CONFORMAL MAPPING

V. V. SIL'VESTROV

A definition, properties and examples of conformal mappings are given. Basic problems of the theory of conformal mappings and their applicability for solving certain problems are discussed.

Даны определение, свойства и примеры конформных отображений, обсуждены основные проблемы теории конформных отображений и возможности применения их для решения некоторых задач.

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

В. В. СИЛЬВЕСТРОВ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары

Одним из основных свойств таких простейших геометрических преобразований, как параллельный перенос, поворот, центральная и осевая симметрии, преобразование подобия и гомотетия, является сохранение формы тел и фигур и как следствие – сохранение углов между гладкими кривыми. Подобным свойством обладают также многие другие преобразования, но с той разницей, что свойство сохранения формы выполняется применительно не ко всему телу или фигуре, а лишь к их достаточно малым частям. Более того, при этих преобразованиях, как и при указанных выше простейших преобразованиях, имеет место свойство сохранения углов между кривыми. Такие преобразования, называемые конформными, нашли широкое применение во многих разделах математики и других наук.

В данной статье во взаимосвязи с простейшими преобразованиями плоскости приводятся определение, основные свойства и примеры конформных отображений, обсуждаются основные проблемы теории конформных отображений и возможности применения их для решения некоторых задач современного естествознания.

КОМПЛЕКСНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ПРОСТЕЙШИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ

Известно, что любое комплексное число $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$, $i^2 = -1$) можно единственным образом изобразить как точку $M(x; y)$ или вектор $\vec{z} = (x; y)$ на плоскости, в результате чего между множеством $\mathbf{C}$ комплексных чисел и координатной плоскостью Oxy, а также множеством векторов на плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие. В связи с этим число z часто называют еще точкой z или вектором z. При этом сумме комплексных чисел $z = x + iy$ и $a = \alpha + i\beta$ соответствует сумма векторов $\vec{z}$ и $\vec{a}$, что равносильно параллельному переносу (сдвигу) точки $M(x; y)$ на вектор $\vec{a} = (\alpha; \beta)$. Таким образом, на плоскости параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ осуществляется комплекснозначной функцией $w = z + a$.

Пусть точка w получается из точки z поворотом вокруг начала координат на угол α. Запишем число z в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$ – его модуль (расстояние от точки z до начала координат), а $\varphi = \arg z$ – аргумент (угол между действительной осью Ox и вектором $\vec{z}$). Так как

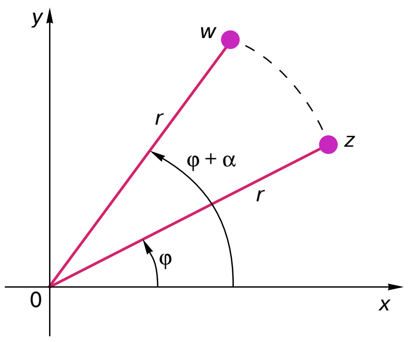

Рис. 1

число w имеет тот же модуль r, а его аргумент равен $\varphi + \alpha$ (рис. 1), то

$$w = r(\cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha)) =$$

$$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

то есть на плоскости поворот вокруг начала координат на угол α осуществляется функцией $w = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z$. В частности, отсюда следует, что симметрия относительно начала координат, представляющая собой поворот вокруг него на угол π, осуществляется функцией $w = (\cos\pi + i\sin\pi)z = -z$.

Аналогично показывается, что гомотетия с коэффициентом k ($k \neq 0$), в частности преобразование подобия с коэффициентом k ($k > 0$), и центром в начале координат осуществляется функцией $w = kz$.

Для описания приведенных выше преобразований плоскости относительно точки z_0 надо в соответствующих функциях заменить z на $z - z_0$. Например, поворот на угол $\alpha = \pi/2$ вокруг точки $z_0 = 1 + i$ осуществляется функцией

$$w = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z - 1 - i) = iz + 1 - i,$$

а симметрия относительно этой точки – функцией $w = -(z - 1 - i) = -z + 1 + i$.

С помощью комплексной переменной описываются и более сложные преобразования плоскости, каковым, например, является инверсия с коэффициентом k ($k > 0$) и центром в точке z_0, которая точке z ставит в соответствие точку w, лежащую вместе с z на одном луче, выходящем из точки z_0, и удовлетворяющую условию $|z - z_0| \cdot |w - z_0| = k$ (рис. 2). Данное преобразование осуществляется функцией $w = z_0 + k/(\bar{z} - \bar{z}_0)$. В частности, инверсия (симметрия) относительно окружности $|z - z_0| = R$, определяемая как инверсия с коэффициентом $k = R^2$ и центром в точке z_0, осуществляется функцией $w = z_0 + R^2/(\bar{z} - \bar{z}_0)$. Аналогично симметрия относительно прямой $ax + by = c$, называемая еще инверсией, осуществляется функцией

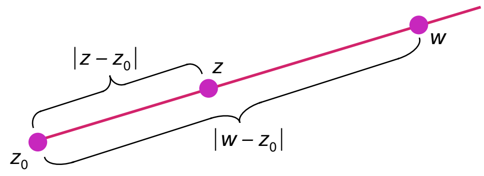

Рис. 2

$$w = \frac{b^2 - a^2 - 2abi}{a^2 + b^2}\bar{z} + \frac{2c(a + bi)}{a^2 + b^2}.$$

В частности, инверсия относительно оси абсцисс $y = 0$ осуществляется функцией $w = \bar{z}$. Точки, получаемые друг из друга в результате инверсии относительно окружности (или прямой), называются симметричными относительно этой окружности (или прямой). Например, инверсия относительно окружности $|z - 1 - i| = 1$ с центром в точке $z_0 = 1 + i$ и радиуса 1 осуществляется функцией $w = 1 + i + 1/(\bar{z} - 1 + i)$, используя которую, в частности, найдем точку, симметричную точке $z = 0$ относительно данной окружности:

$$w = 1 + i + \frac{1}{-1 + i} = \frac{1}{2}(1 + i).$$

Записав функцию $w = 1/z$ в виде $w = \overline{(1/\bar{z})}$, видим, что она представляет собой суперпозицию $w = f_2(f_1(z))$ двух функций $f_1(z) = 1/\bar{z}$, $f_2(z) = \bar{z}$. Следовательно, отображение, осуществляемое функцией $w = 1/z$, равносильно последовательному выполнению (суперпозиции) двух инверсий (симметрий): относительно окружности $|z| = 1$ и относительно оси абсцисс. По этой причине отображение, осуществляемое функцией $w = 1/z$, называют преобразованием двойной симметрии. Аналогично можно показать, что параллельный перенос и поворот равносильны двум инверсиям относительно некоторых прямых, а преобразование подобия – двум инверсиям относительно окружностей.

Рассмотренные в данном пункте преобразования изучаются также в n-мерном евклидовом пространстве. Однако для них в пространстве измерения $n \geq 3$ таких удобных форм аналитической записи, как на плоскости, нет.

Задача 1. Покажите, что при инверсии на плоскости окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии, а окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии, и обратно.

Задача 2. Покажите, что: 1) линейная функция $w = az + b$ с комплексными коэффициентами a, b ($a \neq 0$) осуществляет отображение, равносильное последовательному выполнению трех преобразований: преобразования подобия $w_1 = |a|z$, поворота

$w_2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)w_1$ на угол $\alpha = \arg a$, параллельного переноса $w = w_2 + b$; 2) дробно-линейная функция $w = (az + b)/(cz + d)$ с комплексными коэффициентами a, b, c, d ($ad - bc \neq 0$) осуществляет отображение, равносильное суперпозиции конечного числа преобразований подобия, поворота, параллельного переноса и преобразования двойной симметрии $w = 1/z$ или суперпозиции четного числа инверсий относительно окружностей и прямых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Непрерывное отображение $w = f(z)$ области D комплексной плоскости **C** в плоскость **C** называется конформным в точке $z_0 \in D$, если в этой точке оно обладает свойствами постоянства искажения масштаба и сохранения углов. Свойство постоянства искажения масштаба (или постоянства растяжений) в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ состоит в том, что при $z \longrightarrow z_0$ отношение $|f(z) - f(z_0)|/|z - z_0|$ расстояния между образами $f(z)$ и $f(z_0)$ точек z и z_0 к расстоянию между самими точками z и z_0 стремится к определенному пределу k, не зависящему от способа стремления z к z_0. Число k называется коэффициентом искажения масштаба в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Свойство сохранения (консерватизма) углов в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ состоит в том, что любая пара гладких кривых γ_1, γ_2, расположенных в D и пересекающихся в точке z_0 под некоторым углом α (то есть имеющих касательные в точке z_0, образующие между собой угол α), переходит при рассматриваемом отображении в пару гладких кривых Γ_1, Γ_2, пересекающихся в точке $w_0 = f(z_0)$ под тем же углом α с учетом направления (рис. 3). Такое отображение называют еще конформным отображением первого рода. Если отображение сохраняет углы между кривыми по абсолютной величине, изменяя их направления на противоположные, то оно называется антиконформным или конформным отображением второго рода. Отображение области D называется конформным, если оно конформно в каждой точке области. Все рассмотренные ранее отображения, кроме инверсии, являются конформными в плоскости **C**, а инверсия – антиконформным отображением в **C**.

Из определения конформного отображения непосредственно следует, что если в плоскости изменения комплексной переменной z взять достаточно малый треугольник с одной из вершин в точке z_0, то он при конформном отображении $w = f(z)$ перейдет в малый криволинейный треугольник с вершиной в точке $w_0 = f(z_0)$ (см. рис. 3). При этом соответственные углы у этих треугольников будут равны как по абсолютной величине, так и по направлению, а отношения их соответственных сторон будут мало отличаться от коэффициента k искажения масштаба. Таким образом, конформное отображение является отображением, сохраняющим форму достаточно малых фигур, то есть преобразованием подобия применительно к малым фигурам.

Доказано, что образ любой области при конформном отображении снова является областью. Основными проблемами теории конформных отображений являются вопрос о возможности (существовании) конформного отображения одной заданной области на другую и задача практического нахождения функций, осуществляющих это отображение. Ответ на первый вопрос в случае односвязных областей дает теорема Римана, согласно которой любые две односвязные области с границами, состоящими более чем из одной точки, можно взаимно однозначно и конформно отобразить друг на друга. Множество всех таких отображений бесконечно, и все они осуществляются аналитическими функциями, то есть функциями, имеющими производную. В частности, из этой теоремы следует, что любую односвязную область указанного типа можно бесконечным числом способов отобразить конформно на единичный круг $|z| < 1$ или верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$, чем часто пользуются в приложениях.

Сложнее обстоит дело со второй проблемой. Найти практически конформное отображение одной области на другую, особенно с помощью элементарных функций, удается не всегда. По сложности эта проблема во многом схожа с проблемой нахождения интегралов функций, существование которых если даже доказано (например, в случае

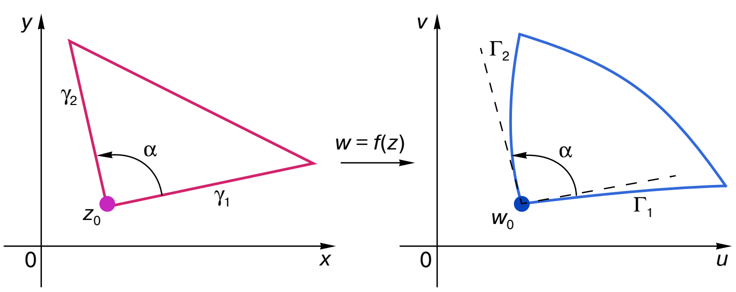

Рис. 3

непрерывных функций), но найти их практически не всегда удается. Как и в случае интегралов, данная проблема решена лишь для некоторых определенных типов областей, поэтому она до сих пор остается предметом исследований.

Наряду с конформным отображением плоских областей изучаются также конформные отображения областей в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ измерения $n > 2$, которые определяются так же, как и в случае плоскости. Однако конформные отображения в $\mathbf{E}^n$ при $n > 2$ образуют весьма узкий класс. Каждое такое отображение является либо преобразованием подобия, либо суперпозицией преобразования подобия и инверсии. Поэтому они в отличие от плоских конформных отображений не нашли особых приложений. Широкое применение плоских конформных отображений в различных областях науки объясняется, например, следующим. Многие дифференциальные уравнения в частных производных и их системы при замене одних переменных на другие, связанные между собой посредством функций, осуществляющих конформное отображение, либо вовсе не изменяются, либо упрощаются. Таковым является, например, уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Если в этом уравнении переменные x, y заменить на новые переменные u, υ, являющиеся действительной и мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, то уравнение не изменится. На основании этого многие задачи для уравнения Лапласа в областях сложной структуры сводятся с помощью конформного отображения $w = f(z) = u + i\upsilon$ к аналогичным задачам в более простых областях (круге, полуплоскости и т.д.), в которых решение задачи либо известно, либо находится проще. После этого решение задачи в исходной области получается путем обратной замены переменных.

Конформные отображения нашли применение во многих областях современного естествознания, в частности в теории функций, картографии, гидро- и аэромеханике, электро- и магнитостатике, теплопроводности, теории упругости и т.д. В математике и приложениях используются отображения и более широкого класса, при которых формы малых фигур искажаются, но в ограниченных пределах. При этих отображениях, называемых квазиконформными, достаточно малые окружности (или шары в $\mathbf{E}^n$ при $n > 2$) переходят в малые эллипсы (или эллипсоиды) с ограниченным отношением наибольшей полуоси к наименьшей. Множество квазиконформных отображений существенно шире, чем множество конформных отображений, которые являются частными случаями квазиконформных.

ПРИМЕРЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотренные в предыдущем разделе простейшие преобразования плоскости образуют весьма незначительный класс конформных отображений, множество которых неисчерпаемо и разнообразно. Особый класс в этом множестве образуют отображения, осуществляемые дробно-линейной функцией

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbf{C}, \qquad ad - bc \neq 0, \qquad (1)$$

свойства которой наиболее ярко проявляются именно на плоскости. Эта функция отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ взаимно однозначно и конформно на себя. При этом окружности переходят в окружности или прямые (круговое свойство), а прямые – тоже в окружности или прямые, которые считаются окружностями, проходящими через точку ∞. Если Γ – образ окружности γ (или прямой) при дробно-линейном отображении и точки z_1, z_2 симметричны относительно γ, то их образы w_1, w_2 при этом отображении будут симметричны относительно Γ. Так как окружность единственным образом определяется тремя точками, то для нахождения образа окружности при дробно-линейном отображении достаточно на этой окружности взять любые три “удобные” точки, найти их образы и провести через них окружность или прямую, которая и будет образом исходной окружности. Для нахождения образа прямой в качестве одной из точек удобно брать точку ∞, отображаемую функцией (1) в точку $w(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} w(z) = a/c$.

Этот же прием используется для нахождения при дробно-линейном отображении образов дуг окружностей, отрезков и лучей, на которых две

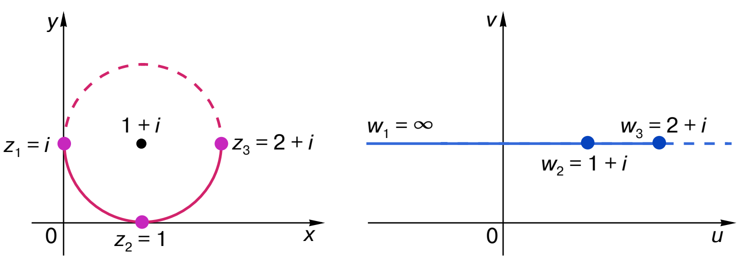

Рис. 4

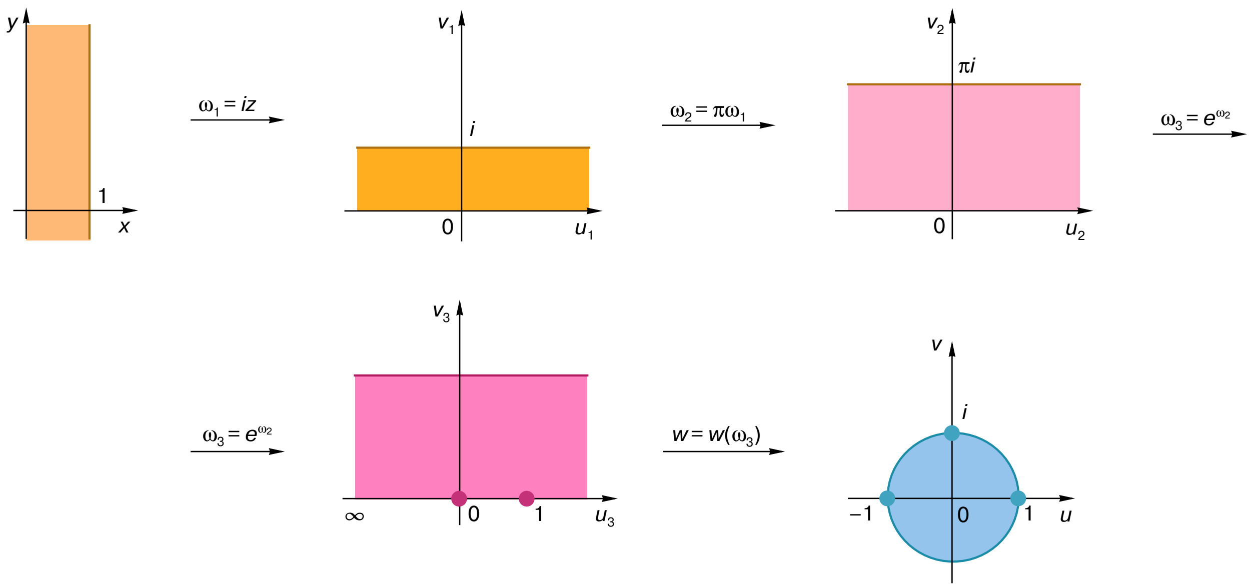

Рис. 5

выбираемые точки должны совпадать с концами, а третья – находиться между ними.

В качестве примера данным приемом найдем образ дуги $|z - 1 - i| = 1$, $\operatorname{Im} z \le 1$ (рис. 4) при отображении $w = 2z/(z - i)$. Взяв на этой дуге точки $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2 + i$, найдем их образы $w_1 = \infty$, $w_2 = 1 + i$, $w_3 = 2 + i$. Через точки w_1, w_2, w_3 проведем прямую и возьмем ее часть с концами w_1, w_3 и промежуточной точкой w_2. Это будет луч с вершиной в точке w_3, проходящий через точку w_2. Ясно, что образом всей окружности $|z - 1 - i| = 1$ при рассматриваемом отображении будет вся прямая, проходящая через точки w_2, w_3, а образом дуги, нарисованной штрихами, – луч, нарисованный также штрихами.

Круговое свойство дробно-линейной функции часто используется для конформного отображения полуплоскостей, кругов и внешностей кругов друг на друга. Для этого на границе одной области берутся любые три “удобные” точки z_1, z_2, z_3 так, что при движении по границе области от z_1 к z_3 через z_2 область остается слева, а на границе другой области аналогично берутся точки w_1, w_2, w_3, после чего из уравнения

$$\frac{w - w_1}{w - w_2}\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \qquad (2)$$

решая его относительно w, находят дробно-линейную функцию $w = w(z)$, которая и будет конформным отображением первой области на вторую. При этом если одна из точек z_k или w_k совпадает с ∞, то соответствующую дробь вида $\frac{\infty}{\infty}$ надо заменить числом 1. Например, одно из конформных отображений круга $|z - 1 - i| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 1$ (см. рис. 4) можно найти из этого уравнения, взяв $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2 + i$ и $w_1 = \infty$, $w_2 = 1 + i$, $w_3 = 2 + i$. В этом случае $w = 2z/(z - i)$, а если на границе полуплоскости взять точки $w_1 = \infty$, $w_2 = i$, $w_3 = 1 + i$, то из этого уравнения найдем $w = (z + i)/(z - i)$. Взяв другие точки z_k и w_k, получим другие функции, множество которых бесконечно.

В приложениях часто используется конформное отображение единичного круга $|z| < 1$ на себя. Функции, осуществляющие это отображение, имеют в общем случае вид

$$w = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \qquad (3)$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{C}$ и $|a| < 1$. Если круг $|z| < 1$ рассматривать как модель плоскости Лобачевского [1, гл. III], где роль прямых играют дуги окружностей, перпендикулярных границе $|z| = 1$ круга, то для нее отображения, осуществляемые функциями (3), играют такую же роль, как параллельный перенос и поворот для евклидовой плоскости.

Иногда конформное отображение одной области на другую удается найти осуществляя последовательно отображения с помощью простейших элементарных функций. Отображения, осуществляемые некоторыми из них, включая все основные, описаны в учебниках и справочниках [1–4]. В частности, функция $w = z^{\beta/\alpha}$ отображает угол $0 < \arg z < \alpha$ конформно на угол $0 < \arg w < \beta$, а функция $w = e^z$ отображает горизонтальную полосу $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ на верхнюю полуплоскость. Используя эти функции и их комбинации с другими функциями, можно найти конформные отображения углов и полос на полуплоскость или круг. Например, одно из конформных отображений полосы $0 < \mathrm{Re}\,z < 1$ на единичный круг $|z| < 1$ находится в результате следующей последовательности отображений (рис. 5): поворота $\omega_1 = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)z = iz$, преобразования подобия $\omega_2 = \pi\omega_1$, отображения $\omega_3 = e^{\omega_2}$ и дробно-линейного преобразования $w = w(\omega_3)$, отображающего граничные точки ∞, 0, 1 верхней полуплоскости соответственно на граничные точки 1, i, -1 единичного круга, которое, согласно (2), находится из уравнения

$$\frac{w-1}{w-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1} = \frac{\omega_3-\infty}{\omega_3-0}\cdot\frac{1-0}{1-\infty},$$

откуда $w = (\omega_3 - 1 - i)/(\omega_3 - 1 + i)$. Учитывая, что $\omega_3 = e^{\omega_2} = e^{\pi\omega_1} = e^{i\pi z}$, окончательно получаем $w = (e^{i\pi z} - 1 - i)/(e^{i\pi z} - 1 + i)$.

Как видно из этого примера, нахождение конформного отображения одной области на другую, как и вычисление интегралов, требует немалого мастерства и изобретательности.

Задача 3. Методом последовательных отображений найти какое-нибудь конформное отображение: 1) угла $\pi/4 < \arg z < \pi/3$ сначала на полуплоскость $\mathrm{Re}\,z > 0$, а затем на область $|z + 1 - i| > 1$; 2) полосы, заключенной между прямыми $y = x$, $y = x + 1$, на полуплоскость $\mathrm{Im}\,z < 0$ и круг $|z + i| < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.

2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

3. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

4. *Лаврик В.И., Савенков В.Н.* Справочник по конформным отображениям. Киев: Наук. думка, 1970. 252 с.

* * *

Василий Васильевич Сильвестров, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова. Область научных интересов – приложения теории функций комплексного переменного в механике. Автор и соавтор более 60 научных статей и двух учебных пособий.