стабилен. На сегодня его время жизни больше $10^{32}$ лет. Нейтрон за 887 секунд распадается на протон, электрон и электронное антинейтрино. $\Lambda, \Sigma^\pm, \Xi^0, \Xi^-, \Omega^-$ гипероны распадаются слабо, $\Sigma^0$ распадается электромагнитным образом на $\Lambda\gamma$, а $\Delta, \Sigma^*$ и $\Xi^*$ частицы являются резонансами, т.е. распадаются благодаря сильным взаимодействиям.

## 2.5 Задача 2

а) Почему не наблюдается распад $\Xi \to \Sigma\pi$?
б) Как должна выглядеть формула для гиперзаряда $Y$ в соотношении $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, чтобы она была справедлива для всех адронов, включая адроны с тяжелыми $(c, b, t)$ кварками.

# 3 Лекция 3. Дискретные симметрии

В настоящей лекции мы обратимся к дискретным симметриям- пространственному отражению, зарядовому сопряжению и $G$- преобразованию, которые помогут понять особенности распадов частиц $\eta, \eta', \rho, \omega, \phi$.

## 3.1 Пространственное отражение

Преобразование пространственного отражения сводится к изменению системы координат $t, x, y, z$ на $t, -x, -y, -z$. При таком изменении системы координат разные объекты преобразуются по-разному. Так координаты полярных векторов $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ меняют знак, координаты аксиальных векторов $(\mathbf{l}, l_i = \epsilon_{ijk} r_i p_k)$ знака не меняют. Скалярное произведение двух полярных векторов образует скаляр , не меняющийся при пространственном отражении, а скалярное произведение полярного и аксиального вектора образует псевдоскаляр, меняющий знак при пространственном отражении. Пространственной четностью $(P)$ какой-либо величины называется ее свойство менять или не менять знак при инверсии пространственных координат. Скаляр и аксиальный вектор $P$-четны, а псевдоскаляр и вектор $P$-нечетны.

Сегодня мы знаем, что лагранжиан сильного и электромагнитного взаимодействий не меняется при пространственном отражении, т.е. является скаляром, а лагранжиан слабого взаимодействия является суммой скаляра и псевдоскаляра. Инвариантность относительно пространственного отражения на квантово-механическом языке означает, что амплитуда процесса и зеркально-симметричного процесса совпадают

$$< b^P|V|a^P >=< b|P^{-1}VP|a >=< b|V|a > .$$

Если начальное и конечное состояния имеют определенную $P$-четность,

$$P|a >= p_a|a >$$

$$P|b >= p_b|b >,$$

то $p_a \cdot p_b = 1$ или $p_a = p_b$ , т.е. $P$- четность сохраняется.

**Четности частиц**

Сильные и электромагнитные взаимодействия, в которых сохраняется $P$-четность, сохраняют также $U, D, S$-заряды, т.е. число $u, d, s$-кварков. Поэтому четности $p_u, p_d, p_s$ можно считать произвольными. Тогда $p$-четности

всех других состояний будут выражаться через них. Принято считать, что $p_u = p_d = p_s = 1$. Одной из теорем теории фермионов, основанной на уравнении Дирака, является утверждение, что внутренние четности фермиона и антифермиона противоположны, т.е. $p_{\bar{u}} = p_{\bar{d}} = p_{\bar{s}} = -1$ (или $p_u p_{\bar{u}} = p_d p_{\bar{d}} = p_s p_{\bar{s}} = -1$).
Внутренняя четность состояния двух частиц (например, мезона, построенного из кварка и антикварка) равна произведению внутренних четностей составляющих и относительной орбитальной четности

$$\Psi(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{\bar{q}}) \overset{P}{\to} p_q p_{\bar{q}} \Psi(\mathbf{r}_{\bar{q}} - \mathbf{r}_q) = p_q p_{\bar{q}} (-1)^l \Psi(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{\bar{q}}),$$

т.е.

$$P(M(q\bar{q})) = (-1)^{l+1},$$

где $l$- относительный орбитальный момент. Для основных состояний мезонов $l = 0$ и $P(M(q\bar{q})) = -1$ (псевдоскалярные и векторные мезоны).
Внутренняя четность состояния трех частиц (например, бариона, построенного из трех кварков) равна произведению внутренних четностей составляющих, относительной орбитальной четности произвольно выбранной пары и относительной орбитальной четности этой пары и третьей составляющей

$$p(qqq) = p_q p_q p_q (-1)^l (-1)^L,$$

где $l$ - относительный орбитальный момент пары, $L$ - относительный орбитальный момент третьей частицы (кварка) и пары. Для основных состояний барионов $l = L = 0$ и $P(B(qqq)) = 1$.

## 3.2 Зарядовое сопряжение

Зарядовое сопряжение, по определению, переводит частицу в античастицу, у которой все заряды имеют противоположный знак по отношению к зарядам частицы. Истинно нейтральные частицы (не только электрически нейтральные) при $C$ - сопряжении переходят сами в себя, что позволяет ввести понятие $C$ - четности. Волновая функция (или состояние) некоторых частиц $(\gamma, \rho^0, \omega, \phi)$ меняет знак при зарядовом сопряжении

$$C\gamma = -\gamma, C_\gamma = -1, ....$$

Волновая функция других частиц $(\eta, \eta', \pi^0)$ не меняет знака при зарядовом сопряжении

$$C\eta = \eta, C_\eta = 1, ....$$

$C$ - четность мезонов, построенных из кварка и антикварка, определяется относительным орбитальным моментом кварка и антикварка $l$ их полным спином $s$

$$\psi(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{\bar{q}})\psi(s_q, s_{\bar{q}})a_q^+(\mathbf{r}_q, s_q)a_{\bar{q}}^+(\mathbf{r}_{\bar{q}}, s_{\bar{q}})|0> \ \overset{C}{\rightarrow} \ \psi(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{\bar{q}})\psi(s_q, s_{\bar{q}})a_{\bar{q}}^+(\mathbf{r}_q, s_q)a_q^+(\mathbf{r}_{\bar{q}}, s_{\bar{q}})|0>$$
$$= -\psi(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{\bar{q}})\psi(s_q, s_{\bar{q}})a_q^+(\mathbf{r}_{\bar{q}}, s_{\bar{q}})a_{\bar{q}}^+(\mathbf{r}_q, s_q)|0>$$
$$= (-1)^{1+l+s+1}\psi(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{\bar{q}})\psi(s_q, s_{\bar{q}})a_q^+(\mathbf{r}_q, s_q)a_{\bar{q}}^+(\mathbf{r}_{\bar{q}}, s_{\bar{q}})|0>$$

(По повторяющимся переменным $\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_{\bar{q}}, s_q, s_{\bar{q}}$ подразумевается суммирование).
Здесь при преобразованиях было учтено, что фермионные операторы антикоммутируют, что симметрия координатной волновой функции кварка и антикварка есть $(-1)^l$, а симметрия спиновой волновой функции кварка и антикварка есть $(-1)^{s+1}$. Таким образом $C$ - четность мезона $M = q\bar{q}$ равна

$$C(M(q\bar{q})) = (-1)^{l+s},$$

т.е. отрицательна для векторных мезонов ($l = 0, s = 1; \rho^0, \omega, \phi$) и положительна для псевдоскалярных мезонов ($l = 0, s = 0; \pi^0, \eta, \eta'$).

## 3.3 G - сопряжение

При операции зарядового сопряжения компоненты изотопического триплета $\pi$ - мезонов преобразуются следующим образом

$$\pi^0 \quad \overset{C}{\rightarrow} \quad \pi^0 \qquad\qquad \pi^\pm \quad \overset{C}{\rightarrow} \quad \pi^\mp \ .$$

Заряженные состояния $\pi$- мезонов не являются собственными состояниями операции зарядового сопряжения и им нельзя приписать сохраняющуюся $C$-четность. Можно, однако, совместить зарядовое сопряжение с некоторым (вполне определенным) поворотом в изотопическом пространстве так, чтобы отностительно результирующего преобразования ($G$-сопряжения) как нейтральный так и заряженные $\pi$ - мезоны были собственными состояниями и имели сохраняющуюся в сильных взаимодействиях $G$ - четность. Таким поворотом является поворот в изотопическом пространстве вокруг 2-ой оси на угол 180 градусов. Именно

$$\pi^0 \quad \overset{T_2^{180}}{\rightarrow} \quad -\pi^0 \qquad\qquad \pi^\pm \quad \overset{T_2^{180}}{\rightarrow} \quad -\pi^\mp$$

Тогда

$$G:\pi = CT_2^{180}:\pi = -\pi,$$

т.е. $G_\pi = -1$. Для других частиц $G$ - четности имеют следующие значения

$$G_\eta = +1, \qquad G_\rho = +1, \qquad G_\omega = -1, \qquad G_\phi = -1.$$

## 3.4 Распады

Применим обсуждавшиеся выше дискретные симметрии к распадам $\eta, \rho, \omega$ - мезонов. Составим табличку запретов на распады

$$\begin{array}{lr}
\eta \to \pi\pi & P, CP \\
\eta \to \pi\pi\pi & G \\
\eta \to \pi^0\gamma & C \\
\eta \to \pi^0\pi^0\gamma & C \\
\rho \to \pi^0\pi^0 & C, Bose \\
\rho \to \pi\pi\pi & G \\
\omega \to \pi\pi & G \\
\omega \to \pi^0\pi^0\pi^0 & C
\end{array}$$

## 3.5 Задача 3

Написать допустимые и запрещенные квантовые числа $J^{PC}$ в системе $q\bar{q}$.

# 4 Лекция 4. Изотопическая симметрия

## 4.1 Кварки и антикварки

Изотопическая симметрия сильных взаимодействий связана с тем, что массы $u$ и $d$ - кварков ($m_u = 4MeV, m_d = 7MeV$) выглядят приблизительно равными ($m_u \approx m_d$) с точки зрения характерного адронного масштаба ($1GeV$)

$$\Delta m_{ud} << 1GeV$$

и проявляется в том, что сильные взаимодействия при $m_u = m_d$ инвариантны относительно изотопических $SU(2)$ преобразований

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to U(2) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

Простейшим (фундаментальным) представлением группы $SU(2)$ является спинор $\Psi^\alpha; \alpha = 1, 2$, например дублет кварков. Группа $SU(2)$

$$U^+U = I \qquad\qquad detU = 1$$

имеет три генератора $\frac{\tau_i}{2}$

$$U = exp(i\boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}),$$

один из которых ($\frac{\tau_3}{2}$) можно сделать диагональным. Матрицы $\tau_i$- эрмитовы (унитарность матрицы $U$), бесследовы (равенство единице определителя матрицы $U$) и имеют вид

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для них выполняются следующие коммутационные, антикоммутационные и нормировочные соотношения

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2},$$

$$\{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}I,$$

$$Tr(\tau_i\tau_j) = 2\delta_{ij}.$$

Для других представлений группы $SU(2)$ преобразования имеют вид

$$exp(i\boldsymbol{\omega T}),$$

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k.$$

Кварковый дублет преобразуется посредством матрицы $U$ как контравариантный спинор

$$q'^{\alpha} = U^{\alpha}{}_{\beta}q^{\beta}$$

Антикварки преобразуются посредством комплексно сопряженной матрицы $U^*$

$$q'^{\alpha *} = U^{\alpha *}{}_{\beta}q^{\beta *}$$

или как ковариантный спинор

$$\bar{q}'_{\alpha} = \bar{q}_{\beta}U^{-1\beta}{}_{\alpha} = \bar{q}_{\beta}U^{+\beta}{}_{\alpha} = \bar{q}_{\beta}U^{*\alpha}{}_{\beta}.$$

В группе $SU(2)$ имеются два инвариантных тензора

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta} \to U^{\alpha}{}_{\alpha'}\delta^{\alpha'}{}_{\beta'}U^{-1\beta'}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta},$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} \to U^{\alpha}{}_{\alpha'}U^{\beta}{}_{\beta'}\epsilon^{\alpha'\beta'} = \epsilon^{\alpha\beta}(detU) = \epsilon^{\alpha\beta}.$$

С помощью второго из них - антисимметричного тензора $\epsilon^{\alpha\beta}$- ковариантный тензор можно преобразовать в контравариантный тензор, т.о. кварки и антикварки преобразуются по унитарно эквивалентным представлениям

$$\bar{q}_{\alpha} = (\bar{u}, \bar{d}) \overset{\epsilon}{\to} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \bar{q}^{\beta} = \epsilon^{\beta\alpha}\bar{q}_{\alpha}.$$

## 4.2 Дикварки и мезоны

В пространстве состояний (изотопическом) двух кварков имеется четыре базисных элемента $q^{\alpha}q^{\beta}$. Волновые функции - тензора $Q^{\alpha\beta}$ - образуют пространство, приводимое относительно преобразований группы $SU(2)$. Оно разбивается на два инвариантных подпространства: $S^{\alpha\beta}$ - симметричных тензоров и $A^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta}A$ - антисимметричных тензоров. В пространстве $S^{\alpha\beta}$ - три базисных элемента: $uu, \frac{1}{\sqrt{2}}(uu + dd), dd$. Они образуют триплет ($T = 1$) с $T_3 = 1, 0, -1$, соответственно. Пространство $A^{\alpha\beta}$ - одномерно с базисным элементом $\frac{1}{\sqrt{2}}(uu - dd)$. Это состояние является изотопическим синглетом ($T = 0$).

Аналогично, в пространстве состояний кварка и антикварка (мезоны) $q^\alpha \bar{q}_\beta$ имеем тензор $Q^\alpha{}_\beta = Q^\alpha_{0\,\beta} + \delta^\alpha{}_\beta Q (Q^\alpha_{0\,\alpha} = 0)$. Три базисных элемента пространства $Q^\alpha_{0\,\beta}$ - $(u\bar{d}, \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), d\bar{u})$ - образуют изотопический триплет, а базисный элемент пространства $\delta^\alpha{}_\beta Q$ - состояние $\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$ - изотопический синглет. Запишем, имея ввиду псевдоскалярные мезоны, триплет $Q^\alpha_{0\,\beta}$ в следующем виде

$$Q^\alpha_{0\,\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\pi_0}{\sqrt{2}} & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

и сравним эту запись с другим представлением тензора $Q^\alpha_{0\,\beta}$ , в котором явно введен изотопический вектор $\boldsymbol{\pi}$

$$Q^\alpha_{0\,\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\tau}^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{\pi_3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2) & -\frac{\pi_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В результате имеем соответствие

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \pm i\pi_2), \pi_0 = \pi_3,$$

которое мы уже использовали в предидущей лекции.

## 4.3 Изотопические состояния в системах двух и трех пи-мезонов

Два пи-мезона $\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2$ могут иметь полный изоспин равный $0, 1, 2$ $(3 * 3 = 1 + 3 + 5)$. Явное построение волновых функций системы двух пи-мезонов

$$\begin{array}{ccc} T = 0 & \boldsymbol{\pi}_1 \cdot \boldsymbol{\pi}_2 = \delta_{ij} \pi_{1i} \pi_{2j} & S \\ T = 1 & (\boldsymbol{\pi}_1 \times \boldsymbol{\pi}_2)_k = \epsilon_{ijk} \pi_{1i} \pi_{2j} & A \\ T = 2 & \pi_{1i}\pi_{2j} + \pi_{1j}\pi_{2i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\pi_{1k}\pi_{2k} & S \end{array}$$

показывает, что изоспиновая волновая функция двух пи-мезонов симметрична ($S$) для полного изоспина $T = 0, 2$ и антисимметрична ($A$) для $T = 1$. Поэтому, в соответствии с принципом Бозе, относительный

орбитальный момент двух пи-мезонов ($l$) четен при $T = 0, 2$ и нечетен при $T = 1$. Следовательно, $\omega$ - мезон ($T = 0, S = 1$) не может сильным образом (с сохранением изоспина) распасться на два $\pi$ - мезона. В предидущей лекции мы видели, что распад $\omega \to 2\pi$ запрещен сохранением $G$ - четности,теперь мы взглянули на этот запрет с другой стороны.
Для трех пи-мезонов $\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3$ имеем $(3 * 3 * 3 = (1 + 3 + 5) * 3 = 3 + (1 + 3 + 5) + (3 + 5 + 7))$ один синглет $T = 0$

$$\boldsymbol{\pi}_1 \cdot \boldsymbol{\pi}_2 \times \boldsymbol{\pi}_3 = \epsilon_{ijk}\pi_{1i}\pi_{2j}\pi_{3k} \qquad\qquad A$$

три триплета $T = 1$, один из которых можно сделать симметричным

$$\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\pi}_2 \cdot \boldsymbol{\pi}_3) + \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\pi}_3 \cdot \boldsymbol{\pi}_1) + \boldsymbol{\pi}_3(\boldsymbol{\pi}_1 \cdot \boldsymbol{\pi}_2) \qquad\qquad S$$

и т.д. Если предположить сохранение изотопического спина в распаде $\eta \to 3\pi$ ($T = 0$), то, согласно принципу Бозе, координатную (импульсную) волновую функцию трех пи-мезонов следует считать антисимметричной,что приводит к отрицательной $C$ - четности в системе пи-мезонов и нарушению $C$-четности в распаде. Если предположить, что координатная (импульсная) волновая функция трех пи-мезонов в этом распаде симметрична (нет относительного орбитального движения ввиду малости энерговыделения), то изотопический спин пи-мезонов не может равняться нулю, т.е. изоспин в распаде должен нарушаться. Раньше (см. лекцию 3) мы видели что в распаде $\eta \to 3\pi$ нарушается $G$ - четность, настоящее рассмотрение как бы расшифровывает это нарушение.

## 4.4 Пион нуклонное рассеяние

Применим изотопическую симметрию к пион нуклонному рассеянию. Имеем 10 процессов

$$\begin{array}{lcl}
\pi^+p \to \pi^+p & & \pi^-n \to \pi^-n \\
\pi^0p \to \pi^0p & T_2^{180} & \pi^0n \to \pi^0n \\
\pi^-p \to \pi^-p & \to & \pi^+n \to \pi^+n \\
\pi^0p \to \pi^+n & & \pi^0n \to \pi^-p \\
\pi^-p \to \pi^0n & & \pi^+n \to \pi^0p
\end{array}$$

Правые процессы получаются из левых с помощью изотопического поворота на угол 180 градусов вокруг второй оси в изотопическом пространстве, так что остается рассмотреть только левые процессы. Пятый процесс в левой колонке есть обращенный во времени четвертый процесс в правой колонке и,следовательно, его амплитуда равна амплитуде четвертого процесса (все равно в какой колонке). Второй процесс не наблюдаем из за отсутствия пучков $\pi^0$ - мезонов. Так что остаются три процесса $\pi^+ p \to \pi^+ p, \pi^- p \to \pi^- p, \pi^- p \to \pi^0 n$ амплитуды которых $(M_+, M_-, M_0)$ связаны изотопической симметрией. Складывая изоспины пи-мезона и нуклона, получаем

$$\pi^+ p = (\frac{3}{2}, +\frac{3}{2})$$

$$\pi^- p = \sqrt{\frac{1}{3}}(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) - \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$\pi^0 n = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{1}{3}}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Ввиду изотопической инвариантности амплитуда рассеяния пи-мезона на нуклоне не зависит от проекции полного изоспина в системе, т.е. имеются две независимые амплитуды $M_{3/2}$ и $M_{1/2}$ . Поэтому

$$M_+ = M_{3/2}$$

$$M_- = \frac{1}{3} M_{3/2} + \frac{2}{3} M_{12}$$

$$M_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}(M_{3/2} - M_{1/2})$$

и

$$\sqrt{2} M_0 + M_- = M_+.$$

Это и есть искомая связь амплитуд. В $\Delta$ - резонансе, когда $M_{3/2} >> M_{1/2}$,

$$M_+ : M_- : M_0 = 1 : \frac{1}{3} : \frac{\sqrt{2}}{3},$$

так что сечения процессов относятся как

$$\sigma_+ : \sigma_- : \sigma_0 = 9 : 1 : 2.$$

Это соотношение хорошо выполняется на опыте.

## 4.5 Задача 4

Найти отношение ширин распадов $\eta \to \pi^0 \pi^0 \pi^0$ и $\eta \to \pi^+ \pi^- \pi^0$, считая, что изоспин системы пи-мезонов равен единице ($T = 1$) и координатная (импульсная) волновая функция пи-мезонов симметрична (см. лекцию).

# 5 Лекция 5. $SU(3)$ (унитарная) симметрия

## 5.1 Фундаментальное представление

Сравнение масс $u, d, s$ - кварков с характерным адронным масштабом ($m_u = 4MeV, m_d = 7MeV, m_s = 150MeV << 1GeV$) говорит о том, что $SU(3)$ - симметрия

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to U(3) \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}.$$

может рассматриваться как приближенная симметрия сильных взаимодействий. Она нарушена (в основном) тем, что странный кварк ($s$) значительно тяжелее нестранных кварков ($u$ и $d$). Следствия именно такого нарушения $SU(3)$ - симметрии состоят в массовых формулах, которые будут рассмотрены на следующей лекции. На этой лекции мы займемся классификацией $SU(3)$ - мультиплетов.

Фундаментальным представлением группы $SU(3)$ является триплет кварков

$$q^\alpha = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}.$$

$SU(3)$ преобразования триплета осуществляются унитарными матрицами $3\times3$

$$U = exp(i\omega^a \frac{\lambda^a}{2}),$$

где $\lambda^a$ - матрицы Гелл-Манна

$$\lambda^{1,2,3} = \begin{pmatrix} \tau^{1,2,3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda^{4,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1(-i) \\ 0 & 0 & 0 \\ 1(+i) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{6,7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1(-i) \\ 0 & 1(+i) & 0 \end{pmatrix}; \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

В группе $SU(3)$ имеется два диагональных генератора - третья компонента изотопического спина и гиперзаряд,

$$T_3 = \frac{\lambda^3}{2} \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda^8,$$

сохраняющиеся в сильных и электромагнитных взаимодействиях (см. лекцию 2). Антикварки преобразуются по комплексно сопряженному представлению (ковариантный спинор), которое, в отличие от группы $SU(2)$, не эквивалентно фундаментальному представлению, по которому преобразуются кварки (контравариантный спинор).

Группа $SU(3)$ имеет два инвариантных тензора

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta} \to U^{\alpha}{}_{\alpha'}\delta^{\alpha'}{}_{\beta'}U^{-1\beta'}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta},$$
$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \to U^{\alpha}{}_{\alpha'}U^{\beta}{}_{\beta'}U^{\gamma}{}_{\gamma'}\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}(detU) = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}.$$

## 5.2 Мезоны

Мезоны состоят из кварка и антикварка и описываются тензором (волновой функцией)

$$Q^{\alpha}{}_{\beta} = Q^{\alpha}_{0\,\beta} + \frac{1}{3}\delta^{\alpha}{}_{\beta}Q \qquad\qquad (Q^{\alpha}_{0\,\alpha} = 0),$$

две части которого представляют состояния октета и синглета. Базисными состояниями в октете являются (на примере псевдоскалярных мезонов):

изотопический триплет $\pi$ - мезонов

$$u\bar{d}, \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), d\bar{u};$$

изотопические дублеты $K$ - мезонов

$$u\bar{s}, d\bar{s}; \qquad\qquad s\bar{d}, s\bar{u}$$

и изотопический синглет $\eta_8$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}).$$

Базисный элемент синглетной части тензора $\eta_0$ равен

$$\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}).$$

Соответственно с базисными элементами октетной части тензора $Q^{\alpha}{}_{\beta}$ ($Q^{\alpha}_{0\,\beta}$) сам тензор $Q^{\alpha}_{0\,\beta}$ может быть представлен в следующем виде

$$Q^{\alpha}_{0\,\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\pi_0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi_0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

## 5.3 Барионы

Барионы состоят из трех кварков. Их волновая функция, представленная тензором $B^{\alpha\beta\gamma}$, приводима. Не вдаваясь в детали, опишем разбиение тензора $B^{\alpha\beta\gamma}$ на неприводимые части. Начнем с того, что разобьем тензор $B^{\alpha\beta\gamma}$ на две части, одна из которых симметрична, а другая антисимметрична по индексам $\alpha\beta$

$$B^{\alpha\beta\gamma} = B^{\{\alpha\beta\}\gamma} + B^{[\alpha\beta]\gamma}$$

Антисимметричную часть с помощью инвариантного тензора $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ представим в эквивалентном виде

$$B^{[\alpha\beta]\gamma} \to B^{\gamma}{}_{\gamma'} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma'} B^{[\alpha\beta]\gamma}$$

Тензор $B^{\gamma}{}_{\gamma'}$ аналогично тензору $Q^{\alpha}{}_{\beta}$ для мезонов разбивается на октетную и синглетную части

$$B^{\gamma}{}_{\gamma'} = B^{\gamma}_{0\,\gamma'} + \frac{1}{3}\delta^{\gamma}{}_{\gamma'}\epsilon_{\alpha\beta\delta}B^{[\alpha\beta]\delta}$$

Если теперь вернуться к тензору

$$B^{[\alpha\beta]\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma'}B^{\gamma}{}_{\gamma'},$$

то синглет будет описываться тензором

$$\frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}B,$$

где

$$B = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}B^{[\alpha\beta]\gamma}.$$

Т.о. синглет представляет полностью антисимметричную часть первоначального тензора $B^{\alpha\beta\gamma}$.

Симметричную часть $B^{\{\alpha\beta\}\gamma}$ далее можно либо симметризовать по индексам $\beta\gamma$, получив полностью симметричный тензор $B^{\{\alpha\beta\gamma\}}$ (10 независимых компонент - декуплет), либо антисимметризовать по индексам $\beta\gamma$

$$B^{\{\alpha\beta\}\gamma} = B^{\{\alpha\beta\gamma\}} + B^{\{\alpha[\beta\}\gamma]}$$

Тензор $B^{\{\alpha[\beta\}\gamma]}$ также с помощью инвариантного тензора $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ представим в эквивалентном виде

$$B^{\{\alpha[\beta\}\gamma]} \to B'^{\alpha}{}_{\alpha'} = \epsilon_{\alpha'\beta\gamma} B^{\{\alpha[\beta\}\gamma]}$$

Тензор $B'^{\alpha}{}_{\alpha'}$ представляет собой чисто октетный тензор, т.к. его след равен нулю ($B'^{\alpha}{}_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B^{\{\alpha[\beta\}\gamma]} = 0$). В итоге мы получили разбиение волновой функции $B^{\alpha\beta\gamma}$ на симметричный декуплет, антисимметричный синглет и два октета со смешанной симметрией. Запишем результат в следующем виде

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{S} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{A} \\ 3\times 3\times 3 = & 10\,+ & 8'\,+ & 8\,+ & 1\ . \end{array}$$

Если сравнить этот результат с экспериментально наблюдемыми унитарными мультиплетами основных состояний барионов (декуплет барионов со спином $3/2$ и октет барионов со спином $1/2$), то можно заметить, что октет среди них присутствует в единственном числе, а синглет отсутствует. Причина этого состоит, как мы сейчас увидим, в принципе Паули, которому подчиняются составляющие кварки. Напишем волновую бариона в следующем виде

$$\Psi = \overset{S}{\Psi(x_1,x_2,x_3)} \times \overset{A}{\Psi(c_1,c_2,c_3)} \times B^{\alpha\beta\gamma} \times \overset{S}{\Psi(s_1,s_2,s_3)}\ ,$$

где первый множитель в произведении представляет координатную волновую функцию кварков, симметричную по перестановкам координат кварков (для основного состояния бариона);
второй множитель представляет цветовую волновую функцию кварков, антисимметричную по перестановкам цветовых переменных $c_1, c_2, c_3$ ("белый" барион, синглет в цветовой группе $SU(3)$, ср. с синглетом в флейверной(унитарной) группе $SU(3)$);
$B^{\alpha\beta\gamma}$ - флейверная волновая функция кварков, симметрию которой для разных представлений мы только что описали;
$\Psi(s_1, s_2, s_3)$ - спиновая волновая функция, симметрию которой опишем аналогично тому как это было сделано для флейверной волновой функции

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{S} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 2\times 2\times 2 = & 4\,+ & 2'\,+ & 2\ . \end{array}$$

Антисимметрия полной волновой функции, как видно, будет достигнута, если сделать симметричным произведение флейверной и спиновой волновых функций. Один способ очевиден: взять декуплет со спином 3/2. Другой способ (октет со спином 1/2) не столь очевиден,поясним его следующим образом. Если флейверные и спиновые переменные рассматривать одновременно, совместный индекс будет иметь 6 значений: $u, d, s$ - кварки со спинами "вверх-вниз". Для этого совместного индекса полностью симметричный тензор третьего ранга содержит $\frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 56$ независимых компонент. Сорок из них - это декуплет со спином 3/2 $(10\cdot4)$. Остаются 16 компонент, которые не могут не представлять октет со спином 1/2 $(16 = 8 \cdot 2)$.
Таким образом принцип Паули отбирает возможные унитарные мультиплеты и спины основных состояний барионов. Заметим еще раз,что для унитарного синглета нет места среди основных состояний барионов.

## 5.4 Два представления октета барионов

Октет частиц, как мы это видели на примере мезонов, можно описать матрицей $3 \times 3$ с нулевым следом. Опишем таким образом октет барионов. Вопрос, какую частицу ставить на то или иное место, можно решить однозначно, сравнивая с мезонной матрицей и учитывая, что третья проекция изотопического спина и заряд сравниваемых частиц должны совпадать ($T_3$ так же как и $Q = T_3 + Y/2$ являются генераторами группы $SU(3)$). Отсюда получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi_0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi_0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma_0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Такое представление октета барионов мы будем использовать в следующей лекции при выводе массовых формул для масс частиц октета барионов.

Другое представление частиц октета обращается явным образом к их кварковой структуре. Построим для примера состояние протона. Протон состоит из двух $u$ - кварков и одного $d$ - кварка, т.е. его флейверная структура есть $uud$. Требование принципа Паули (см.выше) состоит в том, что спин двух $u$ - кварков должен быть равен единице (симметрия спиновой волновой функции). Сложим единичный спин двух $u$ - кварков и спин $d$ - кварка так, чтобы получить $1/2$ для спина протона

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{u}\dot{u}\underset{.}{d} - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}(\dot{u}\underset{.}{u} + \underset{.}{u}\dot{u})\dot{d}$$

(точка над (под) буквой означает спин "вверх"("вниз") - проекция спина на ось $z$ равна $+1/2$ (-1/2)) и симметризуем далее по перестановкам $d$ - кварка так, чтобы получить полностью симметричное по перестановкам всех кварков выражение. Окончательно получим

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{1}{18}}(2(\dot{u}\dot{u}\underset{.}{d} + \dot{u}\underset{.}{d}\dot{u} + \underset{.}{d}\dot{u}\dot{u}) - (\dot{u}\underset{.}{u}\dot{d} + \dot{u}\dot{d}\underset{.}{u} + \dot{d}\dot{u}\underset{.}{u} + \underset{.}{u}\dot{u}\dot{d} + \underset{.}{u}\dot{d}\dot{u} + \dot{d}\underset{.}{u}\dot{u})) \quad .$$

Такое представление частиц октета нам понадобится в лекции посвященной магнитным моментам барионов.

## 5.5 Задача 5

Разбить по $SU(3)$ мультиплетам адроны, содержащие 1 и 2 $c$ - кварка.

# 6 Лекция 6. Массовые формулы. Смешивание

## 6.1 Октет барионов

На прошлой лекции мы занимались классификацией по $SU(3)$ - мультиплетам основных состояний мезонов $q\bar{q}$ и барионов $qqq$. Это были октет и синглет псевдоскалярных и векторных мезонов и октет и декуплет барионов. Если бы $SU(3)$- симметрия была бы точной, то массы частиц в каждом мультиплете были бы одинаковые. В действительности $SU(3)$ - симметрия является приближенной, а массы частиц в мультиплетах существенно различаются:

$$\begin{array}{lcccc} & \pi & K & \eta & \eta' \\ {P^\alpha}_\beta( & 140 & 490 & 550 & 960\ ) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} & \rho & K^* & \omega & \phi \\ {V^\alpha}_\beta( & 770 & 890 & 780 & 1020\ ) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} & N & \Lambda & \Sigma & \Xi \\ {B^\alpha}_\beta( & 940 & 1116 & 1190 & 1320\ ) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} & \Delta & \Sigma^* & \Xi^* & \Omega \\ D^{\alpha\beta\gamma}( & 1230 & 1380 & 1530 & 1670\ ) \end{array}$$

Нарушение симметрии $SU(3)$ происходит на кварковом уровне и связано с различием масс нестранных $u, d$ - кварков $(4, 7MeV)$ и странного $s$ - кварка $(150MeV)$. Следствия такого нарушения симметрии - массовые формулы и их можно получить из симметрийных соображений.
На кварковом уровне нарушающий симметрию лагранжиан есть массовый лагранжиан кварков

$$L_m^q = m_q(\bar{u}u + \bar{d}d) + m_s\bar{s}s = m_q(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s) + (m_s - m_q)\bar{s}s.$$

Здесь мы пренебрегли нарушением изотопической инвариантности, связанным с разностью масс $u$ и $d$ кварков. Его учет (см. задачу) без учета электромагнитных взаимодействий, нарушающих как $SU(3)$ так и изотопическую симметрию, был бы неоправдан.

Этот лагранжиан представлен в виде двух слагаемых: $SU(3)$ - симметричного (синглет по группе $SU(3)$) и $SU(3)$ - не симметричного ((3,3)-компонента тензора)

$$L_m^{q0} = m_q(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$$

$$L_{m3}^{q3} = (m_s - m_q)\bar{s}s.$$

Естественно ожидать, что на уровне адронов массовый лагранжиан (адронов) также должен содержать два слагаемых с теми же трансформационными свойствами по группе $SU(3)$. Обратимся прежде всего к октету барионов со спином 1/2

$$B^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma_0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Синглетный по $SU(3)$ массовый лагранжиан октета барионов пишется однозначно - массы всех барионов одинаковы ($m_B^0$)

$$L_m^{B0} = m_B^0 \bar{B}^\alpha{}_\beta B^\beta{}_\alpha = m_B^0(\bar{p}p + \bar{n}n + \cdots + \bar{\Lambda}\Lambda)$$

Нарушающий $SU(3)$ массовый лагранжиан для октета барионов - (3,3)-компоненту тензора - представи́м в двух видах, что требует введения двух независимых параметров ($m_B^8$ и $m_B^8{}'$)

$$L_{m3}^{B3} = m_B^8 \bar{B}^3{}_\beta B^\beta{}_3 + m_B^8{}' \bar{B}^\alpha{}_3 B^3{}_\alpha =$$
$$m_B^8(\bar{p}p + \bar{n}n + \tfrac{2}{3}\bar{\Lambda}\Lambda) + m_B^8{}'(\bar{\Xi}^-\Xi^- + \bar{\Xi}^0\Xi^0 + \tfrac{2}{3}\bar{\Lambda}\Lambda)$$

Для масс частиц октета барионов имеем

$$m_p = m_n = m_B^0 + m_B^8$$

$$m_{\Xi^-} = m_{\Xi^0} = m_B^0 + m_B^8{}'$$

$$m_{\Sigma^+} = m_{\Sigma^0} = m_{\Sigma^-} = m_B^0$$

$$m_\Lambda = m_B^0 + \frac{2}{3}(m_B^8 + m_B^8{}')$$

Таким образом четыре массы (нарушение изотопической инвариантности не рассматривается) выражаются через три параметра. Между массами имеется соотношение

$$3m_\Lambda + m_\Sigma = 2(m_N + m_\Xi),$$

называемое формулой Гелл-Манна - Окубо. Левая часть этой формулы равна

$$3 \cdot 1116 + 1193 = 3348 + 1193 = 4541,$$

а правая равна

$$2 \cdot (939 + 1318) = 2 \cdot 2257 = 4517.$$

Если бы, воспользовавшись формулой Гелл-Манна - Окубо, мы предсказали массу $\Lambda$ - гиперона, то получили бы $m_\Lambda = 1107 MeV$, т.е. с ошибкой всего в $9 MeV$ - величиной, сравнимой с электромагнитными и изотопическими разностями масс. Т.о. точность предсказания формулы Гелл-Манна - Окубо огромная.

## 6.2 Декуплет барионов

Перейдем к декуплету барионов $D^{\alpha\beta\gamma}$. Инвариантную часть массового лагранжиана частиц декуплета запишем в следующем виде

$$\begin{gathered} L_m^{D0} = m_D^0 \bar{D}_{\alpha\beta\gamma} D^{\alpha\beta\gamma} = m_D^0 \{(111) + (222) + (333) \\ +3[(112) + (113) + (221) + (223) + (331) + (332)] + 6(123)\}, \end{gathered}$$

где символом $(\alpha\beta\gamma)$ обозначено выражение $\bar{D}_{\alpha\beta\gamma} D^{\alpha\beta\gamma}$ (нет суммирования). Из равенства масс частиц декуплета (для инвариантной части массового лагранжиана) имеем соответствие компонент тензора $D^{\alpha\beta\gamma}$ и полей частиц декуплета

$$\begin{array}{llll} \Delta^{++} \leftrightarrow D^{111} & \frac{\Sigma^{+*}}{\sqrt{3}} \leftrightarrow D^{113} & & \\ \frac{\Delta^{+}}{\sqrt{3}} \leftrightarrow D^{112} & & \frac{\Xi^{0*}}{\sqrt{3}} \leftrightarrow D^{331} & \\ & \frac{\Sigma^{0*}}{\sqrt{6}} \leftrightarrow D^{123} & & \Omega^{-} \leftrightarrow D^{333} \\ \frac{\Delta^{0}}{\sqrt{3}} \leftrightarrow D^{221} & & \frac{\Xi^{-*}}{\sqrt{3}} \leftrightarrow D^{332} & \\ \Delta^{-} \leftrightarrow D^{222} & \frac{\Sigma^{-*}}{\sqrt{3}} \leftrightarrow D^{223} & & \end{array}$$

Нарушающая $SU(3)$ часть массового лагранжиана декуплета барионов описывается единственной структурой

$$L_{m3}^{D3} = m_D^8 \bar{D}_{3\alpha\beta} D^{3\alpha\beta} = m_D^8 \{(311) + (322) + (333) + 2[(312) + (313) + (323)]\}$$

Имея ввиду приведенное выше соответствие компонент тензора и полей частиц декуплета, для масс частиц декуплета получаем

$$m_\Delta = m_D^0 \qquad (1230)$$

$$m_{\Sigma^*} = m_D^0 + m_D^8/3 \qquad (1380)$$
$$m_{\Xi^*} = m_D^0 + 2m_D^8/3 \qquad (1520)$$
$$m_\Omega = m_D^0 + m_D^8 \qquad (1670)$$

Частицы располагаются эквидистантно по массе в прекрасном согласии с экспериментальными данными.

## 6.3 Мезоны. Смешивание

Переходя к мезонам, отметим две особенности. Первая состоит в том, что массовый лагранжиан бозонов квадратичен по массам частиц в отличие от массового лагранжиана фермионов линейного по массам частиц. Поэтому в массовых соотношениях для бозонов будут фигурировать квадраты масс. Например по аналогии с формулой Гелл-Манна - Окубо мы получаем следующие соотношения для масс частиц октетов псевдоскалярных и векторных мезонов.

$$3m_{\eta_8}^2 + m_\pi^2 = 4m_K^2$$

$$3m_{\omega_8}^2 + m_\rho^2 = 4m_{K^*}^2$$

Здесь $\eta_8$ и $\omega_8$ - изотопически синглетные компонеты унитарных октетов

$$P^3{}_3 = -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \qquad V^3{}_3 = -\frac{2\omega_8}{\sqrt{6}}.$$

Эти частицы ненаблюдаемы также, как ненаблюдаемы изотопически синглетные унитарные синглеты $\eta_0$ и $\omega_0$. Причина их ненаблюдаемости (вторая особенность мезонов по сравнению с барионами) состоит в том, что $SU(3)$- синглетные и октетные мезоны смешиваются из-за нарушения $SU(3)$- инвариантности. Смешивающая часть в массовом лагранжиане мезонов имеет симметрию (3,3) - компоненты тензора, т.е. допустима по симметрийным соображениям

$$L_m^{mix} = m_{mix}^2 M^3{}_3 M_0,$$

где $M^{\alpha}{}_{\beta}$ представляет октет мезонов, а $M_0$ - синглетный мезон. Результатом смешивания мезонов $\eta_8$ и $\eta_0$ ($\omega_8$ и $\omega_0$) являются мезоны $\eta$ и $\eta'$ ($\phi$ и $\omega$). Опишем процесс смешивания.

Нарисуем ось, на которой будем откладывать квадраты масс частиц. Начнем с псевдоскалярных мезонов. Нам известен квадрат массы мезона $\eta_8$: $m^2_{\eta_8} = (4m^2_K - m^2_\pi)/3 = (566MeV)^2$. Экспериментально известны квадраты масс мезонов $\eta$ и $\eta'$: $m^2_\eta = (549MeV)^2$ и $m^2_{\eta'} = (958MeV)^2$

$$- - - - - - | - - - - - - | - - - - - - - - - - - - | - - - - - - | - - - - - - >$$

| $\eta$ | $\eta_8$ | $\eta_0$ | $\eta'$ |
|---|---|---|---|
| $(549)^2$ | $(566)^2$ | $(949)^2$ | $(958)^2$ |

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Квадрат массы мезона $\eta_0$ находится по формулам смешивания:

$$m^2_{\eta'} - m^2_{\eta_0} = m^2_{\eta_8} - m^2_\eta$$

- два уровня расталкиваются в противоположные стороны на равные расстояния. Мы видим, что недиагональный $\eta_8$- мезон легче недиагонального $\eta_0$- мезона, хотя тяжелых странных кварков в $\eta_8$- мезоне больше, чем в $\eta_0$- мезоне, и это вызывает удивление, обсуждать которое мы будем на следующей лекции. Смешивание мезонов описывается углом смешивания $\theta_P$

$$\eta = cos\theta_P \eta_8 + sin\theta_P \eta_0$$

$$\eta' = -sin\theta_P \eta_8 + cos\theta_P \eta_0,$$

который можно найти, если обратить формулы смешивания

$$\eta_8 = cos\theta_P \eta - sin\theta_P \eta'$$

$$\eta_0 = sin\theta_P \eta + cos\theta_P \eta'$$

и вычислить матричный элемент оператора квадрата массы, например, по состоянию $\eta_8$- мезона

$$m^2_{\eta_8} = cos^2\theta_P m^2_\eta + sin^2\theta_P m^2_{\eta'}.$$

Тогда

$$sin^2\theta_P = \frac{m_{\eta_8}^2 - m_\eta^2}{m_{\eta'}^2 - m_\eta^2} \qquad \to |\theta_P| \approx 10^o$$

Предсказание для угла смешивания $\theta_P$, полученное на основе массовых формул, мы будем использовать на следующей лекции при рассмотрении аннигиляции псевдоскалярных мезонов в два фотона.

Перейдем к векторным мезонам. Нам известен квадрат массы мезона $\omega_8$: $m_{\omega_8}^2 = (4m_{K^*}^2 - m_\rho^2)/3 = (929MeV)^2$. Экспериментально известны квадраты масс мезонов $\omega$ и $\phi$: $m_\omega^2 = (780MeV)^2$ и $m_\phi^2 = (1020MeV)^2$

$$------|------|------------|------|------ >$$

$$\begin{array}{cccc} \omega & \omega_0 & \omega_8 & \phi \\ (780)^2 & (900)^2 & (929)^2 & (1020)^2 \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \qquad \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

Масса мезона $\omega_0$, найденная по формулам смешивания, меньше массы мезона $\omega_8$ и это не вызывает удивления, поскольку в $\omega_0$ - мезоне меньше странных кварков, чем в $\omega_8$ - мезоне.

Смешивание векторных мезонов описывается углом смешивания $\theta_V$

$$\omega = cos\theta_V\omega_0 + sin\theta_V\omega_8$$

$$\phi = -sin\theta_V\omega_0 + cos\theta_V\omega_8.$$

Согласно массовым формулам этот угол равен

$$sin^2\theta_V = \frac{m_{\omega_0}^2 - m_\omega^2}{m_\phi^2 - m_\omega^2} \qquad \to \qquad |\theta_V| \approx 40^o.$$

Угол $\theta_V$ близок к идеальному углу смешивания

$$cos\theta_{V ideal} = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad sin\theta_{V ideal} = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \theta_{V ideal} \approx 35^o,$$

при котором $\omega$ - мезон не содержит странных кварков, а $\phi$ - мезон не содержит нестранных кварков.

Более подробно вопросы смешивания мезонов мы будем обсуждать на следующей лекции.

## 6.4 Задача 6

Найти массовые формулы с учетом нарушения не только $SU(3)$, но и $SU(2)$ - симметрии.

# 7 Лекция 7. Смешивание псевдоскалярных и векторных мезонов

## 7.1 $SU(3)$-симметричный предел для масс псевдоскалярных и векторных мезонов

На прошлой лекции мы рассматривали эффекты нарушения $SU(3)$- симметрии для масс мезонов и барионов. В случае векторных мезонов формула Гелл-Манна - Окубо предсказывала массу $\omega_8$ - мезона равной $m_{\omega_8} = 929MeV$. Масса $\omega_0$ - мезона должна была при этом составлять $900MeV$ для того, чтобы результатом смешивания $\omega_8$- и $\omega_0$- мезонов были $\phi$- и $\omega$-мезоны с экспериментально наблюдаемыми массами. Такой результат не представляется неожиданным, поскольку в $\omega_8$-мезоне больше странных кварков, чем в $\omega_0$-мезоне. При уменьшении массы странного кварка естественно было бы ожидать, что $m_{\omega_8} \to m_{\omega_0}$ и в $SU(3)$-симметричном пределе массы частиц октета и синглета были бы одинаковы, так что имелся бы нонет (9) вырожденных мезонов.
В противоположность этому $m_{\eta_8} << m_{\eta_0}$, хотя в $\eta_8$-мезоне больше странных кварков, чем в $\eta_0$-мезоне. Поэтому при уменьшении массы странного кварка разность масс $m_{\eta_0} - m_{\eta_8}$ должна была бы увеличиваться и в пределе $SU(3)$-симметрии мы имели бы октет псевдоскалярных мезонов с массой $\sim m_\pi$ и псевдоскалярный синглет с массой $m_{\eta_0} >> m_\pi$. Всвязи с этим принято думать, что какая-то (и довольно значительная) часть массы $\eta_0$-мезона (а с ним и $\eta'$-мезона) связана с глюонной компонентой его волновой функции, т.е.

$$\eta_0 = \alpha \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) + \beta G\tilde{G},$$

где символом $G\tilde{G}$ обозначен псевдоскалярный глюоний - состояние двух глюонов с квантовыми числами $J^P = 0^-$.

## 7.2 Смешивание псевдоскалярных мезонов

Информацию об угле смешивания псевдоскалярных мезонов $\theta_P$

$$\eta = cos\theta_P \eta_8 + sin\theta_P \eta_0$$

$$\eta' = -sin\theta_P \eta_8 + cos\theta_P \eta_0,$$

можно получить не только из массовых формул ($|\theta_P| \approx 10^o$), но и из распадов, в которых происходит аннигиляция этих мезонов в два фотона. Среди псевдоскалярных мезонов имеется три нейтральных мезона ($\pi_0, \eta, \eta'$), которые распадаются на $2\gamma$-кванта. Амплитуда распада пары $q\bar{q}$ в $2\gamma$ пропорциональна квадрату заряда $q$-кварка $e_q^2 \equiv g_{q\bar{q}}$ . В $SU(3)$-симметричном пределе амплитуды распадов $\pi_0, \eta_8, \eta_0 \to 2\gamma$ отличались бы только разными значениями констант $g_{\pi_0}, g_{\eta_8}, g_{\eta_0}$

$$\begin{array}{c} g_{\pi_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_u^2 - e_d^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{4}{9} - \frac{1}{9}) = \frac{1}{\sqrt{2}\quad 3} \\ g_{\eta_8} = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_u^2 + e_d^2 - 2e_s^2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 2\frac{1}{9}) = \frac{1}{\sqrt{6}\quad 3} \\ g_{\eta_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_u^2 + e_d^2 + e_s^2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}) = \frac{2}{\sqrt{3}\quad 3} \end{array} .$$

При нарушении $SU(3)$-симметрии мы должны учесть два момента. Во-первых, распадаются на $2\gamma$ не $\eta_8$ и $\eta_0$, а их смеси $\eta$ и $\eta'$

$$\begin{array}{c} g_\eta = cos\theta_P g_{\eta_8} + sin\theta_P g_{\eta_0} = \frac{1}{3}(\frac{1}{\sqrt{6}}cos\theta_P + \frac{2}{\sqrt{3}}sin\theta_P) \\ g_{\eta'} = -sin\theta_P g_{\eta_8} + cos\theta_P g_{\eta_0} = \frac{1}{3}(-\frac{1}{\sqrt{6}}sin\theta_P + \frac{2}{\sqrt{3}}cos\theta_P) \end{array} .$$

Во-вторых, амплитуды и ширины распадов различны, т.к. распадаются частицы с разными массами, различны энергии $\gamma$-квантов в распадах. Учтем зависимость от массы распадающегося псевдоскалярного мезона феноменологически. Для этого амплитуду и ширину распада запишем в следующем виде

$$\begin{array}{c} A(P \to 2\gamma) \sim g_P P F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \sim g_P m_P^2 \\ \Gamma(P \to 2\gamma) \sim |A(P \to 2\gamma)|^2 \frac{1}{2m_P} \sim g_P^2 m_P^3 \end{array} .$$

Здесь $(\tilde{F}_{\mu\nu})F_{\mu\nu}$ (дуальный) тензор электромагнитного поля. Т.о. в отношениях имеем

$$\frac{\Gamma_\eta}{\Gamma_{\pi_0}} = \frac{g_\eta^2}{g_{\pi_0}^2}\frac{m_\eta^3}{m_{\pi_0}^3} = (cos\theta_P + 2\sqrt{2}sin\theta_P)^2 \frac{1}{3}\frac{m_\eta^3}{m_{\pi_0}^3}$$

и $\theta_P \approx 11.8^o$;

$$\frac{\Gamma_{\eta'}}{\Gamma_{\pi_0}} = \frac{g_{\eta'}^2}{g_{\pi_0}^2}\frac{m_{\eta'}^3}{m_{\pi_0}^3} = (-sin\theta_P + 2\sqrt{2}cos\theta_P)^2 \frac{1}{3}\frac{m_{\eta'}^3}{m_{\pi_0}^3}$$

и $\Gamma_{\eta'}^{th} = 783\Gamma_{\pi_0} = 6.07KeV(\Gamma_{\eta'}^{exp} = 4.54KeV)$. Если бы из второго отношения мы попытались бы найти угол $\Theta_P$, то результат был бы равен

$\theta_P \approx 22.8^o$, что находилось бы в резком противоречии с результатом массовых формул $|\theta_P| \approx 10^o$. Возможная причина расхождения связана с уже обсуждавшимся выше наличием глюонной компоненты в $\eta'$-мезоне. Предположим, что в смеси

$$\eta_0 = \alpha\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) + \beta G\tilde{G}$$

глюонная компонента не переходит в два фотона. Тогда для $\Gamma^{th}_{\eta'}$ получилось бы предсказание

$$\Gamma^{th}_{\eta'} = \alpha^2 6.07KeV,$$

согласование которого с экспериментальным значением $\Gamma^{exp}_{\eta'} = 4.54KeV$ требовало бы $\alpha^2 \approx 75\%$. Т.о. мы получили второй аргумент в пользу наличия глюонной примеси в $\eta'$-мезоне.

## 7.3 Векторные мезоны

Перейдем теперь к векторным мезонам. Согласно массовым формулам их смешивание

$$\omega = cos\theta_V\omega_0 + sin\theta_V\omega_8$$
$$\phi = -sin\theta_V\omega_0 + cos\theta_V\omega_8$$

($|\theta_V| \approx 40^o$) близко к идеальному, при котором $\omega$ - мезон не содержит странных кварков, а $\phi$ - мезон не содержит нестранных кварков ($\theta_{V ideal} \approx 35^o$) . Как и для псевдоскалярных мезонов смешивание векторных мезонов можно изучать на примере их электромагнитных распадов - в данном случае аннигиляции в электрон-позитронную пару. Амплитуда аннигиляции пары $q\bar{q}$ в электрон и позитрон пропорциональна, очевидно, заряду кварка $e_q \equiv h_{q\bar{q}}$ . В $SU(3)$-симметричном пределе для констант $h_{\rho_0}, h_{\omega_8}, h_{\omega_0}$ имелись бы, соответсвенно, предсказания

$$h_{\rho_0} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\tfrac{2}{3} - (-\tfrac{1}{3})) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$h_{\omega_8} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac{2}{3} + (-\tfrac{1}{3}) - 2(-\tfrac{1}{3})) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}$$
$$h_{\omega_0} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\tfrac{2}{3} + (-\tfrac{1}{3}) + (-\tfrac{1}{3})) = 0.$$

При нарушении $SU(3)$-симметрии, как и в случае мезонов, необходимо учесть два момента. Во-первых, смешивание мезонов

$$h_\omega = cos\theta_V h_{\omega_0} + sin\theta_V h_{\omega_8} = sin\theta_V \tfrac{1}{\sqrt{6}}$$
$$h_\phi = -sin\theta_V h_{\omega_0} + cos\theta_V h_{\omega_8} = cos\theta_V \tfrac{1}{\sqrt{6}},$$

а, во-вторых, зависимость ширины распада от массы распадающегося векторного мезона. Последнюю оценим из размерностных соображений. Ширина аннигиляции векторного мезона в электрон-позитронную пару пропорциональна вероятности кварку и антикварку встретиться - квадрату модуля значения относительной волновой функции в нуле. Приводя ширину распада к нужной размерности, получаем следующую зависимость ширины от массы векторного мезона

$$\Gamma(V \to e^+e^-) \sim \frac{|\psi_V(0)|^2}{m_V^2} h_V^2.$$

Т.о. для отношений имеем

$$\frac{\Gamma_\omega}{\Gamma_\rho} = \frac{sin^2\theta_V}{3}\frac{m_\rho^2}{m_\omega^2},$$

что дает угол смешивания $\theta_V \approx 32^o$ близкий к идеальному $\theta_{V\,ideal} \approx 35^o$ и

$$\frac{\Gamma_\phi}{\Gamma_\rho} = \frac{cos^2\theta_V}{3}\frac{m_\rho^2}{m_\phi^2},$$

что дает ширину $\Gamma_\phi^{th} \approx 1KeV$. Расхождение с экспериментальной шириной $\Gamma_\phi^{exp} \approx 1.3KeV$ уместно было бы в данном случае объяснить бо́льшим значением волновой функции в нуле для странных (тяжелых) кварков, чем для нестранных (легких) кварков.

## 7.4 Задача 7

Произвести численные расчеты, оставшиеся "за кадром" данной лекции.

# 8 Лекция 8. Магнитные моменты барионов

## 8.1 Магнитные моменты барионов в $SU(3)$ - симметричном пределе

$SU(3)$-симметрия сильных взаимодействий позволяет предсказывать соотношения для различных физических величин адронов. Один из наиболее ярких примеров - магнитные моменты октета барионов. Как и в случае массовых формул для октета барионов начнем с кваркового уровня - с электромагнитного тока кварков. В $SU(3)$-симметричном пределе кварки в электромагнитном токе отличаются друг от друга только значениями электрических зарядов

$$\begin{array}{l} j_\mu = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s = \\ = \bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}(\bar{u}\gamma_\mu u + \bar{d}\gamma_\mu d + \bar{s}\gamma_\mu s) \end{array}$$

или

$$j_\mu = J^1_{\mu 1} - \frac{1}{3}(J^\alpha_{\mu\alpha}).$$

Переходя к адронам, мы будем писать электромагнитный ток на уровне адронов, который обладает теми же свойствами относительно $SU(3)$-преобразований, что и кварковый ток. В частности для октета барионов со спином $1/2$, описываемого матрицей

$$B^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma_0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

электромагнитный ток может быть представлен в виде двух флейверных ($SU(3)$) структур

$$\begin{array}{l} < j_\mu >_B = \bar{B}^\alpha{}_1 \Gamma_\mu B^1{}_\alpha - \frac{1}{3}\bar{B}^\alpha{}_\beta \Gamma_\mu B^\beta{}_\alpha + \\ \qquad + \bar{B}^1{}_\beta \Gamma'_\mu B^\beta{}_1 - \frac{1}{3}\bar{B}^\alpha{}_\beta \Gamma'_\mu B^\beta{}_\alpha, \end{array}$$

где каждая из величин $\Gamma_\mu$ и $\Gamma'_\mu$ описывается электрическими и магнитными формфакторами

$$\begin{array}{l} \Gamma_\mu = \gamma_\mu f_1(q^2) + \sigma_{\mu\nu} q^\nu f_2(q^2) \\ \Gamma'_\mu = \gamma_\mu f'_1(q^2) + \sigma_{\mu\nu} q^\nu f'_2(q^2). \end{array}$$

Здесь $q$- 4-х импульс, переданный бариону. Электрические и магнитные формфакторы всех частиц октета являются определенными комбинациями двух введенных электрических ($f_1(q^2)$ и $f'_1(q^2)$ ) и магнитных ($f_2(q^2)$ и $f'_2(q^2)$ ) формфакторов. Вместе с ними такими же определенными комбинациями величин $Q$,$Q'$ и $\mu$,$\mu'$, где

$$\begin{array}{ll} Q = f_1(0) & Q' = f'_1(0) \\ \mu_A = f_2(0) & \mu'_A = f'_2(0) \\ \mu = \frac{Q}{2m} + \mu_A & \mu' = \frac{Q'}{2m} + \mu'_A, \end{array}$$

являются электрические заряды и магнитные моменты частиц октета барионов. Таким образом, магнитные моменты барионов могут быть выражены через два независимых магнитных момента, скажем, магнитный момент протона и нейтрона. Получаем следующую таблицу

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mu_p$ | $\mu - \frac{1}{3}(\mu + \mu')$ | input | 2.79 |
| $\mu_n$ | $-\frac{1}{3}(\mu + \mu')$ | input | -1.91 |
| $\mu_{\Sigma^+}$ | $\mu - \frac{1}{3}(\mu + \mu') = \mu_p$ | 2.79 | 2.42 |
| $\mu_{\Sigma^0}$ | $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(\mu + \mu') = -\frac{1}{2}\mu_n$ | 0.96 | — |
| $\mu_{\Sigma^-}$ | $\mu' - \frac{1}{3}(\mu + \mu') = -(\mu_p + \mu_n)$ | -0.88 | -1.16 |
| $\mu_{\Xi^-}$ | $\mu' - \frac{1}{3}(\mu + \mu') = -(\mu_p + \mu_n)$ | -0.88 | -0.68 |
| $\mu_{\Xi^0}$ | $-\frac{1}{3}(\mu + \mu') = \mu_n$ | -1.91 | -1.25 |
| $\mu_\Lambda$ | $(\frac{1}{6} - \frac{1}{3})(\mu + \mu') = \frac{1}{2}\mu_n$ | -0.96 | -0.61 |
| $\mu_{\Sigma\Lambda}$ | $(\frac{1}{\sqrt{12}}(\mu + \mu') = -\frac{3}{\sqrt{12}}\mu_n$ | 1.65 | 1.61 |

(все величины указаны в единицах $\frac{1}{2m}$, где $m$-масса нуклона)

Расхождения между $SU(3)$-предсказаниями (левая числовая колонка) и экспериментальными данными (правая числовая колонка) довольно значительные. Это означает, что $SU(3)$-симметрия в магнитных моментах барионов нарушена. Поучительно найти взаимосвязи между магнитными моментами частиц октета барионов другим способом, который позволит учесть эффекты нарушения $SU(3)$-симметрии, с одной стороны, и свяжет магнитные моменты протона и нейтрона - с другой (до сих пор магнитные моменты протона и нейтрона не были связаны). Для этого потребуется предположение об аддитивности магнитных моментов кварков в магнитном моменте бариона.

## 8.2 Магнитные моменты барионов в аддитивной кварковой модели

Магнитный момент частицы со спином 1/2 (как вектор и оператор) есть

$$\boldsymbol{\mu} = \mu\boldsymbol{\sigma},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ - матрицы Паули, действующие на спиновые переменные частицы. Предполагая, что барионы состоят из трех кварков и что магнитные моменты кварков аддитивно складываются в магнитном моменте бариона, для последнего имеем

$$\boldsymbol{\mu} = \Sigma_i \mu_i \boldsymbol{\sigma}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}_i$ действуют на спиновые переменные кварков, входящих в состав бариона. Магнитный момент бариона $\mu$ есть, по определению, матричный элемент $z$-компоненты оператора магнитного момента по состоянию бариона с проекцией спина на ось $z$, равной 1/2

$$\mu =< s_z = 1/2|\mu_z|s_z = 1/2 > .$$

Для вычисления магнитных моментов нам понадобятся волновые функции барионов, найденные в лекции 5. Начнем с протона

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{u}\dot{u}\d{d} - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}(\dot{u}\d{u} + \d{u}\dot{u})\dot{d} \quad .$$

Мы используем волновую функцию без явной симметризации по третьему кварку (такая симметризация не меняет результат). Вычисляя матричный элемент от оператора магнитного момента, получаем

$$\mu_p = \frac{2}{3}(\mu_u + \mu_u - \mu_d) + \frac{2}{6}(\mu_u - \mu_u + \mu_d) = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d).$$

Для шести других частиц октета ответ выписывается моментально, глядя на ответ для магнитного момента протона

$$\mu_n = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u) \qquad \mu_{\Sigma^+} = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_s)$$

$$\mu_{\Sigma^-} = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_s) \qquad \mu_{\Xi^-} = \frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_d)$$

$$\mu_{\Xi^0} = \frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_u) \qquad\qquad \mu_{\Sigma^0} = \frac{1}{3}(2(\mu_u + \mu_d) - \mu_s)$$

Отдельного рассмотрения требует $\Lambda$-гиперон. Его волновая функция (без симметризации по перестановкам кварков, которая не меняет результат) имеет вид

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{u}\underset{\cdot}{\mathrm{d}} - \underset{\cdot}{\mathrm{u}}\dot{d})\dot{s} \quad .$$

Соответственно магнитный момент $\Lambda$-гиперона равен

$$\mu_\Lambda = \frac{1}{2}(\mu_u - \mu_d + \mu_s - \mu_u + \mu_d + \mu_s) = \mu_s \quad .$$

Также отдельного рассмотрения требует переходной матричный элемент оператора магнитного момента $\mu_{\Sigma\Lambda}$, который имеет отношение к радиационному $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$ распаду (см. задачу). Для этого дополнительно выпишем волновую функцию $\Sigma^0$-гиперона

$$\dot{\Sigma}^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{u}\dot{d}\underset{\cdot}{\mathrm{s}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}(\dot{u}\underset{\cdot}{\mathrm{d}} + \underset{\cdot}{\mathrm{u}}\dot{d})\dot{s}$$

и получим

$$\mu_{\Sigma\Lambda} = -\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}(\mu_u - \mu_d + \mu_s + \mu_u - \mu_d - \mu_s) = -\sqrt{\frac{1}{3}}(\mu_u - \mu_d) \quad .$$

Магнитные моменты кварков $\mu_u, \mu_d, \mu_s$ можно рассматривать как параметры и определить их, например, по магнитным моментам протона, нейтрона и $\Lambda$-гиперона $\mu_p, \mu_n, \mu_\Lambda$

$$\mu_u = \frac{4\mu_p + \mu_n}{5} = 1.85 \qquad \mu_d = \frac{4\mu_n + \mu_p}{5} = -0.97 \qquad \mu_s = \mu_\Lambda = -0.61 \quad .$$

Если бы $SU(3)$-симметрия была точной, то магнитные моменты кварков были бы пропорциональны их зарядам

$$\mu_u : \mu_d : \mu_s = \frac{2}{3} : -\frac{1}{3} : -\frac{1}{3} = 2 : -1 : -1 \quad .$$

По числам видно, что соотношение $\mu_u : \mu_d = 2 : -1$ выполняется хорошо $1.85 : -0.97 \approx 2 : -1$, т.е. $SU(2)$-симметрия - хорошая симметрия, но соотношение $\mu_d : \mu_s = -1 : -1$ нарушено значительно $-0.97 : -0.61 \neq -1 : -1$.

Если $\mu_u : \mu_d = 2 : -1$ ($SU(2)$-симметрия), то $\mu_p : \mu_n = 3 : -2$, что близко к экспериментальному отношению $\mu_p : \mu_n = 2.79 : -1.91$. Так аддитивная кварковая модель связывает магнитные моменты протона и нейтрона.

Сравним, наконец, предсказания, основанные на $SU(3)$-симметрии, аддитивной модели и экспериментальные данные

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mu_p$ | input | input | 2.79 |
| $\mu_n$ | input | input | -1.91 |
| $\mu_{\Sigma^+}$ | 2.79 | 2.67 | 2.42 |
| $\mu_{\Sigma^-}$ | -0.88 | -1.09 | -1.16 |
| $\mu_{\Xi^-}$ | -0.88 | -0.49 | -0.68 |
| $\mu_{\Xi^0}$ | -1.91 | -1.43 | -1.25 |
| $\mu_\Lambda$ | -0.96 | input | -0.61 |
| $\mu_{\Sigma\Lambda}$ | 1.65 | 1.63 | 1.61 |

Видно, что согласие улучшается, но расхождения остаются. Отметим, что гипотеза аддитивности естественна, но не безусловна. Глюонные поправки на взаимодействие кварков, например, дают неаддитивные вклады. Эти вклады улучшают согласие с экспериментом.

## 8.3 Задача

Вычислить ширину распада $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$ через переходной матричный элемент $\mu_{\Sigma\Lambda}$ и найти таким образом экспериментальное значение для последнего.

# 9 Лекция 9. Киральная симметрия и массы кварков

Настоящая лекция замыкает круг лекций, посвященных кварковой структуре адронов, состоящих из легких кварков. Мы начинали с того, что ввели массы $u, d, s$-кварков $(4, 7, 150 MeV)$ и сказали, что их различие мало по сравнению с характерным адронным масштабом $1 GeV$. Отсюда проистекали изотопическая $(SU(2))$ и унитарная $(SU(3))$ симметрии сильных взаимодействий. Мы учитывали нарушение $SU(3)$-симметрии, связанное с утяжелением странного кварка по сравнению с нестранными. Сейчас пришло время сказать, откуда берутся употребляемые нами на протяжении всего этого времени массы кварков. Для этого мы рассмотрим так называемую киральную сильных взаимодействий, отвечающую предельному случаю безмассовых кварков. Мы имеем все основания ожидать, что получаемая киральная симметрия должна выполняться не хуже, чем $SU(3)$-симметрия, основанная на пренебрежении разностью масс странного и нестранных кварков. Анализируя нарушение киральной симметрии, мы и найдем массы кварков.

## 9.1 Левые и правые кварки

Если массы кварков устремить к нулю, происходят две замечательные вещи: лагранжиан сильных взаимодействий становится инвариантным относительно $SU(3)$-преобразований по отдельности левых и правых (с точки зрения киральности) кварковых полей; левые и правые (с точки зрения киральности) кварковые поля взаимооднозначно отвечают левым и правым (с точки зрения спиральности) состояниям безмассовых кварков. Симметрия, при которой левые и правые поля кварков преобразуются независимо, называется киральной. В нашем случае это киральная $SU(3)_L \times SU(3)_R$-симметрия. Наличие $SU(3)_L \times SU(3)_R$-симметрии означает, что отдельно сохраняются токи левых и правых частиц

$$j^a_{\mu L} = \bar{q}_L \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q_L \qquad j^a_{\mu R} = \bar{q}_R \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q_R,$$

где $q_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) q$. Сохранение тока, являющегося суммой левых и правых токов (векторный ток), отвечает $SU(3)$-симметрии, рассмотенной нами выше. Сохранение тока, являющегося разностью левых и правых токов (аксиальный ток), отвечает аксиальной $SU(3)$-симметрии

$$j^a_{\mu V} = \bar{q}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q \qquad j^a_{\mu A} = \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q.$$

Векторному и аксиальному токам $j^a_{\mu V}, j^a_{\mu A}$ соответствуют сохраняющиеся заряды $Q^a, Q^a_A$. Заряды $Q^a$- это заряды, которые являются генераторами $SU(3)$-симметрии, введенной ранее. В пределе безмассовых кварков симметрия увеличилась, появились сохраняющиеся аксиальные заряды $Q^a_A$.

## 9.2 Нелинейная реализация киральной симметрии

Рассмотрим матричные элементы сохраняющихся векторных и аксиальных токов.
Пусть векторный ток будет, например, электромагнитным током

$$j^{em}_\mu = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s = \bar{q}\gamma_\mu \frac{\lambda^{em}}{2} q,$$

где $\frac{\lambda^{em}}{2} = \frac{\lambda^3}{2} + \frac{\lambda^8}{2\sqrt{3}}$, а состояние - протоном. В пределе нулевой передачи импульса $q \to 0$ для матричного элемента электромагнитного тока по состоянию протона имеем

$$< p(k_2)|j^{em}_\mu|p(k_1) >= \bar{\Psi}_2\gamma_\mu\Psi_1 \quad .$$

Сохранение тока означает, что

$$(k_{2\mu} - k_{1\mu})\bar{\Psi}_2\gamma_\mu\Psi_1 = 0 \quad .$$

Это равенство выполняется в силу уравнения Дирака для поля протона.
Рассмотрим теперь аксиальный ток, отвечающий $\beta$-распаду протона

$$\gamma_\mu \to \gamma_\mu\gamma_5 \qquad \lambda^{em} \to \tau^+.$$

Если мы (по аналогии с векторным током) предположим, что матричный элемент между состояниями нейтрона и протона от аксиального тока в пределе нулевой передачи импульса равен

$$< p(k_2)|j^+_{\mu A}|n(k_1) >= g_A\bar{\Psi}_2\gamma_\mu\gamma_5\Psi_1 \quad ,$$

то сохранение этого тока

$$(k_{2\mu} - k_{1\mu})\bar{\Psi}_2\gamma_\mu\gamma_5\Psi_1 = g_A 2m_p\bar{\Psi}_2\gamma_5\Psi_1 = 0$$

требует зануления массы протона $m_p = 0$, что при экспериментальном значении массы протона порядка $1GeV$ означало бы, что киральная симметрия сильно нарушена.

Мы предположим, что матричный элемент между состояниями нейтрона и протона от аксиального тока в пределе нулевой передачи импульса равен

$$< p(k_2)|j^+_{\mu A}|n(k_1) >= g_A\bar{\Psi}_2\gamma_\nu\gamma_5\Psi_1(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) \quad ,$$

т.е. сохраняется автоматически. При $q^2 = 0$ в этом матричном элементе имеется полюс, который отвечает тому, что нейтрон излучает безмассовую псевдоскалярную частицу ($\pi^-$), превращается в протон, а $\pi^-$ аннигилируется аксиальным током.

Каждому из восьми сохраняющихся аксиальных токов отвечает свой безмассовый псевдоскалярный мезон. Ситуация, когда массы псевдоскалярных мезонов обращаются в ноль в киральном пределе нулевых масс кварков, кажется физически более интересной, т.к. на опыте все восемь псевдоскалярных мезонов существенно легче остальных адронов. Особенно это справедливо в отношении $\pi$-мезонов. Таким образом киральную симметрию можно реализовать, сделав безмассовыми только октет псевдоскалярных мезонов.

Векторные заряды $Q^a$, действуя на частицы из октета барионов, например, переводят их друг в друга. Аксиальный заряд $Q^3_A$, действуя, скажем, на протон, переводит его в состояние с тем же спином, изоспином, зарядом, гиперзарядом, но с противоположной четностью. Такого состояния в октете барионов нет, это двухчастичное состояние "$\pi+$ нуклон". При этом $\pi$-мезон имеет нулевую энергию, так что состояния "нуклон" и "$\pi+$ нуклон" вырождены, как и должно быть, если имеется симметрия. Такая реализация симметрии называется нелинейной.

## 9.3 Частичное сохранение аксиальных токов и массы кварков

Зануление масс псевдоскалярных мезонов в пределе нулевых масс кварков можно увидеть, рассматривая матричные элементы аксиальных токов между соответствующими псевдоскалярными мезонами и вакуумом.

Например, для $\pi^+$-мезона матричный элемент

$$< 0|\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 d|\pi^+ >= f_\pi p_\mu^{\pi^+}$$

входит в амплитуду слабого распада $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$. Вычисляя дивергенцию аксиального тока, получаем

$$< 0|(m_u + m_d)\bar{u}\gamma_5 d|\pi^+ >= f_\pi m_\pi^2,$$

откуда видно, что масса $\pi$-мезона зануляется при занулении масс кварков $m_{u,d} \to 0$. Аналогично

$$< 0|(m_u + m_s)\bar{u}\gamma_5 s|K^+ >= f_K m_K^2 \quad .$$

Считая, что $< 0|\bar{u}\gamma_5 d|\pi^+ >\approx< 0|\bar{u}\gamma_5 s|K^+ >$ и $f_\pi \approx f_K$ ($f_K = 1.25 f_\pi$ экспериментально), для масс кварков получаем соотношение

$$\frac{m_u + m_d}{m_u + m_s} \approx \frac{m_\pi^2}{m_K^2} \approx \frac{1}{13} \quad .$$

Если принять, что $m_s \approx 150 MeV$ (характерные разности масс в декуплете барионов), то

$$m_u + m_d \approx 11 MeV \quad .$$

Нам нужно еще оценить $m_u$ и $m_d$ по отдельности. До сих пор мы игнорировали электромагнитное взаимодействие, которое может, в частности, давать поправки к массам частиц. Величина этих поправок сравнима с массами $u, d$-кварков. Поэтому наше желание найти массы кварков по отдельности наталкивается на необходимость учета электромагнитных поправок. Сделать сколь-нибудь строго последнее мы не можем, поэтому ограничимся следующей спекуляцией. В духе полученных выше соотношений между квадратами масс псевдоскалярных мезонов и массами кварков напишем формулы, учитывающие также отличие заряженных частиц от нейтральных

$$\begin{aligned}
&m_{\pi^+}^2 \sim m_u + m_d + \gamma \\
&m_{\pi^0}^2 \sim m_u + m_d \\
&m_{K^+}^2 \sim m_u + m_s + \gamma \\
&m_{K^0}^2 \sim m_d + m_s
\end{aligned}$$

В разностях неизвестную электромагнитную поправку $\gamma$ можно сократить, получив соотношение

$$\frac{m_d - m_u}{m_d + m_u} = \frac{(m^2_{\pi^+} - m^2_{\pi^0}) - (m^2_{K^+} - m^2_{K^0})}{m^2_{\pi^0}} \approx 0.29 \quad .$$

Так как $m_u + m_d \approx 11 MeV$, то $m_u \approx 4 MeV$ и $m_d \approx 7 MeV$.
Мы видим, что $m_d - m_u \sim m_d \sim m_u$, поэтому киральная $SU(2)_L \times SU(2)_R$-симметрия такая же хорошая, как обычная изотопическая $SU(2)$-симметрия и, во всяком случае, должна выполняться лучше, чем $SU(3)$-симметрия.

## 9.4 Задача 9

Найти формулу, связывающую отношение $\frac{m^2_{\pi^0}}{m^2_{\eta_8}}$ с отношением масс кварков и проверить ее выполнение для масс кварков, полученных на лекции.