

DYNAMIC SYSTEMS  
OPERATING  
IN THE ACCOMPANIMENT  
OF DANGEROUS  
BIFURCATIONS

M. I. FEIGIN

*The motion retarding effects in passing over definite regions of phase trajectory are considered. These are found in the vicinity of bifurcation boundaries. A moving ship and a Duffing's oscillator are used as examples of the effects of emergency manifestations and cases of their effective use.*

**Рассмотрены эффекты замедления движений при прохождении определенных участков фазовой траектории, обнаруженные в окрестности опасных бифуркационных границ. Потенциально аварийные проявления эффектов и случаи их целесообразного использования изложены на примерах движущегося судна и осциллятора Дуффинга.**

© Фейгин М.И., 1999

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИЕ В СОПРОВОЖДЕНИИ ОПАСНЫХ БИФУРКАЦИЙ

М. И. ФЕЙГИН

Волжская государственная академия водного транспорта,  
Нижний Новгород

Задачей качественной теории динамических систем является нахождение стационарных решений — особых точек и предельных циклов, исследование их устойчивости, выделение областей притяжения устойчивых стационарных режимов в фазовом пространстве. Таким образом выясняется фазовый портрет системы при фиксированных значениях параметров.

Теория бифуркаций помогает в рассмотрении параметрического портрета системы, определяющего, как зависит от параметров расположение бифуркационных границ, на которых происходит изменение числа и типа стационарных решений, а значит, и изменение фазового портрета.

С позиций теории бифуркаций можно выделить две характерные группы систем. К первой отнесем системы, работающие в определенном стационарном режиме. Бифуркационная ситуация для таких систем аномальна, а опасные бифуркации представляют потенциально аварийные ситуации.

Для второй группы систем изменения фазовых портретов в результате бифуркаций — обычная штатная ситуация в процессе работы. Именно изменение числа возможных стационарных режимов делает работу системы эффективной в изменяющихся внешних условиях. Вместе с тем оказалось, что в таких системах могут возникать случаи необычного поведения, связанные с рождением области заторможенного движения в результате опасных бифуркаций.

Целью настоящей статьи является иллюстрация применения общих закономерностей, полученных при теоретическом исследовании поведения динамических систем в окрестности опасных бифуркационных границ [1], к решению прикладных задач в конкретных динамических системах второй группы.

### РЕАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Теоретическое исследование динамического поведения реального объекта требует создания его математической модели. Из статьи [2] читателям журнала уже знакомы некоторые примеры того, как

математика позволяет понять окружающий мир посредством простых моделей.

Во многих случаях процедура разработки модели состоит в составлении математических уравнений на основе физических законов. Обычно эти законы формулируются на языке дифференциальных уравнений. В результате координаты состояния системы и ее параметры оказываются связанными между собой, что позволяет приступить к решению дифференциальных уравнений при различных начальных условиях и параметрах.

Вообще говоря, получение хорошей математической модели является искусством. Дело в том, что математическую модель динамической системы желательно максимально упростить. В то же время при упрощении уравнений не должно исчезнуть описание тех особенностей поведения, которые предстоит исследовать (недопустимо выплеснуть воду вместе с ребенком).

Главным критерием здесь является соответствие математической модели описываемым реальным процессам. Это определяется сравнением результатов теоретического расчета с результатами эксперимента на конкретном объекте. Модель заслуживает особого признания, если с ее помощью удастся теоретически обнаружить новые особенности поведения, которые затем подтверждаются экспериментально. Может оказаться, что математическая модель разработана специалистами по прикладным наукам, а новые явления в поведении этой модели (и соответствующей реальной системы) обнаружены специалистами по теории динамических систем. Именно такие случаи будут рассмотрены в настоящей статье.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОГО СУДНА

Следуя общему правилу максимального упрощения модели, рассматривается поведение судна в горизонтальной плоскости, на тихой воде и при отсутствии ветра. Дополнительно полагают, что скорость судна постоянна. Второй закон динамики для поступательного движения устанавливает зависимость ускорения от суммы действующих на судно сил, а для вращательного движения вокруг вертикальной оси — зависимость углового ускорения от суммы действующих на судно моментов.

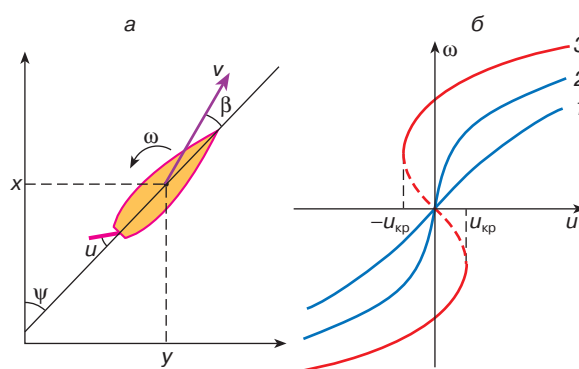
Силы и моменты связаны с инерционными свойствами судна и воды, обусловлены вязкостью воды, а также воздействием потока на корпус судна и руль. Наиболее удобными координатами состояния судна оказались координаты его центра тяжести  $x$  и  $y$ , угол курса  $\psi$ , угловая скорость вращения вокруг вертикальной оси  $\omega = \frac{d\psi}{dt}$  и угол дрейфа  $\beta$  между направлением скорости судна  $v$  и его продольной осью симметрии (рис. 1, *a*).

Если судно идет прямолинейным курсом с неотклоненным рулем ( $u = 0$ ), то его продольная ось совпадает с направлением скорости ( $\beta = 0$ ). В силу симметрии корпуса поперечные силы и момент отсутствуют и, следовательно, угловая скорость  $\omega = 0$ . Этот стационарный режим будет устойчивым в том случае, если при возникновении незначительных  $\omega$ , а вслед за этим и угла  $\beta$ , то есть появлении несимметричного обтекания, возникающие силы и моменты заставляют судно возвращаться в исходное состояние.

Аналогичные рассуждения можно привести и для случая  $u \neq 0$ . Здесь стационарным режимом будет движение по окружности (установившаяся циркуляция) с постоянными угловой скоростью  $\omega$  и углом дрейфа  $\beta$ . С ростом угла отклонения руля  $u$  радиус циркуляции уменьшается. Режим устойчив, если при случайных отклонениях от  $\omega$ ,  $\beta$  возникающие момент и поперечная сила возвращают судно к исходному режиму циркуляции. Зависимость стационарных состояний  $\omega$  от параметра управления  $u$  (положения руля) для устойчивого судна приведена на рис. 1, *б* (кривая 1).

Эту зависимость называют диаграммой управляемости судна. Наиболее важный ее участок — окрестность начала координат. Наклон кривой здесь характеризует реакцию судна на незначительные отклонения руля при прямолинейном движении. Чем круче этот участок, тем выше управляемость (рис. 1, *б*, кривая 2). Как видно из рисунка, в случае устойчивого судна любому  $u$  соответствует единственное стационарное решение. На фазовой плоскости оно соответствует особой точке — устойчивому узлу (рис. 3, *a*).

Подчеркнем, что диаграмма управляемости представляет статическую характеристику. Определяемые с ее помощью значения  $\omega(u)$  достигаются в результате завершения переходного процесса. В обычном же режиме работы руль находится



**Рис. 1.** *a* – состояние судна определяется пятью координатами и параметром управления  $u$ ; *б* – диаграмма управляемости устойчивого (1, 2) и неустойчивого (3) судов

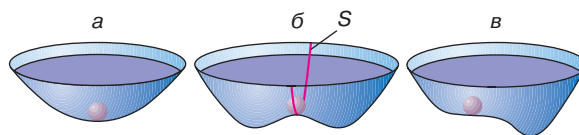
в отклоненном положении незначительное время, за которое величина  $\omega$  не достигает установившегося значения.

Поэтому необходимость значительного повышения маневренности потребовала еще большего изменения диаграммы управляемости (рис. 1, б, кривая 3). В результате движение судна на прямом курсе оказалось неустойчивым. Участок кривой 3 (рис. 1, б), относящийся к неустойчивым стационарным режимам, изображен пунктиром. На фазовой плоскости он соответствует особой точке – седлу (рис. 4, а). Естественно, что в этом случае для удерживания судна в окрестности неустойчивого стационарного режима необходимо соответствующее воздействие управляющего органа  $u(t)$ .

Приведенные рассуждения об устойчивости и неустойчивости судна можно проиллюстрировать на примере простейшей механической системы, изображенной на рис. 2. Симметричная прозрачная ванна с крутыми боковыми стенками заполнена достаточно вязкой жидкостью, и в нее помещен шар. Случаю неотклоненного руля и устойчивой особой точки соответствует рис. 2, а. Здесь в случае отклонения шара от равновесного состояния произойдет восстановление исходной ситуации. При этом в движении к состоянию равновесия выделяются два этапа: сначала быстрое скатывание по боковой стенке, затем медленное перемещение вдоль дна ванны.

Неустойчивому на прямом курсе судну соответствует рис. 2, б, который иллюстрирует поведение системы в окрестности седла. При отклонении шара от равновесного состояния строго в поперечном направлении он будет стремиться вернуться в ту же точку. Эта особая траектория  $S$  соответствует сепаратрисе седла и является границей притяжения двух устойчивых равновесных состояний. Поэтому смещение шара в любом другом направлении приведет к дальнейшему его перемещению в одно из двух возможных устойчивых равновесных состояний. Отклонению руля в нашей интерпретации соответствует деформация нижней части ванны, нарушающая симметрию между левой и правой сторонами. Рис. 2, в отвечает случаю  $u > u_{кр}$ . Следует отметить существование полого участка, на котором скорость движения падает. Он расположен между более крутыми участками.

Рассматриваемая математическая модель управляемого судна описывается системой пяти дифференциальных уравнений первого порядка. На первом этапе эти уравнения получают в физических переменных и параметрах, измеряемых в обычных единицах. Далее осуществляют преобразование к так называемым безразмерным переменным и параметрам. Путем специального выбора масштабов удается существенно упростить как сами уравнения (часть коэффициентов становятся равными единице), так и смысловую интерпретацию получаемых



**Рис. 2.** Простейшая механическая система, иллюстрирующая устойчивое на курсе судно (а), неустойчивое при  $u = 0$  (б) и неустойчивое при  $u > u_{кр}$  (в)

результатов. Окончательно эти уравнения принимают следующий вид [3]:

$$\dot{\omega} = a\omega + b\beta + s_1 u, \quad (1)$$

$$\dot{\beta} = c\omega + d\beta + h\beta|\beta| + s_2 u, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega, \\ \dot{x} &= \cos(\psi - \beta), \\ \dot{y} &= \sin(\psi - \beta), \end{aligned}$$

здесь точка означает дифференцирование по безразмерному времени, за единицу которого судно проходит путь, равный длине корпуса.

С позиций качественной теории и теории бифуркаций динамических систем для наших целей оказывается достаточным исследовать уравнения (1), (2), то есть фазовые портреты в плоскости  $\omega, \beta$ . Координаты особых точек  $\omega, \beta$  являются корнями квадратного уравнения, получаемого после приравнивания нулю правых частей этих уравнений. Именно таким образом получают диаграмму управляемости.

В результате приходим к следующей математической задаче. Имеется нелинейная система с изменяющимся в процессе ее управляемого движения числом возможных стационарных режимов. При отсутствии управления ( $u = 0$ ) наряду с неустойчивым стационарным решением (рабочий режим) существует еще пара устойчивых решений. С ростом сигнала управления при  $|u| = u_{кр}$  происходит слияние неустойчивого решения с одним из устойчивых и последующее их исчезновение (рис. 1, б). Таким образом, при  $|u| > u_{кр}$  в системе остается единственное устойчивое решение и, казалось бы, проблема управления решается элементарно.

Оказывается, однако, что разумная идея получения высокой управляемости объекта за счет неустойчивости основного режима при сигналах управления  $|u| < u_{кр}$  мстит за нарушение традиций и в случаях  $|u| > u_{кр}$ . Проявляет себя эффект бифуркационной памяти. Фазовые траектории пространства состояний “всплывают” об опасной бифуркации, замедляя движение системы при прохождении участка, на котором умерла особая точка седло-узел.

**ПРОЯВЛЕНИЕ ЭФФЕКТА ФАЗОВОГО ПЯТНА – Понижение управляемости и начальная неуправляемость**

Особенности поведения системы, связанные с бифуркациями исчезновения или рождения седло-узловой особой точки, рассматривались в статье [1]. На рис. 3 представлено изменение характера переходного процесса в зависимости от длительности движения в фазовом пятне. Чем ближе к центру пятна проходит фазовая траектории (рис. 3, а), тем ближе соответствующий участок переходного процесса и дольше он преодолевается (рис. 3, б).

Поэтому непосредственное и простое приложение результатов теории к проблеме управляемости судов заключается в целенаправленном просмотре фазовых портретов при отклонении руля, превышающем критическое значение, и построении фазовых пятен. Оказалось, что с увеличением угла перекладки руля размеры пятна не изменяются. Однако показатель заторможенности движения внутри него уменьшается. Поэтому самые общие рекомендации предотвращения пониженной управляемости состоят в том, чтобы при необходимости маневра в сложных условиях отклонение руля было не просто больше критического значения (как рекомендуют учебники и справочники по судоводждению исходя из статической диаграммы управляемости), а превышало бы его в 2–4 раза.

Более сложной задачей является теоретическое прогнозирование конкретной аварийной ситуации, при которой система “забрасывается” в фазовое пятно и при этом угловая скорость судна оказывается нежелательного направления. В этом случае при правильном отклонении руля судно на какое-то время будет вращаться в противоположную сторону. Если подобная ситуация возникает вне фазового пятна (траектория 4 на рис. 3, а), то правильное управление быстро переведет систему в послушное состояние. Замедление реакции системы при ее попадании в область пятна (траектория из точки  $\beta_0$ ) может привести к аварии.

Описанная ситуация возможна при внезапном исчезновении ветра. Дело в том, что учет ветрового

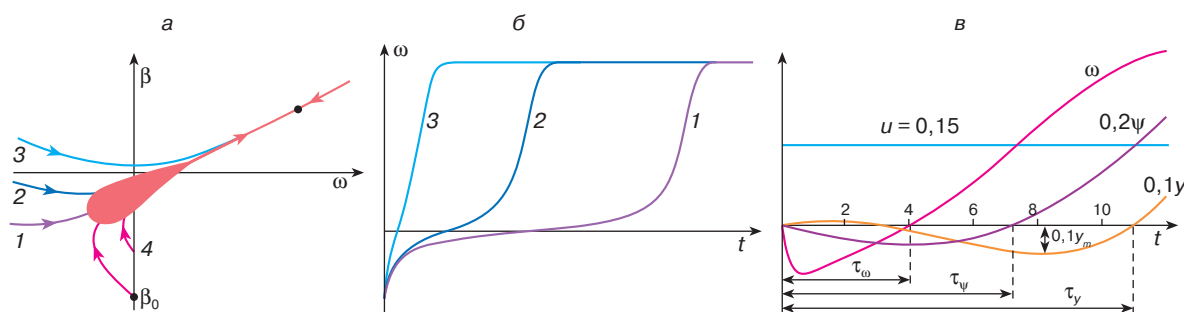
воздействия добавляет в правые части уравнений (1), (2) слагаемые, зависящие от направления и скорости ветра. Стационарному прямолинейному движению судна при ветре соответствует состояние  $\omega = \omega_0 = 0, \beta = \beta_0 \neq 0$ . Поэтому при резком спаде ветра указанное состояние должно быть принято в качестве начальных условий переходного процесса (рис. 3, а). Далее предполагается, что руль отклонен в нужную сторону на достаточно большой угол и исследуются соответствующие фазовые траектории. Для некоторых судов проявление начальной неуправляемости усугубляется тем, что забросу в потенциально аварийную область соответствуют быстрые движения, а выходу из нее – медленные.

Оказалось, что при некоторых начальных состояниях судна даже максимально возможная перекладка руля не спасает от начальной неуправляемости: угловая скорость, курсовой угол и отклонение траектории центра тяжести судна  $y(t)$  от исходной прямолинейной траектории начнут изменяться в нужную сторону лишь по истечении некоторого времени ( $\tau_\omega, \tau_\psi, \tau_y$  соответственно). При рассматриваемом явлении переходный процесс имеет необычный вид. Управляемая координата в начальной стадии отклоняется в противоположную сторону.

С позиций безопасности судоходства подобные ситуации являются потенциально аварийными. Время начальной неуправляемости зависит от конструкции судна, величины начальных значений  $\omega_0, \beta_0$  и отклонения руля. На рис. 3, в приведены типичные переходные процессы, иллюстрирующие проявление начальной неуправляемости. Обратим внимание, что угол курса  $\psi$  начнет изменяться в нужную сторону лишь через 7,3 единицы времени. При длине корпуса 100 м пройденный судном путь составит 730 м. Больше 1 км судну нужно пройти, чтобы исчезло боковое смещение  $y(t)$  в нежелательном направлении.

**СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

Мы рассмотрели, как существование области заторможенного движения (фазового пятна) может



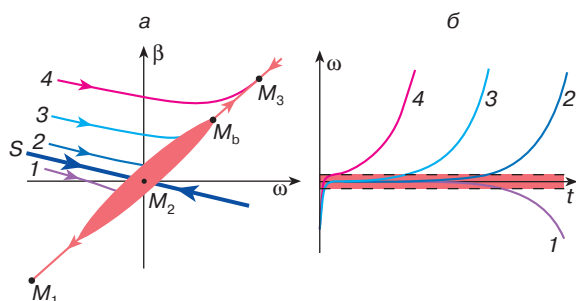
**Рис. 3.** Эффект фазового пятна: а – область пятна при  $u > u_{кр}$ ; б – зависимость переходного процесса от степени близости фазовой траектории к центру пятна; в – показатели начальной неуправляемости при  $u = 0,25u_{max}$

привести к потенциально аварийным ситуациям. Вместе с тем, располагая знаниями о расположении такой области в фазовом пространстве неустойчивого судна, целесообразно в определенных случаях преднамеренно планировать прохождение через нее фазовой траектории.

В следующем примере, относящемся к проблеме стабилизации неустойчивости, речь пойдет об удерживании неустойчивого судна на прямом курсе. Обычный подход к решению задачи такой. Информация о характере отклонения судна от курса поступает от специальных датчиков и преобразуется в соответствии с определенным алгоритмом. В результате вырабатывается значение так называемой ошибки управления  $z(t)$ . Эта функция, а также характеристика привода рулевого устройства и определяющая угол отклонения руля  $u(z)$ . Процедура проектирования подобных систем автоматического управления хорошо отработана.

Мы подойдем к решению задачи, опираясь на специфическую для судна бифуркационную картину. Случай потери устойчивости в симметричной системе сопровождается в силу симметрии рождением пары несимметричных устойчивых особых точек. В случае судна это левая и правая самопроизвольные циркуляции при неотклоненном руле. Естественно, что появляются две области притяжения устойчивых точек, разделенные некоторой границей  $S$ , которая совпадает с одной из сепаратрис седла (рис. 4, а).

Каковы могут быть переходные режимы в окрестности границы? Пусть два исходных состояния лежат сколь угодно близко друг к другу, но по разные стороны от границы  $S$ . В соответствии с теоремой о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных значений начинающиеся в рассматриваемых точках две фазовые траектории должны оставаться близкими в течение определенного времени. Следовательно, они должны приводить систему в окрестность седла. Напомним,



**Рис. 4.** По мере приближения фазовой траектории к сепаратрисе седла  $S$  при  $u = 0$  (а) увеличивается нахождение неуправляемого судна в окрестности неустойчивого состояния (б)

ним, что в малой окрестности особых точек фазовая скорость системы  $V \left( V^2 = \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right)$  может быть сколь угодно малой. Поэтому, чем ближе к седлу проходит траектория, тем более заторможенным становится движение. Область заторможенного движения (фазовое пятно) в окрестности седла находится совершенно аналогично случаю бифуркации седло-узел, рассмотренному в статье [1].

Выбирается фазовая траектория, начинающаяся в малой окрестности седла  $M_2$  и заканчивающаяся в узле  $M_3$  (рис. 4, а). Очевидно, что в конечной точке участка фазовой траектории  $M_2M_3$  фазовая скорость  $V_3 = 0$ . Следовательно, на этом участке должна быть точка (пусть  $M_b$ ), фазовая скорость в которой  $V_b$  максимальна. Точка  $M_b$  расположена на границе пятна, а сама граница фазового пятна определяется как геометрическое место точек с такой же скоростью (рис. 4, а).

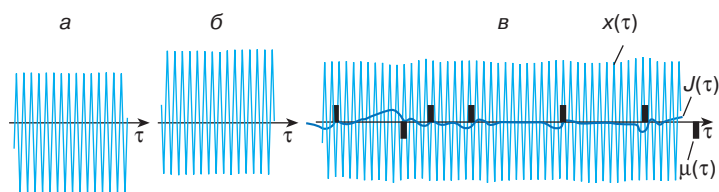
Зависимость характера переходного процесса неуправляемого судна ( $u = 0$ ) от близости фазовой траектории к сепаратрисе изображена на рис. 4, б. Красным цветом выделена узкая полоса, соответствующая допустимому отклонению. Теперь мы можем сформулировать алгоритм эффективной стабилизации судна на курсе. Включать рулевое управление следует как обычно, когда характеризующие отклонение от курса координаты выходят за допустимые пределы. Убирать же руль в нейтральное положение нужно необычно, в момент, после которого состояние судна оказалось бы на сепаратрисе. Естественно, что при этом необходимо разработать алгоритм определения положения сепаратрисы. Описанный подход к созданию авторулевого позволив существенно понизить частоту переключений при улучшении показателей качества управления.

Если использовать наглядный аналог неустойчивого судна (рис. 2, б, в), то удерживание шара в центре ванны сводится к управлению соответственно левой или правой сторонами дна. Эффективность стабилизации возрастет, если при перекачивании шара с одной стороны в другую сбрасывать управление (рис. 2, б) в момент, когда шар окажется на границе  $S$ .

Рассмотрим еще один пример стабилизации неустойчивости – вынужденные колебания нелинейного осциллятора, описываемые уравнением Дуффинга

$$\ddot{x} + 0,2\dot{x} + 2x^3 = F \cos(1,2t). \quad (3)$$

Если амплитуда периодического воздействия  $F < 3,4$ , то симметричные вынужденные колебания устойчивы. При  $F = 3,4$  они становятся неустойчивыми, порождая пару устойчивых, но несимметричных колебательных режимов [4]. Как и в случае судна, можно разработать специальный алгоритм управления, добавив в правую часть системы (3) специальное слагаемое  $\mu(\tau)$ . Назначение алгоритма – отыскание в трехмерном фазовом пространстве



**Рис. 5.** Вынужденные колебания осциллятора Дuffинга: а, б – устойчивые несимметричные колебания; в – режим стабилизации неустойчивых симметричных колебаний

поверхности, разделяющей области притяжения несимметричных режимов. Управляющие воздействия  $\mu(\tau)$  следует занулять именно на этой поверхности.

При отсутствии импульсов управления происходят устойчивые несимметричные колебания одного из двух возможных типов в зависимости от начальных условий (рис. 5, а, б). На рис. 5, в управляющие импульсы прямоугольной формы  $\mu(\tau)$  зачернены. Колебания в промежутках между этими импульсами соответствуют неуправляемым участкам движения, которые достаточно близки к неустойчивым симметричным. Длительность неуправляемых участков оказывается больше длительности управляемых участков примерно на порядок. На рисунке также приведена функция  $J(\tau)$ , характеризующая степень несимметричности колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгин М.И. Особенности поведения динамических систем в окрестности опасных бифуркационных границ // Соросовский Образовательный Журнал. 1999. № 7. С. 122–127.

2. Неймарк Ю.И. Простые математические модели и их роль в постижении мира // Там же. 1997. № 3. С. 139–143.

3. Войткунский Я.И., Першиц Р.Я., Титов И.А. Справочник по теории корабля: Судовые движители и управляемость. Л.: Судостроение, 1973. 511 с.

4. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994. 288 с.

\* \* \*

Марк Исаакович Фейгин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой информатики и автоматизации производственных процессов Волжской государственной академии водного транспорта, заслуженный деятель науки РФ, академик Международной и Российской инженерных академий. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний, теория бифуркаций, динамические системы, системы управления. Автор 140 научных публикаций, одной монографии, нескольких учебных пособий, трех авторских свидетельств.