PERTURBATION METHOD: ALGEBRAIC EQUATIONS

V. A. SOBOLEV

Initial information about the perturbation theory as it is applied to the problem of finding of roots of polynomials is described. The perturbation method based on expansions with respect to a small parameter permits to find an approximate solution of the initial "perturbed" problem right after a solution to the "unperturbed" problem which corresponds with zero value of small parameter.

Описаны первоначальные сведения из теории возмущений применительно к задаче нахождения корней многочленов. Метод возмущений, основанный на разложении по малому параметру, позволяет вслед за решением невозмущенной задачи, соответствующей нулевому значению малого параметра, находить приближенное решение исходной возмущенной задачи.

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В. А. СОБОЛЕВ

Самарский государственный университет

Теория возмущений впервые возникла в рамках одной из старейших областей прикладной математики – небесной механике. Начиная с античных времен для описания движения планет применялись различные математические методы. После открытия закона всемирного тяготения оказалось возможным описывать планетарные движения на основе фундаментальных физических законов. Если рассматриваются только Солнце и одна планета, то она движется по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце. Однако реально наблюдается несколько иное движение. Дело в том, что каждая планета оказывает воздействие на другие своим гравитационным полем и поэтому возмущает, то есть изменяет, их движение. Теория возмущений в ее изначальном смысле связана с разработкой различных способов учета таких изменений. Исследователь берет в основу анализа невозмущенное решение, которое соответствует эллиптическому движению как начальное приближение, и затем соответствующим образом корректирует это решение, вычисляя силы, с которыми планеты влияют на невозмущенное движение друг друга.

В настоящее время задачи, стоящие перед теорией возмущений, гораздо шире, чем ее применения в небесной механике, но основная идея сохранилась. Исследование начинается с невозмущенной или порождающей задачи, решение которой рассматривается как приближение более сложной задачи, отличающейся наличием дополнительных малых членов в уравнениях. Затем строятся следующие приближения, уточняющие это решение, обычно в форме степенных рядов (или их модификаций). Роль переменной в таких степенных рядах играет малая величина, называемая малым параметром. Обычно используются только частичные суммы рядов (в большинстве задач два-три слагаемых).

Простейшая задача, в которой можно применить теорию возмущений, – это задача о вычислении корней многочленов. Эта задача позволяет проиллюстрировать многие важные идеи: описание семейства возмущений, вырожденные и невырожденные случаи, равномерные и неравномерные решения, масштабирование координат и параметров. Задачу будем рассматривать как чисто математическую, мы не будем обращаться к физическим источникам каждой задачи, а будем обсуждать чисто математические трудности, порождаемые природой теории возмущений. При таком подходе полиномиальные уравнения представляют собой идеальный объект для изучения.

Применение метода возмущений для нахождения корней многочлена продемонстрируем на квадратном уравнении

$$x^2 - 3{,}99x + 3{,}02 = 0. \qquad (1)$$

Конечно, это уравнение нетрудно решить точно. Тем не менее мы опишем подход, основанный на методе возмущений, в соответствии с которым следует выполнить программу действий, состоящую из следующих четырех шагов.

1. Во-первых, заметим, что, поскольку $-3{,}99 = -4 + 0{,}01$ и $3{,}02 = 3 + 0{,}02$, уравнение (1) – это почти то же, что уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ или $(x - 1)(x - 3) = 0$, корнями которого являются числа $x^{(1)} = 1$, $x^{(2)} = 3$.

2. На втором шаге создается семейство задач, связывающее легко решаемое уравнение с уже известными корнями и первоначальное уравнение (1). Это можно сделать обозначив через ε малую величину 0,01, так что $-3{,}99 = -4 + \varepsilon$; $3{,}02 = 3 + 2\varepsilon$. Тогда уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$x^2 + (\varepsilon - 4)x + (3 + 2\varepsilon) = 0. \qquad (2)$$

Если теперь позволить ε изменяться, то одно уравнение (2) превратится в семейство уравнений, причем каждому значению ε соответствует одно уравнение. Если $\varepsilon = 0$, то (2) сводится к уже решенному уравнению; если $\varepsilon = 0{,}01$, то имеем исходное уравнение (1). Уравнение (2) дает пример семейства возмущений, то есть семейства задач, зависящих от малого параметра ε, легко решаемых при $\varepsilon = 0$.

3. Третий шаг состоит в нахождении приближенных решений семейства уравнений (2) в виде многочленов (усеченных степенных рядов), роль переменной в которых играет малый параметр ε. Метод нахождения будет описан в следующем разделе. Для рассматриваемого примера вполне подходящими будут приближенные решения

$$\begin{aligned} x^{(1)} &\simeq 1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{15}{8}\varepsilon^2, \\ x^{(2)} &\simeq 3 - \frac{5}{2}\varepsilon - \frac{15}{8}\varepsilon^2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Полагая в этих формулах $\varepsilon = 0{,}01$, получим приближенные решения исходного уравнения (1):

$$x^{(1)} \simeq 1{,}015\,875, \qquad x^{(2)} \simeq 2{,}974\,812\,5.$$

4. На четвертом шаге следует, насколько это возможно, оценить ошибку полученного приближения. Этим вопросом мы не будем заниматься в данной статье.

Даже этот простой пример дает хорошее представление о теории возмущений. Прежде всего метод может применяться только тогда, когда исходная задача близка к легко решаемой задаче (к задаче, решение которой известно точно или может быть найдено приближенно каким-то методом, не связанным с теорией возмущений). Произвольно выбранное алгебраическое уравнение не всегда может быть решено методом возмущений, так как оно необязательно окажется близким к уравнению с легко определяемыми корнями. Кроме того, этот пример показывает, что применение метода возмущений дает не только решение исходной задачи (1), но и каждого уравнения семейства (2), если только величина ε достаточно мала. Возмущенное решение типа (3) справедливо в том смысле, что дает хорошее приближение только для достаточно малых значений ε. Что означают слова "достаточно малое", неясно до тех пор, пока не сделан четвертый шаг (анализ ошибки приближения). Может оказаться, что $\varepsilon = 0{,}01$ недостаточно мало, чтобы дать хорошее решение нашей задачи. Тогда мы не можем решить исходную задачу, но в то же время можем получить хорошее решение задачи (2) для меньших значений малого параметра, например при $\varepsilon = 0{,}001$. Кроме того, формулы (3) могут давать приемлемое решение при $\varepsilon = 0{,}1$ и даже для значений параметра, равных 1 или 10. Здесь мы столкнулись с отличием природы семейств возмущений от индивидуальных задач. Обычно считается, что в теории возмущений $0 < \varepsilon < 1$, так что $\varepsilon^2 < \varepsilon$. При таком предположении высшие степени малого параметра уменьшаются, что дает интуитивное обоснование возможности пренебрежения достаточно высокими степенями, например членами, содержащими малый параметр в степени выше второй в формулах типа (3). В то же время влияние членов типа ε^3 зависит и от коэффициентов при этих членах. Один из подходов к этому вопросу основывается на вычислении радиуса сходимости степенного ряда [1], который может оказаться большим единицы, и предположение $\varepsilon < 1$ не является обязательным.

Теорию возмущений можно сравнить с исследованием джунглей при помощи вертолета. Джунгли вообще характерны для всех проблем такого типа. Исследователь осматривает джунгли с воздуха, выбирая прогалины для посадки. Эти прогалины соответствуют легко решаемым проблемам. После приземления исследователь прорубает тропу в джунглях. Введя параметр ε, можно рассматривать семейство возмущений тропы, зависящих от ε. Исследователь продвигается до тех пор, пока не достигнет непроходимого болота или не попадет в пасть льву – в этой точке ε становится слишком большим и метод возмущений подводит исследователя. (Внимательный читатель может возмутиться, справедливо заметив, что львы водятся в саваннах, а не в джунглях. Но эта статья посвящена проблемам теории возмущений, а не зоологии.)

ФОРМАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Приближенные решения в прикладной математике часто строятся на основе догадок и обосновываются позднее, если вообще обосновываются. Для описания такой процедуры часто используют слова "эвристическая" или "формальная". Она называется *эвристической*, если основана на интуиции и угадывании вида решения; и называется *формальной*, если основана только на форме записи уравнения. Необходимо отметить, что в математике понятие "формальный" используется и в противоположном смысле, когда говорят о строгой обоснованности (соблюдении всех формальностей).

Мы будем строить приближенные решения возмущенной задачи, используя две эвристические идеи:

а) решение ищется в виде многочлена,

б) игнорируются высшие степени малого параметра.

Вторая идея обычно мотивируется тем, что если $0 < \varepsilon < 1$, то ... $\varepsilon^4 < \varepsilon^3 < \varepsilon^2 < \varepsilon < 1$. Так, при $\varepsilon = 0{,}01$, $\varepsilon^2 = 0{,}0001$, $\varepsilon^3 = 0{,}000\,001$. Если интересоваться решением с точностью до трех или четырех знаков после запятой, то резонно игнорировать величину ε^3, то есть при вычислениях полагать $\varepsilon^3 = 0$ (напомним, что это всего лишь эвристическое соображение. Реальная ошибка, порождаемая игнорированием ε^3, требует отдельного изучения и меняется при переходе от одной задачи к другой). Мотивировка первой идеи исходит из того факта, что многие функции могут быть представлены в виде степенных рядов, а после игнорирования высших степеней в таких рядах они превращаются в многочлены. Комбинируя обе эти идеи и выключая члены с ε^3, будем искать приближенные решения уравнения (1) в виде квадратичных многочленов

$$x^{(1)} \simeq 1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2, \qquad x^{(2)} \simeq 3 + c\varepsilon + d\varepsilon^2. \tag{4}$$

Главные члены 1 и 3 в (4) – это известные корни рассматриваемого уравнения при $\varepsilon = 0$. Подставляя первое выражение из (4) в (2), имеем

$$(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^2 + (\varepsilon - 4)(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2) + (3 + 2\varepsilon) = 0.$$

На следующем шаге следует выполнить умножение и упорядочить полученные члены по степеням ε. Поскольку эта операция часто возникает в теории возмущений, полезно уметь находить члены нужных степеней без сложных вычислений. Например, коэффициент при ε^2 в выражении $(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^2 = (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)$ равен $a^2 + 2b$, так как ε^2 может возникнуть только при умножении $a\varepsilon$ на самого себя и в произведении 1 и $b\varepsilon^2$, которое получается дважды. Результат умножения выглядит следующим образом:

$$\varepsilon(-2a + 3) + \varepsilon^2(a + a^2 - 2b) + \varepsilon^3(2ab + b) + \varepsilon^4(b^2) = 0. \tag{5}$$

Так как многочлен относительно переменной ε равен нулю при всех ε, то каждый коэффициент этого многочлена должен равняться нулю, то есть равенство (5) удовлетворяется точно, если

$$\begin{aligned} -2a + 3 &= 0, \\ a + a^2 - 2b &= 0, \\ 2ab + b &= 0, \\ b^2 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Это система четырех уравнений с двумя неизвестными, которая, очевидно, не имеет решения. Но этого и следовало ожидать, поскольку выражение (4) составлялось как приближенное решение, а не точное. Для нахождения приближенного решения используем идею б. Если пренебречь членами с ε^3 и ε^4, то a и b должны удовлетворять только первым двум равенствам в (6), которые имеют решение $a = 3/2$, $b = 15/8$. Аналогичные вычисления для c и d дают результат, полученный ранее в (3). В представлении приближенного решения был использован знак $\simeq$, означающий "приближенно равно". Когда мы пишем $x^{(1)} \simeq 1 + 3\varepsilon/2 + 15\varepsilon^2/8$, это означает просто то, что $1 + 3\varepsilon/2 + 15\varepsilon^2/8$ рассматривается как приближение настоящего решения $x^{(1)}$. Анализ погрешности еще не проводился, и предлагаемое приближенное решение может оказаться неприемлемым.

Мы попробовали вычислить решение уравнения (2). Но будет ли аналогичная процедура работать в других задачах? Ниже покажем, что в некоторых случаях ответ отрицателен, поскольку вычисления приводят к делению на нуль. Поэтому для понимания метода недостаточно рассмотрения одних примеров, необходимо проанализировать ситуацию в общем случае. Ближайшей целью будет получение условий, при которых описанная выше вычислительная процедура может быть выполнена. Это можно называть *формальным анализом* метода, поскольку он основан только на форме решений и не дает оценки погрешности. Такой формальный анализ является существенной частью метода возмущений, но нужно иметь в виду, что возможность выполнения вычислений не гарантирует их точности.

В качестве общей задачи, частным случаем которой было уравнение (2), будем рассматривать задачу нахождения приближенного решения уравнения

$$\varphi(x, \varepsilon) = 0 \tag{7}$$

в форме

$$x \simeq x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2. \tag{8}$$

Здесь φ – произвольная заданная (то есть известная) функция двух переменных. Представление (8) означает, что мы по-прежнему игнорируем ε^3. Отбрасывать можно любые степени малого параметра, но чем больше членов оставляется, тем длиннее становятся вычисления.

Первый шаг состоит в подстановке (8) в (7):

$$\varphi(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \varepsilon) \simeq 0. \tag{9}$$

Здесь используется символ $\simeq$, так как мы не можем рассчитывать на точное равенство нулю.

Следующий шаг состоит в разложении (9) по степеням малого параметра. Если φ является многочленом, то для этого нужно выполнить умножение и приведение подобных членов, как это делалось в примере, рассмотренном выше. В общем же случае необходимо пользоваться рядами Тейлора [1]. Удобно ввести специальное обозначение для левой части равенства (9), рассматриваемой как функция переменной ε. Будем полагать $h(\varepsilon) = \varphi(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \varepsilon)$. Разложение по степеням ε и пренебрежение ε^3 приводит к следующему равенству:

$$h(0) + h'(0)\varepsilon + \frac{1}{2}h''(0)\varepsilon^2 =$$

$$= \varphi(x_0, 0) + \varepsilon\{\varphi_x(x_0, 0)x_1 + \varphi_\varepsilon(x_0, 0)\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^2\{\varphi_{xx}(x_0, 0)x_1^2 + 2\varphi_{x\varepsilon}(x_0, 0)x_1 +$$

$$+ 2\varphi_x(x_0, 0)x_2 + \varphi_{\varepsilon\varepsilon}(x_0, 0)\} = 0. \tag{10}$$

Коэффициенты в равенстве (10) должны равняться нулю, следовательно, для x_0, x_1 и x_2 получаются соотношения

$$\varphi(x_0, 0) = 0,$$

$$x_1 = -\frac{\varphi_\varepsilon(x_0, 0)}{\varphi_x(x_0, 0)} = -\frac{\varphi_\varepsilon}{\varphi_x}\bigg|_{(x_0, 0)}, \tag{11}$$

$$x_2 = \frac{-\varphi_{xx}\varphi_\varepsilon^2 + 2\varphi_{x\varepsilon}\varphi_x - \varphi_{\varepsilon\varepsilon}\varphi_x^2}{2\varphi_x^3}\bigg|_{(x_0, 0)}.$$

Первое уравнение в (11) означает, что x_0 должно быть решением порождающей или вырожденной задачи, которая получается из (9) при $\varepsilon = 0$. При использовании теории возмущений необходимо знать решение этой задачи. Если порождающее уравнение имеет несколько корней, нужно выбрать один из них перед процессом приближенного решения, а после его завершения можно вернуться к рассмотрению других корней. Если x_0 выбрано, то оставшиеся уравнения в (11) определяют x_1 и x_2.

Из (11) легко получаются условия, обеспечивающие возможность вычислений: функция φ должна иметь производные первого и второго порядков в точке $(x_0, 0)$ и величина $\varphi_x(x_0, 0)$ должна быть отличной от нуля. Отметим, что при этом оба знаменателя в (11) отличны от нуля. Более того, если в выражении вида (8) учитывать члены более высоких порядков, то при вычислении коэффициентов x_3, x_4, ... знаменатели представляют собой соответствующие степени величины $\varphi_x(x_0, 0)$. Таким образом, предположение $\varphi_x(x_0, 0) \neq 0$ является основным и именно его выполнение характеризует так называемый *невырожденный случай.*

ФОРМАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим еще один пример:

$$\varphi(x, \varepsilon) = x^2 + \varepsilon = 0. \tag{12}$$

Точное решение $x = \pm\sqrt{-\varepsilon}$ существует при $\varepsilon < 0$, но не существует при $\varepsilon > 0$. Построить приближенное решение методом, изложенным в предыдущем разделе, невозможно, так как в данном примере мы имеем дело с *вырожденным случаем*: $x_0 = 0$ и $\varphi_x(x_0, 0) = 0$. В математической литературе для рассмотрения вырожденных случаев обычно рекомендуется использовать метод диаграмм Ньютона [2], однако в прикладных работах широко используется более простой эвристический метод, не имеющий общепринятого названия, но иногда называемый *методом неопределенных масштабов.* Суть метода заключается в том, что приближенное решение ищется в форме

$$x \simeq x_0\delta_0(\varepsilon) + x_1\delta_1(\varepsilon) + \ldots + x_k\delta_k(\varepsilon) \tag{13}$$

вместо менее общей полиномиальной формы $x \simeq \simeq x_0 + x_1\varepsilon + \ldots + x_k\varepsilon^k$. Функции $\delta_n(\varepsilon)$ определяют последовательно вместе с коэффициентами x_n. Этот метод в комбинации с другими методами важен для сложных задач, которые возникают, например, в газовой динамике, когда невозможно заранее предугадать вид этих функций. Мы продемонстрируем применение этого метода для приближенного нахождения корней многочленов в вырожденном случае. Рассмотрим вырожденную задачу $x^2 - 10x + 25 - 4\varepsilon - 4\varepsilon^2 = 0$, имеющую точные решения $x = 5 \pm 2\sqrt{\varepsilon + \varepsilon^2}$. Эти решения нельзя разложить в степенные ряды по ε, но можно разложить в степенные ряды по $\sqrt{\varepsilon}$. Например, $x^{(1)} = 5 + 2\sqrt{\varepsilon + \varepsilon^2} = = 5 + 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1 + \varepsilon} = 5 + 2\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{3/2} + \ldots$ Последняя формула имеет вид (13) при $x_0 = 5$, $\delta_0 = 1$, $x_1 = 2$, $\delta_1 = = \varepsilon^{1/2}$ и т.д. Предугадать вид функций $\delta_n(\varepsilon)$, основываясь на виде уравнения, не представляется возможным даже в этом простом случае. В общей ситуации заранее можно предполагать только то, что функции $\delta_n(\varepsilon)$ располагаются в порядке важности. Другими словами, приближение наименьшего порядка должно задаваться формулой $x \simeq x_0\delta_0(\varepsilon)$; член $x_1\delta_1(\varepsilon)$ должен играть роль меньшей (по абсолютной величине) поправки; $x_2\delta_2(\varepsilon)$ – еще меньше и т.д., по меньшей мере при достаточно малых значениях ε. Точнее, для всех n должно выполняться предельное соотношение $\delta_{n+1}(\varepsilon)/\delta_n(\varepsilon) \longrightarrow 0$, когда $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Рассмотрим еще один пример:

$$(x - 1)^3 + \varepsilon x = 0.$$

Невозмущенное уравнение имеет трехкратный корень $x = 1$. Полагая $x \simeq 1 + x_1\delta_1$ в исходном уравнении, получим $x_1^3\delta_1^3 + x_1(\varepsilon\delta_1) + \varepsilon \simeq 0$. Отсюда находим $\delta_1 = \varepsilon^{1/2}$, а для x_1 получается уравнение $x_1^3 + 1 = 0$, имеющее один вещественный корень $x_1 = -1$. В результате получаем следующее приближенное решение:

$$x^{(1)} \simeq 1 - \varepsilon^{1/3}.$$

Дополнительные сведения и большое количество примеров можно найти в прекрасно написанных книгах [3, 4]. Материалы книги [4] существенно использовались при написании настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.*, *Садовничий В.А.*, *Сендов Бл.Х.* Математический анализ. М.: Изд-во МГУ, 1985. Т. 1.

2. *Вайнберг М.М.*, *Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

3. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.

4. *Murdock J.A.* Perturbations: Theory and Methods. N.Y.: Wiley, 1991.

* * *

Владимир Андреевич Соболев, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАЕН, зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, декан факультета математики и компьютерных наук Самарского муниципального университета Наяновой. Область научных интересов – дифференциальные уравнения, теоретическая механика, математическое моделирование, теория управления. Автор более 80 научных публикаций и четырех книг.