SURFACES OF NEGATIVE CURVATURE

V. T. FOMENKO

The basic notions of the theory of surfaces of negative curvature in a three-dimensional Euclidean space are described. The Hilbert's theorem on surfaces of negative curvature and the Bernstein's theorem on minimal surfaces are given. The main results of N.V. Efimov on the behavior of Gaussian curvature are indicated.

Описаны основные понятия теории поверхностей отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве. Приведены теорема Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны и теорема Бернштейна о минимальных поверхностях. Указаны основные результаты Н.В. Ефимова о поведении гауссовой кривизны на полных C^2-гладких поверхностях отрицательной кривизны.

ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В. Т. ФОМЕНКО

Таганрогский государственный педагогический институт

ВВЕДЕНИЕ

Предметом нашего рассмотрения являются регулярные поверхности отрицательной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве E^3. Рассматриваемые поверхности относятся к так называемым седловым поверхностям. Класс седловых и класс выпуклых поверхностей естественно дополняют друг друга. Хотя седловые поверхности систематически не изучаются в школьном курсе геометрии, в повседневной жизни мы встречаем их довольно часто. Мы проследим влияние гауссовой кривизны на внешнюю геометрию поверхности в пространстве.

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Поверхность F^2 в E^3 будем называть C^m-гладкой, если в окрестности каждой ее точки она может быть задана векторным уравнением $\bar r = \bar r(u, \upsilon)$, $(u, \upsilon) \in \mathcal{D}$, где вектор-функция $\bar r$ является m раз непрерывно дифференцируемой функцией параметров u, υ; $\mathcal{D}$ – некоторая область плоскости (u, υ); $[\bar r_u, \bar r_\upsilon] \neq 0$. Здесь и далее квадратные скобки означают векторное произведение векторов, а круглые скобки – скалярное произведение; $\bar r_u = \dfrac{\partial \bar r}{\partial u}$, $\bar r_\upsilon = \dfrac{\partial \bar r}{\partial \upsilon}$.

С C^m-гладкой ($m \geq 2$) поверхностью F^2 тесно связаны две квадратичные формы. Прежде всего метрическая форма I, дающая квадрат элемента длины ds дуги на поверхности при смещении в направлении $d\bar r$, определяется формулой $\mathrm{I} = (d\bar r, d\bar r)$. Так как $d\bar r = \bar r_u du + \bar r_\upsilon d\upsilon$, то $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2$, где $E = (\bar r_u, \bar r_u)$, $F = (\bar r_u, \bar r_\upsilon)$, $G = (\bar r_\upsilon, \bar r_\upsilon)$. Совокупность фактов, описывающих свойства поверхности и выражающихся через метрическую форму поверхности, составляет содержание внутренней геометрии.

Далее рассматривается вторая квадратичная форма $\mathrm{II} = -(d\bar r, d\bar n)$, где $\bar n = \dfrac{[\bar r_u, \bar r_\upsilon]}{\sqrt{EG - F^2}}$ – единичный вектор нормали поверхности. Так как $d\bar n = \bar n_u du + \bar n_\upsilon d\upsilon$, то вторая квадратичная форма может быть представлена в виде $\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdud\upsilon + Nd\upsilon^2$, где $L = -(\bar r_u, \bar n_u)$, $M = -(\bar r_u, \bar n_\upsilon)$, $N = -(\bar r_\upsilon, \bar n_\upsilon)$. Вторая квадратичная форма характеризует уклонение $\delta = (\overline{PP'}, \bar n)$ точек P' поверхности F^2 от касательной плоскости в точке P при смещении по поверхности в направлении $d\bar{r}$. При этом с точностью до членов более высокого порядка малости имеет место формула $2\delta = \mathrm{II} + \ldots$

Нормальной кривизной поверхности F^2 в точке P по направлению $d\bar{r}$ называют величину $k_n = \mathrm{II}/\mathrm{I}$. Геометрический смысл нормальной кривизны k_n заключается в следующем. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку P поверхности F^2 в направлении векторов $\bar{n}$ и $d\bar{r}$. Пусть γ_n – линия пересечения поверхности F^2 с этой плоскостью. Обозначим через $\overline{k_n}$ вектор кривизны кривой γ_n в точке P. Тогда имеет место формула $k_n = (\overline{k_n}, \bar{n})$. Это означает, что k_n с точностью до знака совпадает с кривизной кривой γ_n в точке P. Считая точку P фиксированной, а направление $d\bar{r}$ переменным, методами математического анализа убеждаемся, что функция k_n либо не зависит от выбора направления $d\bar{r}$, либо имеет точно два экстремальных значения k_1, k_2. Величины k_1, k_2 называют главными кривизнами поверхности в точке P. Гауссовой и средней кривизнами поверхности F^2 в точке P называют соответственно величины $K = k_1k_2$ и $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Формулы для вычисления K, H имеют вид

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{LG - 2MF + EN}{2(EG - F^2)}.$$

В дальнейшем термин “поверхность отрицательной кривизны” будет означать, что для всех точек поверхности $K < 0$. Для поверхностей отрицательной гауссовой кривизны главные кривизны k_1 и k_2 имеют противоположные знаки. Направление $d\bar{r}$ на поверхности в точке P называется асимптотическим, если по этому направлению $k_n = 0$. Для поверхностей с $K < 0$ в точке P существуют точно два различных асимптотических направления. Из сказанного следует, что поверхность F^2 в окрестности точки P имеет вид седла, изображенного на рис. 1.

Линия на поверхности, касательная к которой в каждой ее точке имеет асимптотическое направление, называется асимптотической. В окрестности точки P на поверхности F^2 с $K < 0$ существуют два однопараметрических семейства асимптотических линий, пересекающиеся друг с другом под ненулевым углом ω, $0 < \omega < \pi$. Асимптотическую сеть линий всегда можно принять в качестве координатной сети на поверхности в окрестности точки P. При такой и только при такой параметризации $L = N = 0$, $M \neq 0$.

ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Изучение поверхностей постоянной отрицательной кривизны в E^3 исторически оказалось тес-

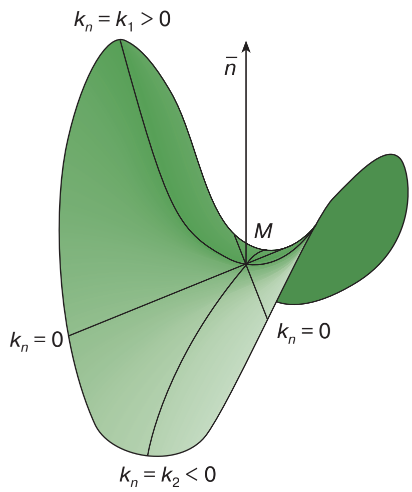

Рис. 1. Поверхность отрицательной кривизны в окрестности точки M (седло)

но связанным с проблемой интерпретации геометрии Лобачевского. Еще в 1868 году Е. Бельтрами показал, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны выполняется локально планиметрия Лобачевского. При этом геодезические линии (то есть линии, являющиеся кратчайшими между любыми двумя достаточно близкими своими точками по поверхности) и их отрезки на поверхности отрицательной кривизны играют роль прямых и их отрезков на плоскости Лобачевского. Длины, углы, площади на поверхности соответствуют длинам, углам, площадям на плоскости Лобачевского. Изометрическое преобразование поверхности на себя представляет собой движение на плоскости Лобачевского. При таких условиях каждому утверждению планиметрии Лобачевского, относящемуся к куску плоскости Лобачевского, соответствует непосредственный факт внутренней геометрии регулярного куска поверхности постоянной отрицательной кривизны. В этом случае говорят также, что на поверхности постоянной отрицательной кривизны локально реализуется геометрия Лобачевского. Укажем поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны, найденные Ф. Миндингом и Е. Бельтрами.

Поверхностью вращения называют поверхность, образованную вращением некоторой лежащей в плоскости π кривой $\mathcal{L}$ вокруг прямолинейной оси, принадлежащей плоскости π. Кривую $\mathcal{L}$ называют меридианом поверхности вращения. Если в пространстве E^3 ввести прямоугольные декартовы координаты $Oxyz$ так, чтобы начало O лежало на оси вращения, а ось Oz совпадала с осью вращения, то уравнения поверхности вращения можно записать в виде

$$x = \varphi(u)\cos\upsilon, \qquad y = \varphi(u)\sin\upsilon, \qquad z = u,$$

где для определенности считаем, что u принадлежит некоторому числовому отрезку (u_1, u_2), а υ изменяется от 0 до 2π. Функция $r = \varphi(z)$ определяет форму меридиана в плоскости π с координатами Orz. Считая, что $K = -\frac{1}{a^2}$, $a = \text{const}$, находим уравнение меридиана как функцию от r:

$$z = \pm\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{(1-\lambda)a^2-\rho^2}{a^2\lambda+\rho^2}}d\rho, \qquad (1)$$

где r_0 есть значение радиуса параллели поверхности вращения при $z = 0$, λ – произвольное число, $\lambda < 1$. Форму меридиана можно исследовать по уравнению (1), не прибегая к вычислению приведенного интеграла, как это сделано в [4].

При $\lambda > 0$ числитель подынтегрального выражения должен быть положительным, поэтому λ должно быть меньше единицы, а параметр r должен изменяться в пределах $0 \le r \le a\sqrt{1-\lambda}$. Кривая обращена к оси вращения выпуклостью и имеет вид, изображенный на рис. 2, *а*.

Точка A наибольшего удаления от оси Oz есть точка возврата для меридиана с касательной осью Or. В точках B и B' меридиан пересекает ось Oz под острым углом. Две части меридиана (дуга AB и дуга AB') соответствуют знакам плюс и минус в правой части формулы (1).

При $\lambda < 0$ из уравнения (1) находим $a\sqrt{|\lambda|} \le r \le a\sqrt{1+|\lambda|}$. Кривая состоит из веток, изображенных на рис. 2, *б*. Дуга AB соответствует знаку плюс в формуле (1), а дуга AB' – знаку минус. В точках B и B' касательная к меридиану параллельна оси Or, а в точке A параллельна оси Oz.

Случай $\lambda = 0$ представляет собой переходный тип. При $\lambda \longrightarrow 0$, $\lambda > 0$ точки B и B' на рис. 2, *а* удаляются по оси Oz в бесконечность и меридиан принимает вид, изображенный на рис. 2, *в* и называемый трактрисой.

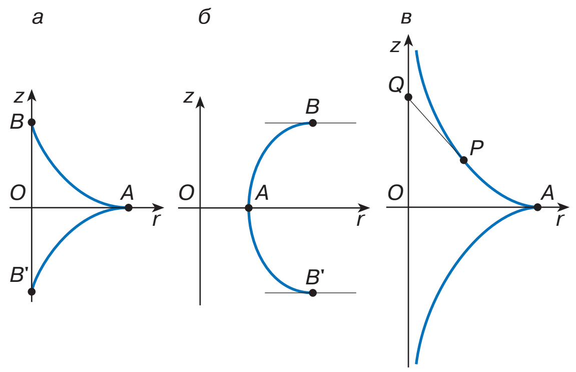

Рис. 2. Графики меридиана поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны

Трактриса характеризуется постоянством длины подкасательной $|PQ| = a$ для любой точки P. Точка A является точкой возврата, и ось Or касается трактрисы в точке A.

Поверхности вращения с указанными на рис. 2 меридианами называют соответственно волчком Миндинга, катушкой Миндинга и псевдосферой (или поверхностью Бельтрами). Эти поверхности изображены на рис. 3.

Анализируя полученные поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны, мы видим, что они либо имеют точки нарушения гладкости поверхности, либо являются поверхностями с краем. Например, параллели в катушке Миндинга, соответствующие значению $r = a\sqrt{1+|\lambda|}$, являются краем катушки Миндинга. По нашей договоренности все точки рассматриваемых поверхностей являются внутренними точками поверхности, то есть имеют окрестность, гомеоморфную открытому кругу. В таком случае нам следует исключить из рассмотрения в катушке Миндинга параллели со значением $r = a\sqrt{1+|\lambda|}$. Но тогда катушка Миндинга становится неполной поверхностью. Остановимся на этом более подробно. Пусть на поверхности F^2, заданной уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, \upsilon)$, $(u, \upsilon) \in \mathcal{D}$, задана кривая $\mathcal{L}$ уравнениями $u = u(t)$, $\upsilon = \upsilon(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Тогда, используя метрическую форму поверхности, можно вычислить длину кривой $\mathcal{L}$ по формуле

$$s(\mathcal{L}) = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{d\upsilon}{dt} + G\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Пусть A и B – концы кривой $\mathcal{L}$. Определим обычным образом расстояние $\rho(A, B)$ на поверхности F^2, полагая $\rho(A, B) = \inf s(\mathcal{L})$, где точная нижняя грань inf берется по всем кривым $\mathcal{L}$, соединяющим точки A и B. Известно, что указанная функция $\rho(A, B)$ удовлетворяют аксиомам метрического пространства. Метрическую форму ds^2 называют полной, если F^2 с функцией $\rho(A, B)$ в качестве расстояния является полным метрическим пространством. Поверхность F^2 называют полной, если ее метрическая форма полна. Исключая из рассмотрения в катушке Миндинга значения $r = a\sqrt{1+|\lambda|}$, мы получаем неполную поверхность. Таким образом, нарушение гладкости, наличие края или неполнота полученных поверхностей являются препятствиями к реализации “в целом” на них всей плоскости Лобачевского.

ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА

А может ли быть все-таки плоскость Лобачевского реализована в E^3 в виде полной поверхности постоянной отрицательной кривизны без особенностей?

Поставленный вопрос известен как проблема Гильберта. Д. Гильберт сформулировал эту проблему,

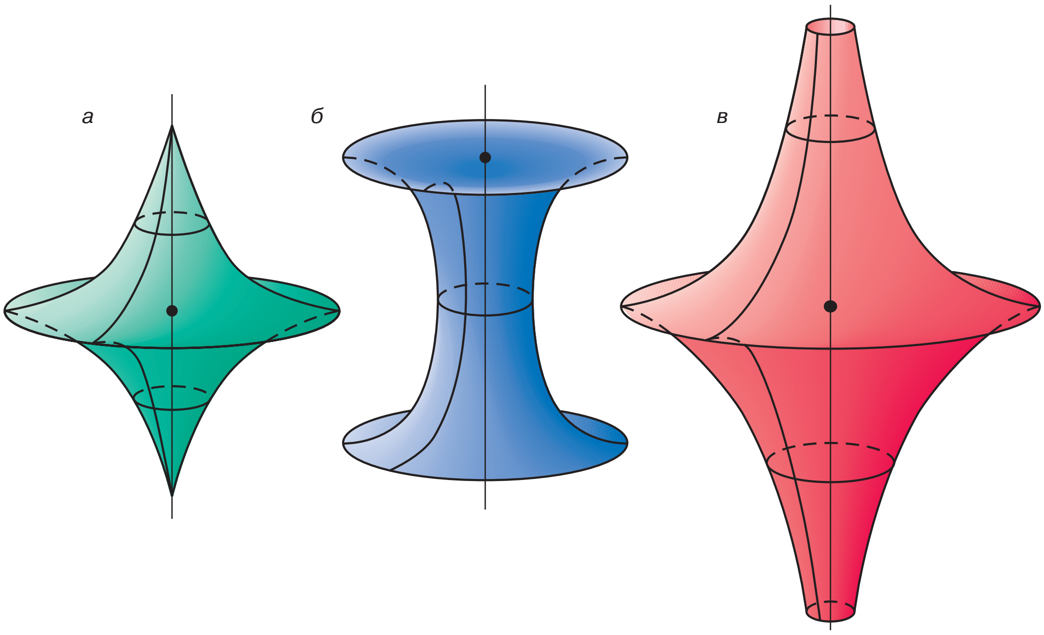

Рис. 3. Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны: *а* – волчок Миндинга, *б* – катушка Миндинга, *в* – псевдосфера

исследовал ее и показал, что в E^3 таких поверхностей не существует. Именно, им доказана

Теорема Гильберта. *В E^3 не существует C^3-гладкой полной поверхности F^2 постоянной отрицательной гауссовой кривизны.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в работе [3].

ТЕОРЕМА ЕФИМОВА

В связи с теоремой Гильберта встает следующий вопрос, поставленный самим Гильбертом, а затем С.Э. Кон-Фоссеном (см., например, [2]): насколько существенно в теореме Гильберта требование постоянства гауссовой кривизны и возможно ли его заменить условием $K \le \mathrm{const} < 0$?

Приведем несколько примеров полных C^3-гладких поверхностей отрицательной кривизны и проследим, как изменится на поверхности гауссова кривизна.

Пример 1. Рассмотрим в E^3 гиперболический параболоид, заданный в декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением $z = x^2 - y^2$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Подсчет показывает, что

$$K = -\frac{1}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2}.$$

Отсюда следует, что гауссова кривизна K стремится к нулю при $x^2 + y^2 \longrightarrow \infty$ и скорость стремления к нулю достаточна высока.

Пример 2. Поверхность, образуемая прямой, которая движется в пространстве опираясь на некоторую кривую, называется линейчатой поверхностью. Гиперболический параболоид, рассмотренный в примере 1, относится к классу линейчатых поверхностей. Если из этого класса исключить развертывающиеся поверхности (то есть поверхности, локально изометричные плоскости), то оставшиеся линейчатые поверхности являются поверхностями отрицательной кривизны. Уравнение линейчатой поверхности имеет вид $\bar r = \bar R(u) + \upsilon \bar l(u)$, где $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < \upsilon < +\infty$, $\bar R = \bar R(u)$ – уравнение некоторой кривой в пространстве E^3, называемой направляющей; $\bar l(u)$ – единичный вектор, в направлении которого через точку направляющей проходит прямая, называемая образующей поверхности. Все образующие поверхности составляют однопараметрическое семейство прямых на поверхности. Каждая прямая на поверхности является асимптотической линией. Подсчет показывает, что

$$K = -\frac{(\bar R', \bar l', \bar l)^2}{[(\bar R'\bar R') + 2\upsilon(\bar R'\bar l') + \upsilon^2(\bar l'\bar l') - (\bar R', \bar l')^2]^2},$$

где в числителе стоит квадрат смешанного произведения векторов $\bar R', \bar l', \bar l$, а знак ' означает производную. Из этой формулы следует, что при фиксированном значении параметра u при $\upsilon \longrightarrow \infty$ имеем $K \longrightarrow 0$.

Пример 3. Пусть F^2 – поверхность вращения, меридиан которой есть выпуклая кривая, обращенная выпуклостью к оси Oz. Если уравнение меридиана в системе Or имеет вид $r = \varphi(z)$, $z \in (u_1, u_2)$, то гауссова кривизна поверхности F^2 дается формулой

$$K = -\frac{\varphi''}{\varphi(1+\varphi'^2)^2}.$$

Чтобы рассматриваемая поверхность вращения была полной, достаточно предположить, что $\varphi(z) \longrightarrow \infty$ при $u \longrightarrow u_1$ и $u \longrightarrow u_2$, а параметр υ изменяется в пределах $-\infty < \upsilon < +\infty$. Отсюда следует, что $K \longrightarrow 0$ при $u \longrightarrow u_1$ или $u \longrightarrow u_2$. Таким образом, на всех рассмотренных здесь поверхностях гауссова кривизна, оставаясь отрицательной, неограниченно приближается к нулю. Оказывается, это закономерное явление. В 1963 году Н.В. Ефимов доказал следующую теорему (см., например, [2]).

Теорема Ефимова. *На всякой полной C^2-гладкой поверхности отрицательной гауссовой кривизны в E^3 выполняется соотношение* $\inf\sqrt{-K} = 0$.

Другими словами, для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ на полной C^2-гладкой поверхности отрицательной кривизны в E^3 найдется точка M такая, что гауссова кривизна в этой точке будет удовлетворять неравенству $-\varepsilon < K(M) < 0$.

Н.В. Ефимов исследовал также задачу о скорости стремления к нулю гауссовой кривизны на полной поверхности с $K < 0$.

Для формулировки полученного Н.В. Ефимовым результата в этом направлении введем следующее понятие. Пусть $\rho(P_1, P_2)$ – расстояние на поверхности F^2, определяемое метрикой ds^2, $f(P)$ – заданная на F^2 функция. Говорят, что функция $f(P)$ имеет изменение с линейной оценкой, если существуют числа $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, такие, что $|f(P_1) - f(P_2)| \leq \leq c_1\rho(P_1, P_2) + c_2$.

Н.В. Ефимов показал, что если гауссова кривизна K полной C^2-гладкой поверхности F^2 в E^3 всюду отрицательна, то изменение функции $\chi = (-K)^{-1/2}$ не допускает линейной оценки.

ТЕОРЕМА БЕРНШТЕЙНА

Естественно поставить вопрос о влиянии на поведение поверхности отрицательной кривизны задания других ее характеристик, например средней кривизны.

Определение. Поверхность называется *минимальной*, если ее средняя кривизна H тождественно равна нулю.

Отличительным свойством минимальной поверхности является условие $k_1 = -k_2$, где k_1, k_2 – главные кривизны поверхности. Это означает, что $K = k_1k_2 \leq 0$, причем равенство нулю гауссовой кривизны возможно только в точках уплощения, то есть в точках, для которых $k_1 = k_2 = 0$. Поверхность, все точки которой являются точками уплощения, есть плоскость. Приведем пример минимальной поверхности вращения отрицательной кривизны.

Рассмотрим цепную линию, то есть кривую провисания тяжелой цепи с равномерно распределенной массой. Если принять горизонтальную прямую за ось Oz, вертикальную за ось Or, то уравнение цепной линии можно записать в виде

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}\right), \quad -\infty < z < \infty, \quad a = \text{const}, \quad a > 0.$$

Поверхность, образованная вращением цепной линии вокруг оси Oz, называется катеноидом. Непосредственный подсчет показывает, что для катеноида $H \equiv 0$. Катеноид является единственной минимальной поверхностью вращения отрицательной кривизны $K < 0$.

Рассмотрим линейчатую поверхность, называемую геликоидом и заданную уравнением $\bar{r}(u, \upsilon) = \{u\cos\upsilon, u\sin\upsilon, a\upsilon\}$, где $-\infty < u < \infty$, $-\infty < \upsilon < \infty$, $a = \text{const}$, $a > 0$. Геликоид можно представить как поверхность, образованную прямой линией при ее равномерном винтовом движении (рис. 4). Геликоид является единственной линейчатой минимальной поверхностью отрицательной кривизны $K < 0$.

Приведенные выше минимальные поверхности являются полными поверхностями отрицательной кривизны. Естественно возникает задача нахождения полных минимальных поверхностей, однозначно проектирующихся на всю плоскость. Решение этой задачи было дано С.Н. Бернштейном. Им была доказана

Теорема Бернштейна. *Если минимальная поверхность F^2 задана уравнением $z = f(x, y)$, где f является C^2-гладкой функцией, заданной на всей плоскости x, y, то F^2 является плоскостью.*

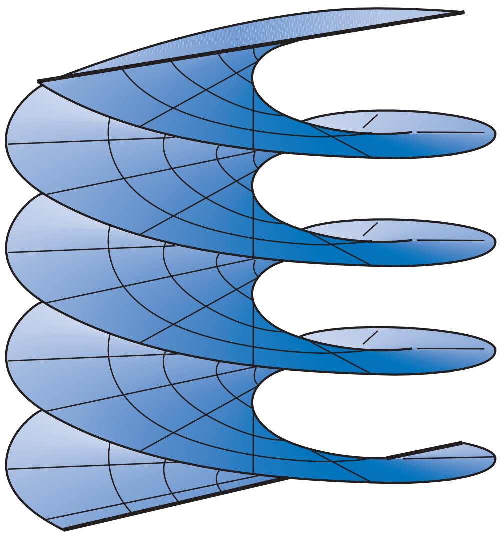

Рис. 4. Геликоид

Из теоремы Бернштейна следует, что не существует C^2-гладкой минимальной поверхности отрицательной кривизны $K < 0$, однозначно проектирующейся на всю плоскость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы затронули лишь один из вопросов теории поверхностей отрицательной кривизны: рассмотрено поведение гауссовой кривизны на полных C^2-гладких поверхностях отрицательной кривизны. В то же время остаются незатронутыми другие не менее интересные вопросы, связанные с теорией таких поверхностей. Например, существуют ли поверхности в E^3, на которых реализуется геометрия полуплоскости Лобачевского? Допускают ли минимальные поверхности деформации в классе минимальных поверхностей с сохранением их внутренней геометрии? На эти и другие сходные вопросы можно найти ответ в работах [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бураго Ю.Д.* Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 48. С. 5–97.

2. *Розендорн Э.Р.* Поверхности отрицательной кривизны // Там же. С. 98–195.

3. *Ефимов Н.В.* Поверхности с медленно меняющейся отрицательной кривизной // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21, вып. 5(131). С. 3–58.

4. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. М.; Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. Ч. 2. 407 с.

* * *

Валентин Трофимович Фоменко, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и геометрии Таганрогского государственного педагогического института, член-корреспондент Российской академии естествознания, заслуженный деятель науки РФ. Область научных интересов – геометрия, дифференциальные и интегральные уравнения. Автор и соавтор более 170 научных работ, одной монографии и четырех учебных пособий для студентов.