DIVERGENT SERIES AS AN INSTRUMENT OF BASIC SCIENCE

V. G. SUSHKO

Some basic ideas of asymptotic theory and its applications to differential equations are given. The methods of this theory are very useful when mathematical models of physics, mechanics, chemistry and other sciences are investigated.

Изложены некоторые основные понятия асимптотической теории и ее приложений к дифференциальным уравнениям. Методы этой теории оказываются полезными при исследовании математических моделей физики, механики, химии и других наук.

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ КАК ИНСТРУМЕНТ ТОЧНОЙ НАУКИ

В. Г. СУШКО

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

При изучении какого-либо процесса или явления реального мира исследователь составляет математическую модель (например, уравнение), наиболее полно отражающую течение и интересующие его качественные особенности процесса. Любая математическая модель непременно включает в себя явно или неявно различные параметры, являющиеся количественной мерой влияния на процесс тех или иных факторов, причем в типичной ситуации их значения известны лишь приближенно с той или иной точностью. Следовательно, математическая модель является приближенной, неадекватной полностью тому процессу, который она описывает. Конечно, при составлении математической модели мы стремимся к тому, чтобы она отражала все наиболее существенные стороны процесса. Кроме того, математическая модель должна быть такой, чтобы наших знаний и опыта было достаточно для ее исследования, она должна давать возможность извлечь из нее известными методами и доступными средствами необходимую информацию о процессе. Поэтому ради упрощения модели некоторые факторы, количественная мера которых мала и воздействия которых на ход процесса представляются незначительными, приходится игнорировать, то есть приближенно считать количественную меру этих факторов равной нулю. Таким образом, при изучении какого-либо процесса с помощью математической модели мы с самого начала обречены на рассмотрение неточного, приближенного слепка этого процесса.

Естественно поставить вопрос о роли этих неучтенных факторов: будет ли их влияние на ход процесса на самом деле несущественным или вопреки нашим предположениям учет этих факторов может существенно изменить ту информацию о процессе, которую мы получаем при изучении математической модели. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно, вообще говоря, составить более сложную (расширенную) модель, учитывающую влияние тех малых факторов, которые в первоначальной (упрощенной) модели не были представлены, и затем исследовать вопрос о близости решений, получаемых из упрощенной и расширенной моделей. Заметим, что рецепт настолько же прост, насколько труден в его реализации.

Учет отмеченных факторов с малой количественной мерой приводит, как правило, к тому, что в уравнении, соответствующем расширенной модели, по сравнению с первоначальным уравнением появляются дополнительные члены с малыми множителями, которые и характеризуют малость этих факторов. Указанные малые множители называют малыми параметрами. Члены уравнения, содержащие в качестве сомножителей малые параметры, называются возмущениями, уравнение, не содержащее этих членов, – невозмущенным, а расширенное уравнение (расширенная модель) – возмущенным уравнением или уравнением с возмущением.

Возмущения, встречающиеся в различных задачах, условно можно разделить на два класса: регулярные возмущения и сингулярные возмущения. Если говорить об их качественном различии, не давая пока формального определения, то можно сказать так: под регулярным понимают такое возмущение, при котором решение невозмущенной задачи во всей области его определения мало отличается от решения возмущенной задачи (решения возмущенной и невозмущенной задач близки равномерно относительно независимых переменных). В отличие от регулярных возмущений сингулярные возмущения вызывают существенные изменения решения в некоторой части области изменения независимых переменных.

С возмущенными и невозмущенными задачами каждый из нас (как правило, не задумываясь об этом) сталкивается на каждом шагу. Переходя улицу, мы сопоставляем время, оставшееся до переключения светофора, с нашей скоростью и шириной проезжей части дороги (хотя каждую из этих величин мы представляем себе весьма приближенно) и неосознанно решаем математическую задачу прохождения заданного пути за определенный промежуток времени (решением задачи является вывод "успею" или "не успею"). Житейская практика показывает, что данная задача является регулярно возмущенной. Отметим, что параметрами в этой задаче являются погрешности, с которыми мы определяем время, скорость и ширину дороги. Точные значения этих параметров нам неизвестны, мы можем судить лишь о примерной величине промежутков изменения каждого из этих параметров. Отметим, что появление непредвиденных обстоятельств (неисправность светофора, скользкий участок перехода и т.п.) может превратить данную задачу в сингулярно возмущенную.

Математически можно следующим образом описать возмущенные и невозмущенные задачи. Пусть необходимо найти решение (точное или приближенное с заданной степенью точности) уравнения

$$\varepsilon L_1 u_\varepsilon + L_0 u_\varepsilon = \varepsilon f_1(t) + f_0(t). \qquad (1)$$

Здесь t – независимая переменная (которая может быть векторной), изменяющаяся в заданной области D; $u_\varepsilon(t)$ – искомая функция; с помощью символов L_0, L_1 обозначаются операции, которые осуществляются с функцией $u_\varepsilon(t)$; $f_0(t)$, $f_1(t)$ – известные функции; ε – малый параметр, который будем считать положительным. Математически понятие "малый положительный параметр" записывается с помощью соотношения $0 < \varepsilon \ll 1$. При этом считается, что параметр ε может принимать любые значения из промежутка $(0, \varepsilon_0]$, где ε_0 – некоторое фиксированное положительное число, которое можно выбрать настолько малым, насколько это необходимо. Данное уравнение является возмущенным. Соответствующее невозмущенное уравнение имеет вид

$$L_0 u_0 = f_0(t). \qquad (2)$$

Конечно, уравнение (2) является в большинстве случаев менее сложным, чем уравнение (1). Более того, уравнение (1) может оказаться настолько сложным, что получение его решения для нас невозможно. В связи с этим возникают три вопроса:

1) в каких точках области D имеет место соотношение $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = u_0(t)$;

2) существует ли такое число $\varepsilon_0 > 0$, при котором для любых значений параметра ε из промежутка $(0, \varepsilon_0]$ решение уравнения (1) близко (в том или ином смысле) к решению уравнения (2) во всех точках области D? Отметим, что решение уравнения (1) нам неизвестно, и поэтому получить ответ на данный вопрос, вообще говоря, совсем непросто;

3) если точность, с которой решение уравнения (1) приближается решением уравнения (2), недостаточна, то как получить приближенное решение уравнения (1) с требуемой точностью для всех значений параметра ε из промежутка $(0, \varepsilon_0]$?

Математическая теория, с помощью которой даются ответы на поставленные вопросы, называется асимптотической теорией (от греч. ἀσύμπτωτος – асимптота), а методы этой теории – асимптотическими методами.

ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Прежде чем говорить об основных чертах асимптотической теории, необходимо ввести простейшие определения.

Пусть функции $f(s)$ и $g(s)$ заданы на некотором множестве S, а s_0 – предельная точка этого множества. Говорят, что эти функции эквивалентны при $s \longrightarrow s_0$, если в некоторой окрестности точки s_0 (данная окрестность состоит из точек множества S и не содержит самой точки s_0) функция $g(s)$ не обращается в нуль и выполнено соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(s)}{g(s)} = 1.$$

Данное соотношение кратко записывается следующим образом:

$$f(s) \sim g(s), \qquad s \longrightarrow s_0, \qquad s \in S.$$

Если при сформулированных выше условиях имеет место соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(s)}{g(s)} = 0,$$

то данное соотношение кратко записывается в виде

$$f(s) = o(g(s)), \qquad s \longrightarrow s_0, \qquad s \in S$$

(читается: о малое от $g(s)$).

Наконец, если существуют постоянная M и окрестность Ω точки s_0, такие, что при $s \in \Omega$ выполнено неравенство

$$|f(s)| \le M|g(s)|,$$

то это свойство рассматриваемых функций может быть записано в виде

$$f(s) = O(g(s)), \qquad s \in \Omega$$

(читается: о большое от $g(s)$).

Примеры. D – числовая ось $|x| > 0$ с выколотым началом координат, $a = 0$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$. Тогда $\sin x \sim x$, $x \longrightarrow 0$.

При тех же условиях $\sin x = o(e^x)$, $x \longrightarrow 0$.

Если $a = 1$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, то $\sin x = O(\cos x)$, $x \longrightarrow 1$.

Данные обозначения введены в математический обиход немецким математиком Э. Ландау (1877–1938). Отметим особо, что из указанных соотношений (называемых отношениями порядка) первые два следует рассматривать только как предельные, получающиеся в процессе стремления переменной или параметра s к предельной точке множества S. Иногда, если из контекста ясно, о каком множестве S и какой предельной точке этого множества идет речь, запись “$s \longrightarrow s_0$, $s \in S$” опускают, хотя и постоянно имеют ее в виду.

Отношения порядка можно понимать как некоторые математические операции, действия с которыми подчиняются определенным правилам. В частности, основываясь на приведенных определениях, читатель легко может доказать справедливость соотношений

$$o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)),$$
$$O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)),$$
$$o(o(f(x))) = o(f(x)),$$
$$O(f(x))o(f(x)) = o(f^2(x));$$

нетрудно сформулировать и другие подобные соотношения. Следует особо обратить внимание на справедливость соотношений

$$o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x)),$$
$$O(f(x)) \pm O(f(x)) = O(f(x)).$$

Примеры.

1) $\ln x = o(x^\alpha)$, $x \longrightarrow \infty$, $\alpha > 0$;

2) $\ln x = o(x^{-\alpha})$, $x \longrightarrow 0$, $\alpha > 0$;

3) $\sin x = O(1)$, $-\infty < x < \infty$;

4) $e^x - 1 \sim x$, $x \longrightarrow 0$.

Основываясь на введенных понятиях об отношениях порядка, введем в рассмотрение так называемые асимптотические последовательности.

Пусть задана некоторая последовательность функций $\{\phi_k(s)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, определенная на множестве S. Пусть s_0 – некоторая предельная точка множества S. Если при $s \longrightarrow s_0$ для всех членов последовательности $\{\phi_k(s)\}$ выполнены соотношения

$$\phi_{k+1}(s) = o(\phi_k(s)), \qquad s \in S,$$

то указанная последовательность называется асимптотической. Примерами асимптотических последовательностей служат последовательности $\{(s - s_0)^k\}$ при $s \longrightarrow s_0$, $\{s^{-k}\}$ при $s \longrightarrow \infty$, $\{e^{-ks}\}$ при $s \longrightarrow \infty$, причем первые две из них называются степенными асимптотическими последовательностями, а третья – экспоненциальной.

В качестве упражнения можно доказать, что асимптотические последовательности обладают следующими свойствами:

1) любая подпоследовательность асимптотической последовательности является асимптотической последовательностью;

2) пусть функция $f(s)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки s_0, а $\{\phi_n(s)\}$ – асимптотическая последовательность при $s \longrightarrow s_0$. Тогда последовательность $\{f(s)\phi_n(s)\}$ является асимптотической последовательностью при $s \longrightarrow s_0$;

3) пусть последовательности $\{\phi_n(s)\}$, $\{\psi_n(s)\}$ являются асимптотическими при $s \longrightarrow s_0$. Тогда последовательность $\{\phi_n(s)\psi_n(s)\}$ также является асимптотической при $s \longrightarrow s_0$.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Пусть задана некоторая функция $u_\varepsilon(t) \equiv u(t, \varepsilon)$, где t – независимая переменная, изменяющаяся на некотором множестве T, а ε – параметр, принимающий произвольные значения из некоторого промежутка $(0, \varepsilon_0]$ (правда, разделение меняющихся величин на независимые переменные и параметры подчас бывает весьма условным, но обычно в конкретных задачах такое разделение вполне естественно; впрочем, функция $u_\varepsilon(t) \equiv u(t, \varepsilon)$ может и не зависеть от переменной t – дальнейшие рассуждения от этого не меняются). Пусть выбрана некоторая асимптотическая последовательность $\{\phi_k(\varepsilon)\}$, $\varepsilon \longrightarrow 0$, и рассматривается вопрос о поведении функции $u_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Если для любого целого $N \ge 0$ выполнено соотношение

$$u_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{N} u_k(t)\phi_k(\varepsilon) + o(\phi_N(\varepsilon)),$$

то выражение, определяемое с помощью формальной записи

$$u_\varepsilon(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\phi_k(\varepsilon),$$

называется асимптотическим рядом или асимптотическим разложением функции $u_\varepsilon(t)$ по асимптотической последовательности $\{\phi_k(\varepsilon)\}$. Функции $u_k(t)$ называются коэффициентами асимптотического разложения. Каждая частичная сумма $\sum_{k=0}^{N} u_k(t)\phi_k(\varepsilon)$ асимптотического ряда называется асимптотическим представлением функции $u_\varepsilon(t)$ порядка N.

Представления функций с помощью рядов очень широко используются в математике. В частности, ряды вида

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \text{ или } f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$$

называются степенными. Степенной ряд называется сходящимся на некотором интервале $|x - x_0| < R$, если при каждом значении x из этого интервала последовательность частичных сумм $S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x-x_0)^k$ имеет конечный предел при $N \longrightarrow \infty$. Сходимость ряда при $x = x_1$ означает, что абсолютная величина любой конечной части $\sum_{k=N+1}^{N+m} a_k(x_1-x_0)^k$ остатка ряда $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k$ меньше любого наперед заданного положительного числа, если значение N выбрано достаточно большим. Если же для некоторого значения $x = x_1$ последовательность частичных сумм $S_N(x_1)$ предела при $N \longrightarrow \infty$ не имеет, то говорят, что при $x = x_1$ ряд расходится. Аналогично вводятся понятия сходимости и расходимости не только степенных рядов, но и рядов иного вида.

Отметим, что понятия сходящегося ряда и асимптотического ряда разные, и, вообще говоря, ряд может быть сходящимся на некотором интервале, но не асимптотическим, и, наоборот, ряд может быть асимптотическим, но не сходящимся ни на каком интервале. Именно это различие вызывает необходимость изучения вопросов как сходимости рядов, так и их асимптотического характера. Среди прочих отметим одно интересное свойство асимптотических рядов, имея для определенности в виду степенные ряды с положительными целыми показателями. Известно, что сходящийся степенной ряд однозначно определяет функцию, разложением которой он является. Другими словами, функция однозначно определяется коэффициентами сходящегося степенного ряда; кроме того, функция, разложимая в сходящийся степенной ряд, однозначно определяет коэффициенты этого ряда. В то же время коэффициенты асимптотического степенного ряда также однозначно определяются соответствующей функцией (докажите это утверждение), но один и тот же асимптотический ряд может определять различные функции.

В качестве примера можно привести функцию

$$u(\varepsilon) = \begin{cases} e^{-1/\varepsilon^2}, & \varepsilon \neq 0, \\ 0, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Эта функция является бесконечно дифференцируемой при $-\infty < \varepsilon < \infty$. Рассмотрим ее при близких к нулю значениях ε. Степенной ряд

$$0 + 0 \cdot \varepsilon + 0 \cdot \varepsilon^2 + \ldots + 0 \cdot \varepsilon^N + \ldots,$$

очевидно, сходится к функции $f(\varepsilon) \equiv 0$ и является ее разложением. В соответствии с определением этот ряд является также и асимптотическим для этой функции. В то же время этот ряд является асимптотическим рядом и для функции $u(\varepsilon)$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Таким образом, один и тот же ряд является асимптотическим рядом для двух различных функций.

Чем еще отличаются асимптотические ряды от обычных рядов, известных из математического анализа? Чтобы проиллюстрировать разницу между этими математическими объектами, приведем конкретный пример. При $-\infty < s < \infty$ рассмотрим функцию

$$f(s) = \int_0^s e^{-x^2} dx,$$

которая встречается в различных разделах прикладной математики, в частности в теории вероятностей и теории ошибок, в математической теории теплопроводности и других разделах математической физики. Поставим вопрос о разложении этой функции в ряд по степеням переменной s. Используя обычные методы математического анализа, нетрудно получить ряд

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{2k+1}}{k!(2k+1)},$$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ (читается: k факториал). Легко показать, что этот ряд сходится при любом значении $s = s_0$. Значит, выбирая N достаточно большим, можно добиться того, чтобы произвольная конечная часть остатка ряда заведомо не превосходила по абсолютной величине заданного положительного числа, каким бы маленьким это число ни было, и поэтому рассматриваемый ряд сходится. Это означает, что для любого $\delta > 0$ и любого значения $s_0 > 0$ найдется номер $N = N(\delta, s_0)$, такой, что при $0 \le |s| \le s_0$ и любом $n \ge N$ выполнено неравенство

$$\left| f(s) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{2k+1}}{k!(2k+1)} \right| < \delta.$$

Отметим, что при уменьшении величины допустимой погрешности δ или при увеличении рассматриваемого промежутка $[-s_0, s_0]$ изменения аргумента s число N увеличивается. В частности, для вычисления с помощью частичных сумм значений функции $f(s)$ при больших значениях s может потребоваться очень большое число членов полученного ряда, что предполагает довольно большой объем вычислительной работы и неизбежное накопление вычислительной погрешности. Так, например, для вычисления значения функции $f(s)$ при $s = 100$ с погрешностью, не превышающей величины $\delta = 0{,}01$, требуется использовать более 25 000 слагаемых рассматриваемого ряда.

В то же самое время можно представить функцию $f(s)$ в виде

$$f(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_s^{\infty} e^{-x^2} dx$$

и с помощью интегрирования по частям получить формальное представление для функции $f(s)$

$$f(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{-s^2} \cdot \frac{1}{2s}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{(2s^2)^k}\right].$$

Легко видеть, что ряд, стоящий в правой части, является асимптотическим рядом по асимптотической последовательности $\{s^{-2k}\}$ при $s \longrightarrow \infty$. Отметим еще раз, что последнее равенство является формальным, соответствующий ряд расходится в каждой точке числовой прямой (хотя функция $f(s)$ определена при всех значениях аргумента), и поэтому равенство на самом деле не имеет смысла. Тем не менее, как оказывается, частичные суммы этого расходящегося ряда неплохо приближают значения функции $f(s)$ при каждом достаточно большом фиксированном значении s. Так, например, при $s = 100$ для приближения рассматриваемой функции с точностью 0,01 достаточно взять в правой части последнего равенства только первое слагаемое. Если мы для вычисления значения функции $f(s)$ при произвольном фиксированном значении s_0 будем последовательно брать 2, 3 и большее число слагаемых из правой части последнего формального равенства, то соответствующие погрешности $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_N, \ldots$ вычисления значения функции $f(s)$, которые при этом получаются, с ростом числа N сначала будут уменьшаться, а затем, начиная с некоторого номера N_0, быстро возрастать. Таким образом, для каждого фиксированного значения $\tilde{s}$ существует свой оптимальный номер $\tilde{N} = N(\tilde{s})$, такой, для которого погрешность вычисления рассматриваемой функции в точке $\tilde{s}$ будет наименьшей.

В этом и заключается принципиальное отличие асимптотических рядов от обычных, сходящихся. Если для функции $u(\varepsilon)$ построен формальный степенной ряд

$$u_\varepsilon \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varepsilon^k \qquad (3)$$

и для каждого значения N и каждого значения $\varepsilon = \varepsilon_1$ из некоторого промежутка введено обозначение

$$\left| u(\varepsilon_1) - \sum_{k=0}^{N} u_k \varepsilon_1^k \right| = \delta_N(\varepsilon_1),$$

то в случае сходимости ряда (3) для уменьшения погрешности $\delta_N(\varepsilon_1)$ вычисления функции $u(\varepsilon)$ необходимо увеличить число членов частичной суммы ряда: $\lim\limits_{N\to\infty} \delta_N(\varepsilon_1) = 0.$ Если же ряд (3) не сходится при $\varepsilon = \varepsilon_1$, то $\lim\limits_{N\to\infty} \delta_N(\varepsilon_1) = \infty$ и каждому значению числа ε_1 соответствует оптимальное число N_0, при котором погрешность является минимальной:

$$\delta_{N_0}(\varepsilon_1) = \min_{0 \le N < \infty} \delta_N(\varepsilon_1) > 0.$$

В то же время ряд (3) является асимптотическим при $\varepsilon \longrightarrow 0$, и поэтому минимальная погрешность $\delta_{N_0}(\varepsilon)$ вычисления функции $u(\varepsilon)$ может быть уменьшена за счет приближения значения ε к предельному значению:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_{N_0}(\varepsilon) = 0.$$

Для того чтобы оценить погрешность вычисления значений функции в некоторой точке с помощью частичных сумм асимптотического ряда, нужно узнать ее величину при оптимальном значении N_0 и признать, что более точно при данном значении аргумента вычислить значение функции с помощью асимптотического ряда мы не можем. В противном случае надо рассмотреть функцию при другом значении аргумента, более близком к предельной точке.

РЕГУЛЯРНО И СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

При исследовании различных свойств решений уравнений, содержащих малые параметры, асимптотические методы применяются весьма активно. Многообразие этих методов, каждый из которых наиболее эффективен при выполнении определенных условий, не позволяет даже кратко описать их в данной статье. Поэтому остановимся лишь на простейшем из них.

Рассмотрим задачу отыскания корней квадратного трехчлена, содержащего в качестве коэффициента малый параметр $x^2 + ax + b\varepsilon = 0$, где a, b – некоторые действительные числа, ε – малый положительный параметр. Для удобства будем называть эту задачу задачей A_ε. Наряду с задачей A_ε рассмотрим вырожденную задачу A_0: $x^2 + ax = 0$. Очевидно, задача A_0 имеет два решения $x_1 = 0$, $x_2 = -a$. Попробуем найти решения задачи A_ε с помощью метода малого параметра. Это можно сделать с помощью выполнения следующих действий:

1) написать формальное представление решения в виде асимптотического ряда $x = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k$ с неизвестными коэффициентами a_k;

2) подставить это представление в левую и правую части возмущенного уравнения;

3) приравнять в каждом из получившихся равенств коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε в левой и правой частях уравнения соответственно и получить задачи для определения коэффициентов асимптотического ряда a_k:

$$a_0 = x_i, \quad i = 1, 2, \quad a_1 = -\frac{b}{2a_0 + a}, \quad a_2 = -\frac{a_1^2}{2a_0 + a}, \ldots$$

Аналогичный результат получим в случае квадратного уравнения $x^2 + \varepsilon ax + b = 0$. Однако если рассмотреть уравнение $\varepsilon x^2 + ax + b = 0$, то легко увидим, что по указанному алгоритму получим асимптотическое представление лишь одного корня квадратного уравнения, того, который остается ограниченным при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Дело заключается в том, что в первых двух уравнениях малый множитель стоит при младших членах уравнения, и поэтому уравнения оказываются регулярно возмущенными, в то время как последнее уравнение является сингулярно возмущенным. Читатель может сам построить аналогичные примеры регулярно и сингулярно возмущенных уравнений.

Интересен был бы опыт знакомства школьников, углубленно занимающихся математикой, с элементами асимптотической теории (например, в математическом кружке). Это могло бы послужить развитию их математического кругозора и стремления к самостоятельным исследованиям. Соответствующие сведения и примеры можно найти в приводимом ниже списке литературы.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Маневич Л.И.* От теории возмущений к асимптотологии // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 9. С. 113–121.

2. *Копсон Э.* Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.

3. *Bellman R.* Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering. N.Y.: Holt, 1964.

4. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.

* * *

Валерий Григорьевич Сушко, доктор физико-математических наук, профессор МГУ. Лауреат премии им. М.В. Ломоносова. Область научных интересов – асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений. Автор 94 публикаций, в том числе двух монографий.