UNSOLVABLE PROBLEMS OF CONSTRUCTION

V. A. GEYLER

The article deals with geometric construction problems which are unsolvable with the aid of a straightedge and a compass. As an example the problem of division by a plane into commensurate parts of a solid sphere (the Archimedes problem) and analogous problem for a circle are considered. The relation of these problems to the theory of algebraically squarable ovals is discussed.

Рассказано о геометрических задачах на построение, неразрешимых с помощью циркуля и линейки. В качестве примера рассмотрены задача о сечении шара на соизмеримые части плоскостью (задача Архимеда) и аналогичная задача для круга. Обсуждается связь этих задач с теорией алгебраически квадрируемых овалов.

НЕРАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

В. А. ГЕЙЛЕР

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск

В школе Пифагора впервые зародилась мысль о том, что цель науки – выявление количественных закономерностей окружающего нас мира. При этом пифагорейцы первыми обратили внимание на то, что в основе явлений совершенно разной природы могут лежать одни и те же числовые зависимости. Свою программу математизации науки они довели до крайности, выдвинув тезис: “Все есть число”. Следует напомнить, что числами Пифагор и его ученики называли лишь натуральные числа, следующие за единицей, а основные законы природы пытались описывать отношениями чисел. Говоря более современным языком, пифагорейцы стремились выразить законы природы с помощью функций, аргументы и значения которых – рациональные числа. На этом пути они натолкнулись на первую в истории математики неразрешимую проблему – выразить отношением целых чисел отношение длин диагонали квадрата и его стороны. Сейчас доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$, другими словами, доказательство соотношения

$$\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{Q}$ – поле рациональных чисел, известно любому старшекласснику, но 2500 лет тому назад оно произвело настолько потрясающее впечатление, что привело к полной перестройке взглядов античных ученых на математику. С тех пор теория величин строилась чисто геометрическими методами, и это почти на полторы тысячи лет задержало развитие алгебры. Вместо привычных нам операций с вещественными числами античные математики использовали действия с отрезками, производимые с помощью геометрических построений.

Эстетические требования (которые играют немаловажную роль и сегодня), представления древних эллинов о совершенстве геометрических фигур привели математиков к использованию в построениях только линейки и циркуля. Тем самым считалось, что свойства всех фигур должны сводиться к свойствам наиболее совершенных из них: прямой и окружности. Однако и на пути геометризации науки вновь встретились неразрешимые задачи, наиболее известные из которых – удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга [1]. С современной точки зрения неразрешимость каждой из этих задач выражается соотношением, аналогичным соотношению (1), а именно соотношением $a \notin P$, где a – некоторое комплексное число, а P – подходящее числовое поле, но теперь для доказательства такого соотношения приходится привлекать тонкие методы алгебры и анализа, разработанные только в XIX веке. Предварительно задача на построение переводится на алгебраический язык. Напомним, как это делается.

В каждой (планиметрической) задаче на построение дан некоторый набор элементарных фигур плоскости, составленных из конечного числа точек, прямых, лучей, отрезков, окружностей и дуг. Требуется построить, проводя прямые и окружности, другой набор элементарных фигур, удовлетворяющих требованию задачи. Конечный набор элементарных фигур всегда, очевидно, можно заменить конечным набором M точек плоскости (например, прямую – двумя произвольными ее точками, отрезок – его концами и т.д.). При этом решение задачи на построение можно формализовать рекурсивным определением выражения “точку A можно построить исходя из набора M”. В следующем определении набор M остается фиксированным, и выражение “исходя из набора M” в формулировке определения опускаем.

Определение 1.

1. Если точка A принадлежит M, то точку A можно построить.
2. Если точки A и B можно построить, то прямую AB можно построить.
3. Если точки O и A можно построить, то можно построить окружность с центром в точке O радиуса OA.
4. Если можно построить пересекающиеся прямые l и m, то можно построить их точку пересечения.
5. Если можно построить прямую l и окружность O, имеющие общие точки, то можно построить любую их общую точку.
6. Если можно построить окружности O и O', имеющие общие точки, то можно построить любую их общую точку.
7. Никакие другие точки нельзя построить.

Теперь решение задачи на построение сводится к доказательству того, что за конечное число шагов можно построить точки, некоторый набор которых удовлетворяет требованию задачи.

Заметим, что при решении задач на построение разрешается, кроме того, выбирать произвольные точки на данных или построенных фигурах. На самом деле, если число данных точек не меньше двух, то выбор произвольной точки можно свести к ее построению в соответствии с пунктами 1–6. Далее мы всегда будем считать, что среди данных задачи содержатся по крайней мере две точки. Для алгебраизации задачи на построение нам потребуется понятие числового поля.

Определение 2. Совокупность P комплексных чисел, содержащая 0 и 1, называется (*числовым*) *полем*, если результаты операций сложения, вычитания, умножения и деления над числами из P не выводят за пределы P. Поскольку пересечение любого набора полей снова является полем, то для любого числового множества M существует наименьшее содержащее его поле. Пусть P – некоторое поле, α – такое комплексное число, что $\alpha^2 \in P$. Наименьшее поле, содержащее P, α и комплексно-сопряженное число $\bar{\alpha}$, называется *простым пифагоровым расширением поля* P и обозначается $P(\alpha)$. Пусть теперь $P = P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n$ – цепочка полей, в которой каждое поле начиная с P_2 – простое пифагорово расширение предыдущего. Тогда поле P_n называется *пифагоровым расширением поля* P, а его элементы – *пифагоровыми числами над* P. Пифагоровы числа над полем $\mathbf{Q}$ будем называть просто *пифагоровыми*. Множество всех пифагоровых чисел над P, в свою очередь, образует поле, которое мы обозначим $\Pi(P)$.

Сейчас с каждой задачей на построение мы свяжем некоторое поле, называемое полем этой задачи [2]. Как сказано выше, мы считаем, что данные задачи – это конечный набор M точек плоскости, содержащий по крайней мере две точки O и E. Построим прямую l, перпендикулярную OE и проходящую через точку O, и отложим на l отрезок OI, равный OE. Тем самым мы задаем прямоугольную декартову систему координат с осью абсцисс OE, осью ординат OI и масштабным отрезком OE. Эта система координат задает структуру комплексной плоскости, в которой отрезок OE изображает число 1, а отрезок OI – мнимую единицу i. Теперь каждую точку множества M можно рассматривать как комплексное число. Обозначим через $\overline{M}$ множество всех чисел, комплексно-сопряженных к числам из M. Наименьшее подполе поля комплексных чисел $\mathbf{C}$, содержащее $M \cup \overline{M}$, и будем называть полем данной задачи (и обозначать P_M). Вспоминая теперь построение суммы, разности и среднего пропорционального двух отрезков, а также четвертого пропорционального к трем отрезкам, приходим к следующей теореме, связывающей геометрическое понятие точки, которую можно построить исходя из набора M, и алгебраическое понятие пифагорова числа над полем P_M.

Теорема 1. *Для того чтобы точку A можно было построить исходя из набора M, необходимо и достаточно, чтобы изображающее ее комплексное число принадлежало некоторому пифагорову расширению поля* P_M.

Несложное, но достаточно громоздкое доказательство этой теоремы можно найти, например, в [2]. Теперь ясно, что неразрешимость задачи на построение с конечным набором данных точек M можно выразить соотношением $a \notin \Pi(P_M)$, где a – комплексное число, изображающее некоторую точку, которую требуется построить.

В качестве примера рассмотрим вначале хорошо известную задачу о трисекции угла.

Задача 1. Дан угол α, требуется построить угол $\frac{1}{3}\alpha$.

Пусть одна из сторон угла совпадает с положительной вещественной полуосью, тогда множество

M можно считать состоящим из трех комплексных чисел: $M = \{0, 1, z\}$, где z лежит на второй стороне угла и $|z| = 1$. Поле задачи P_M совпадает с полем $\mathbf{Q}(i, z)$ – расширением поля $\mathbf{Q}$ с помощью чисел i и z. Пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$; если угол $\alpha/3$ можно построить, то, очевидно, можно построить и точку, изображающую число $\cos(\alpha/3)$. Из теорем сложения для тригонометрических функций получаем соотношение $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$, откуда следует, что $\cos(\alpha/3)$ удовлетворяет кубическому уравнению

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

В исследованиях уравнений вида (2) важную роль играет следующая теорема Гаусса.

Теорема 2. *Пусть многочлен $f(x)$ с коэффициентами из поля P неприводим над этим полем (то есть не разлагается в произведение многочленов ненулевой степени с коэффициентами из поля P). Если $f(x)$ имеет корень в поле $\Pi(P)$, то степень многочлена $f(x)$ имеет вид 2^k, $k = 0, 1, \ldots$*

Теперь нетрудно доказать, что задача о трисекции угла, вообще говоря, неразрешима циркулем и линейкой. Достаточно показать, что она неразрешима для угла $\alpha = 60°$. В этом случае $P_M = \mathbf{Q}(i, \sqrt{3})$, поэтому $\Pi(P_M) = \Pi(\mathbf{Q})$, а уравнение (2) приобретает вид $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Если задача о трисекции угла $\alpha = 60°$ разрешима, то это уравнение имеет решение в поле $\Pi(\mathbf{Q})$, поэтому по теореме Гаусса полином $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ приводим над полем рациональных чисел. Так как один из множителей в его разложении $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ на полиномы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеет первую степень, то $f(x)$ имеет рациональный корень $x = p/q$, где p и q – взаимно простые целые числа, и $q > 0$. Подставляя p/q в наше уравнение, получим $8p^3 - 6pq^2 = q^3$. Тем самым q^3 делится на p, поэтому $p = \pm 1$, и мы получаем

$$q^3 \pm 6q^2 \mp 8 = 0. \qquad (3)$$

По теореме Виета q должно делить число 8. Легко убедиться, что среди делителей восьмерки нет корней уравнения (3), и мы пришли к противоречию.

Невозможность трисекции угла в 60° вытекает также из теоремы Гаусса о построении правильных многоугольников [2].

Теорема 3. *Правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда разложение n на простые множители имеет вид $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_l$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ – попарно различные простые числа вида $2^{2^k} + 1$.*

Если бы угол в 20° можно было построить циркулем и линейкой, то теми же средствами можно было бы построить правильный 18-угольник, что по теореме Гаусса невозможно.

Рассмотрим теперь задачу Архимеда о сечении шара, анализ которой можно провести теми же средствами, что и задачи о трисекции угла.

Задача 2. Построить плоскость, которая рассекает данный шар на сегменты с данным отношением объемов $m : n$ (m и n – натуральные числа).

Эта задача сводится к построению по отрезку, равному радиусу данного шара, нового отрезка, равного высоте искомого сегмента. Считая радиус шара единицей и обозначая высоту искомого сегмента через x, приходим к уравнению

$$\frac{\pi x^2(1 - x/3)}{\pi(2 - x)^2\left(1 - \dfrac{2 - x}{3}\right)} = \frac{m}{n}.$$

Полагая $m/(m + n) = a$, получаем уравнение

$$x^3 - 3x^2 + 4a = 0, \qquad (4)$$

в котором a – рациональное число, лежащее между 0 и 1. В рассматриваемом случае P_M есть поле рациональных чисел. Покажем, что, например, при $a = \frac{1}{4}$ задача 2 неразрешима циркулем и линейкой. Действительно, слегка модифицируя рассуждения, приведенные при анализе задачи 1, получаем, что уравнение (4) не имеет пифагоровых корней. Тем самым задача об отсечении от шара сегмента, объем которого составляет треть объема шара, неразрешима циркулем и линейкой. Важно отметить, что кроме тривиального случая $m : n = 1$ рассматриваемая задача имеет решения и в других случаях, причем, очевидно, число таких случаев бесконечно.

Интересно, что аналогичная задача для круга не имеет нетривиальных решений, однако исследование этой задачи требует уже другой техники [3]. Вначале напомним, что комплексное число a называется *алгебраическим*, если оно является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами, и *трансцендентным* в противном случае. Известно, что множество всех алгебраических чисел образует поле, при этом очевидно, что каждое пифагорово число алгебраическое. Справедлива следующая теорема Линдемана [4].

Теорема 4. *Если $a \neq 0$ – алгебраическое число, то число e^a трансцендентное.*

Задача 3. Построить прямую, которая рассекает данный круг на сегменты с данным отношением площадей $m : n$ (m и n – натуральные числа).

Покажем, что эта задача неразрешима во всех случаях, кроме тривиального $m : n = 1$. Пусть α – угол, стягивающий дугу одного из требуемых сегментов. Тогда

$$\frac{\alpha - \sin\alpha}{2\pi - \alpha + \sin\alpha} = \frac{m}{n}$$

или

$$(m + n)\alpha - 2\pi m = (m + n)\sin\alpha. \qquad (5)$$

Считая данную окружность единичной окружностью комплексной плоскости, можно положить $M = \{0, 1\}$, поэтому $P_M = \mathbf{Q}$. Если рассматриваемая задача разрешима, то число $\sin\alpha$ пифагорово, а потому алгебраическое. Если, кроме того, $m \neq n$, то $\sin\alpha \neq 0$ и по теореме Линдемана число $e^{i((m+n)\alpha-2\pi m)} = e^{i(m+n)\alpha}$ трансцендентное. Тем самым число $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ тоже трансцендентное. Так как числа $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ алгебраические или трансцендентные одновременно, то число $\sin\alpha$ трансцендентно и мы пришли к противоречию. Таким образом, наша задача разрешима циркулем и линейкой в единственном случае $m = n$.

Будем называть плоскую фигуру конструктивно квадрируемой, если с помощью циркуля и линейки можно построить квадрат, площадь которого совпадает с площадью данной фигуры. Аналогично плоскую линию будем считать конструктивно спрямляемой, если с помощью циркуля и линейки можно построить отрезок, длина которого совпадает с длиной данной линии.

Следующая теорема также является легким следствием теоремы Линдемана.

Теорема 5. *С помощью циркуля и линейки нельзя построить*:

а) *конструктивно квадрируемый сегмент круга*,

б) *конструктивно квадрируемый сектор круга*,

в) *конструктивно спрямляемую дугу окружности.*

Приведем, например, доказательство для случая дуги. Допустим противное, то есть допустим, что конструктивно спрямляемая дуга построена с помощью циркуля и линейки. Не умаляя общности, можно считать, что эта дуга лежит на единичной окружности комплексной плоскости. Пусть α – угол, стягивающий дугу, тогда α – пифагорово число. По теореме Линдемана число $e^{i\alpha}$ трансцендентное, поэтому трансцендентно и число $\sin(\alpha/2)$. Однако отрезок длиной $\sin(\alpha/2)$ можно построить циркулем и линейкой вместе с дугой α, и мы пришли к противоречию.

На самом деле проведенное рассуждение показывает, что имеет место несколько более общее утверждение.

Теорема 6. *Пусть на плоскости дана окружность единичного радиуса. Тогда с помощью циркуля и линейки нельзя построить*:

а) *сегмент, площадь которого есть алгебраическое число*;

б) *сектор, площадь которого есть алгебраическое число*;

в) *дугу, длина которой есть алгебраическое число.*

Рассмотренные только что результаты связаны с одной теоремой Ньютона, внимание на которую обратил В.И. Арнольд [5, 6]. Напомним, что плоская кривая называется алгебраической, если в некоторой декартовой системе координат она задается уравнением $F(x, y) = 0$, где F – многочлен с вещественными коэффициентами. Замкнутую выпуклую алгебраическую кривую будем называть *овалом.* Овал называется *алгебраически квадрируемым*, если существует такой многочлен Q, что площадь S, отсекаемая от овала прямой с уравнением $ax + by + c = 0$, удовлетворяет уравнению $Q(S; a, b, c) = 0$. Теперь приведем формулировку теоремы Ньютона.

Теорема 7. *Гладкий овал* (*то есть овал без особых точек*) *алгебраически неквадрируем.*

Эту теорему интересно сравнить с теоремой 6. Пусть рассматриваемый овал – единичная окружность с центром в начале координат. Из теоремы 6 вытекает, что если $Q(u; x, y, z)$ – многочлен, коэффициенты которого суть алгебраические числа, то для любых рациональных (или даже пифагоровых) чисел соотношение $Q(S; a, b, c) = 0$ возможно лишь в случае, когда многочлен $Q(u; a, b, c)$ тождественно равен нулю. Теорема Ньютона обобщена на случай алгебраических гиперповерхностей в четномерном пространстве В.А. Васильевым (см. [6]). На нечетномерные пространства, как показывает решение задачи Архимеда, теорема Ньютона не распространяется. Однако аналог п. а) теоремы 6 справедлив и в этом случае.

Рассмотренные в этом разделе утверждения о неразрешимости тех или иных задач на построение являются всего лишь легкими следствиями теоремы Линдемана. Эта теорема показывает, что поле алгебраических чисел слишком мало не только с точки зрения анализа (оно не допускает предельных переходов в фундаментальных последовательностях, то есть неполно как метрическое пространство), но и с точки зрения элементарной геометрии (оно не допускает числового выражения площадей и длин конструктивных элементарных фигур). Тем самым становится необходимым расширение поля алгебраических чисел до поля комплексных чисел **C**. Для решения некоторых вопросов современного естествознания поле **C** может оказаться также недостаточно широким (см., например, [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прасолов В.В.* Три классические задачи на построение. М.: Наука, 1992. 80 с.

2. *Манин И.Ю.* О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки // Энциклопедия элементарной математики. М.: Физматгиз, 1963. Т. 4: Геометрия. С. 205–227.

3. *Geyler V.A.* One More Construction Which is Impossible // Amer. Math. Mon. 1995. Vol. 102, № 7. P. 632–634.

4. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968. 564 с.

5. *Арнольд В.И.* Второй закон Кеплера и топология абелевых интегралов // Квант. 1987. № 12. С. 17–21.

6. *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989. 96 с.

7. *Сильвестров В.В.* Системы чисел // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 8. С. 121–127.

* * *

Владимир Аронович Гейлер, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева. Область научных интересов – функциональный анализ и математическая физика. Автор и соавтор около 80 научных статей.