VELOCITY, DERIVATIVE, DIFFERENTIAL EQUATION

P. B. GUSYATNIKOV

General rules for solving differential equations with constant coefficients are given. Various concepts of the derivative are considered.

Сформулированы общие правила решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для различных содержательных представлений о производной.

СКОРОСТЬ, ПРОИЗВОДНАЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

П. Б. ГУСЯТНИКОВ

Московский физико-технический институт, Долгопрудный Московской обл.

Если спросить естествоиспытателей, какая из математических операций является одним из наиболее распространенных инструментов исследования, то большинство из них, почти не задумываясь, ответит, что это дифференцирование, или операция нахождения производной. В терминах производных формулируются основные законы природы. На основе этих законов составляются дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию подлежащих изучению объектов. Решая полученные дифференциальные уравнения, исследователь имеет возможность достаточно полного описания многих аспектов изучаемых явлений, включая предсказание еще неоткрытых научных фактов. Дифференциальные уравнения, используемые в различных разделах науки и описывающие качественно непохожие друг на друга процессы, внешне одинаковы. Они различаются лишь порядком входящих в них производных и функциональными зависимостями, связывающими эти производные. Все это позволяет абстрагироваться от конкретного содержательного смысла переменных и, рассматривая дифференциальные уравнения как математические объекты, разрабатывать методы их решения.

Таким образом, цепочка, ведущая от содержательной научной задачи к ее математическому исследованию, представляется следующей: исходя из известных эмпирических фактов сформулировать основные законы природы и договориться о моделях явлений, основанных на этих законах; составить дифференциальные уравнения, описывающие исследуемые явления, и решить их. Чтобы начать двигаться вдоль этой цепочки, необходимо прежде всего определить, что понимать под производной.

Большинство исследователей принимают математическую абстракцию бесконечности и связанные с этой абстракцией такие понятия, как бесконечное множество, предел, непрерывность и т.д., и считают, что экспериментальные научные факты (а этих фактов все же конечное, хотя и большое число!) на деле отражают присущие природе аналитические зависимости, в которых независимые переменные могут пробегать такие бесконечные множества, как промежуток числовой прямой или вся числовая прямая $\mathbb{R}$, множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, множество точек многомерного пространства и им подобные. Так выглядят закон всемирного тяготения, закон Кулона и многие другие законы природы. Для ученого, стоящего на таких позициях, функция $f(t)$ независимого переменного $t \in \mathbb{R}$ нередко выражает изменение во времени t некоторой физической величины f. В таком случае величина $\upsilon_{ср}(t_1, t_2) = (f(t_2) - f(t_1))/(t_2 - t_1)$ имеет содержательный смысл. Она называется средней скоростью изменения величины $f(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$. Средняя скорость уже не отражает поведения функции $f(t)$ внутри промежутка $[t_1, t_2]$. Чтобы избежать этого недостатка, вводится понятие мгновенной скорости $\upsilon(t)$ в момент времени t как предел средней скорости $\upsilon_{ср}(t, t + \Delta t)$ при стремлении к нулю длины $|\Delta t|$ отрезка $[t, t + \Delta t]$, на котором эта средняя скорость вычислялась:

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t). \qquad (1)$$

Если предел (1) существует, он называется производной функции $f(t)$ в точке t, а сама функция называется дифференцируемой в точке t. Если мгновенная скорость определена при всех t и непрерывно зависит от t, то и зависимость $f(t)$, и средняя скорость на любом отрезке $[t_1, t_2]$ могут быть восстановлены с помощью операции интегрирования:

$$\upsilon_{ср}(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f'(t)dt}{t_2 - t_1},$$

$$f(t) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f'(t)dt.$$

Данными формулами средняя скорость восстанавливается однозначно, а сама зависимость $f(t)$ – лишь с точностью до постоянной $f(t_1)$. Если найдена зависимость скорости $\upsilon(t)$ от времени t, то можно также поставить задачу о нахождении ускорения $a(t)$, то есть скорости изменения скорости, и решить ее по формуле

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon(t + \Delta t) - \upsilon(t)}{\Delta t} = \upsilon'(t) = f''(t). \qquad (2)$$

В последнем выражении приходится вычислять производную от производной $(f'(t))'$ или, как говорят, вторую производную $f''(t)$ функции $f(t)$. Если ускорение определено (предел в (2) существует) и непрерывно зависит от t, то с помощью операции интегрирования скорость может быть восстановлена с точностью до постоянной. После этого (с точностью до уже двух постоянных !) восстанавливается и сама зависимость $f(t)$. Для точного определения этой зависимости следует задать значения $f(t_1)$ и $\upsilon(t_1) = f'(t_1)$ в некоторый определенный момент времени t_1. При необходимости можно вычислить третью производную $f'''(t)$ как производную от второй производной $(f''(t))'$, а также производные более высоких порядков.

Если операцию (оператор) дифференцирования (нахождения производной) обозначить через D, то есть положить по определению $D(f) = f'$, то известные правила вычисления производной от суммы и произведения двух дифференцируемых функций f и g могут быть записаны в виде

$$D(f + g) = D(f) + D(g),\ D(fg) = D(f)g + fD(g). \qquad (3)$$

В частности, если функция $g = c$ постоянна (принимает одно и то же значение c при всех значениях аргумента t), то

$$D(cf) = cD(f). \qquad (4)$$

Операцию вычисления второй производной f'' записывают как $D(D(f))$ или $D^2(f)$, третью производную – как $D^3(f)$ и т.д.

Наличие между функцией и ее производными указанного выше взаимно однозначного (с точностью до набора постоянных) соответствия позволяет описывать законы природы в виде уравнений, содержащих не только сами функции, но и их производные, то есть в виде дифференциальных уравнений. Так, с использованием производных различных порядков записываются второй закон Ньютона, законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, уравнения Максвелла, уравнение Шрёдингера и многие другие. Решая получившиеся уравнения, мы находим (опять с точностью до набора постоянных) интересующие нас зависимости. Сами же постоянные определить из уравнений невозможно. Для их нахождения следует задать значения искомых функций и (или) их производных некоторых порядков в некоторые моменты времени.

При всей распространенности и общепринятости приведенного выше подхода к исследованию природных зависимостей не меньшего внимания заслуживает и другой подход, который мы условно назовем эмпирическим, а ученого, последовательно придерживающегося этого подхода, – эмпириком. Для эмпирика законы природы – это сами экспериментальные факты, и только они. Поэтому связанные с абстракцией бесконечности зависимости вида $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и приведенные выше процедуры вычисления мгновенной скорости и ускорения, основанные на предельных переходах, для него достаточно бессмысленны. Эмпирик знает, что за всю свою жизнь он да и все человечество вместе с ним смогут провести лишь конечное число измерений. Поэтому если эмпирик и согласится использовать понятие бесконечности, то только лишь в виде бесконечной последовательности, понимая под последней последовательность с очень большим, но все же конечным числом элементов. Погрешности измерительных приборов принципиально не позволят ему рассматривать промежутки времени длины меньшей, чем некоторое число $\gamma > 0$. Поэтому при таком подходе зависимость $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, заменяется на последовательность $f = \{f_k\}$, где $f_k = f(k\gamma)$, $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$, а под скоростью $\upsilon = f'$ понимается последовательность $\upsilon = \{\upsilon_k\}$, где

$$\upsilon_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{\gamma} = \frac{f((k+1)\gamma) - f(k\gamma)}{\gamma}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Оператор дифференцирования D переводит последовательность $f = \{f_k\}$ в последовательность $D(f) = \upsilon = \{\upsilon_k\}$, определяемую формулой (5) и называемую производной f' последовательности f. В соответствии с определением (5) каждая последовательность дифференцируема (имеет производную), а правила дифференцирования имеют вид

$$D(f + g) = D(f) + D(g),$$
$$D(fg) = D(f)g + fD(g) + D(f)\gamma D(g). \quad (6)$$

Первое из этих равенств проверяется тривиально, а второе доказывается следующим образом. Полагая $D(f) = \{\upsilon_k\}$, $D(g) = \{w_k\}$, имеем

$$f_{k+1} = f_k + \gamma\upsilon_k, \qquad g_{k+1} = g_k + \gamma w_k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

$$D(fg) = \left\{\frac{f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k}{\gamma}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{(f_k + \gamma\upsilon_k)(g_k + \gamma w_k) - f_k g_k}{\gamma}\right\} =$$

$$= \{\upsilon_k g_k + f_k w_k + \upsilon_k \gamma w_k\} = D(f)g + fD(g) + D(f)\gamma D(g).$$

Если в доказанном равенстве последовательность $g = c$ постоянна, то есть $g_k = c$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, то выполняется соотношение (4).

Если известна производная $\upsilon = f'$, то сама последовательность f восстанавливается с точностью до постоянной f_0 по формулам $f_k = f_0 - (\upsilon_{-1} + \upsilon_{-2} + ... + \upsilon_k)$ при $k < 0$ и $f_k = f_0 + (\upsilon_0 + \upsilon_1 + ... + \upsilon_{k-1}\}$ при $k > 0$.

По найденной скорости υ (см. (5)) можно найти ускорение a как производную от скорости:

$$a = \{a_k\} = D(\upsilon) = D(D(f)) = D^2(f),$$

где

$$a_k = \frac{\upsilon_{k+1} - \upsilon_k}{\gamma} = \frac{(f_{k+2} - f_{k+1})/\gamma - (f_{k+1} - f_k)/\gamma}{\gamma} =$$

$$= \frac{f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k}{\gamma^2}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Сравнивая формулы дифференцирования (3) и (6), мы видим, что формулы (3) являются частным случаем формул (6) при $\gamma = 0$.

Это означает, что, развивая универсальный математический аппарат дифференцирования, пригодный для каждой из двух приведенных выше познавательных позиций естествоиспытателей, математик обязан считать дифференцирование некоторой операцией, действующей на некоторые дифференцируемые объекты по правилам (6), не запрещая величине γ принимать те или иные значения. Более того, именно исходя из тех же соображений универсальности, предпочтительнее разрабатывать указанный аппарат как чисто алгебраический, взяв за определение дифференцирования именно его свойства типа свойств (6). Подобный формальный подход мы и будем развивать ниже.

Рассмотрим множество K элементов $x, y, z, ...$, в котором заданы две бинарные операции “+” (операция сложения) и “•” (операция умножения). Это означает, что каждой упорядоченной паре x и y элементов множества K поставлены в соответствие два элемента множества K: $x + y$ (сумма элементов x и y) и $x \bullet y$ (произведение элементов x и y, обычно обозначаемое xy). Множество K с операциями сложения и умножения называется кольцом, если выполнены следующие требования:

$$\forall x, y \in K \qquad x + y = y + x$$

(коммутативность сложения),

$$\forall x, y, z \in K \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$$

(ассоциативность сложения),

существует нулевой элемент $\theta = \theta_K$ кольца K такой, что $x + \theta = x$ для любого элемента x из K,

для каждого элемента $x \in K$ существует противоположный элемент $(-x)$, такой, что $x + (-x) = \theta$,

$$\forall x, y, z \in K \qquad x(y + z) = xy + xz, \ (x + y)z = xz + yz$$

(закон дистрибутивности).

Кольцо K называется ассоциативным, если

$$\forall x, y, z \in K \qquad x(yz) = (xy)z$$

(ассоциативность умножения);

коммутативным, если

$$\forall x, y \in K \qquad xy = yx$$

(коммутативность умножения).

Кольцо K называют кольцом с единицей, если существует единичный элемент $1 = 1_K$ кольца K, такой, что $1 \bullet x = x \bullet 1 = x$ для любого элемента x из K.

Разностью $x - y$ элементов кольца называется элемент $x + (-y)$.

Если K – кольцо с единицей, то обратным к элементу $x \in K$ называют такой элемент $x^{-1} \in K$, что $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = 1$. Сам элемент x в таком случае называют обратимым. Если элементы x и y обратимы, то обратим и элемент xy, причем $(xy)^{-1} = y^{-1} \bullet x^{-1}$.

Полем называют ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

В кольце K элементы x и y называются перестановочными, если $xy = yx$. В ассоциативном кольце K натуральная степень произвольного элемента x определяется по индукции так: $x^1 = x$, $x^{n+1} = x \bullet x^n$, $n = 1, 2, ...$ В кольце с единицей для каждого натурального числа n той же буквой n обозначают элемент, равный сумме n слагаемых, каждое из которых равно 1.

Примерами колец являются, например, поле $\mathbb{R}$ действительных чисел и поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел (с обычными операциями сложения и умножения). Навыки работы с действительными и комплексными числами позволяют легко проводить действия и с элементами кольца: законы коммутативности позволяют менять местами слагаемые (сомножители), законы ассоциативности позволяют опускать скобки в сумме (произведении) трех и более слагаемых (сомножителей). Законы дистрибутивности – это привычные правила раскрытия скобок.

Важным понятием, связанным с кольцом K, является понятие многочлена над кольцом K. Пусть n – натуральное число, $a_0, a_1, ..., a_n$ – элементы кольца K, причем a_n – ненулевой элемент.

Выражение

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_n\lambda^n \tag{7}$$

называется многочленом (над кольцом K) n-й степени с коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$. Многочленом нулевой степени называется выражение $P(\lambda) = a_0$, $a_0 \neq \theta$. Многочлен $P(\lambda) = \theta$ называется нулевым (его степень по определению считается равной $-\infty$). Многочлены считаются равными, если равны их степени и соответственно равны коэффициенты. В выражении (7) переменная λ считается некоторой внешней относительно кольца переменной. Поставив в (7) вместо λ любой элемент x ассоциативного кольца K, мы получим элемент $P(x)$ кольца K, вычисляемый по формуле $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$.

Непустое множество $A \subset K$ называется подкольцом кольца K, если A само является кольцом относительно операций, определенных в K. В частности, если A – подкольцо кольца K, то $\theta_A = \theta_K$, а если K – кольцо с единицей и $1_K \in A$, то A – подкольцо с единицей и $1_A = 1_K$.

Если $A_1, A_2, ..., A_k$ – некоторые подмножества кольца K, то их суммой $A_1 + A_2 + ... + A_k$ называют совокупность всех элементов z кольца K, представимых в виде

$$z = y_1 + y_2 + ... + y_k, \tag{8}$$

где $y_1 \in A_1, y_2 \in A_2, y_k \in A_k$.

Сумма множеств $A_1 + A_2 + ... + A_k$ называется прямой и обозначается $A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_k$, если каждый ее элемент z единственным образом представляется в виде (8).

Если A – некоторое подмножество кольца K, b – некоторый элемент кольца K, то под произведением bA понимается совокупность всех элементов z кольца K, представимых в виде $z = bx$, $x \in A$.

Всюду ниже, говоря о кольце K, мы будем предполагать, что K – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Через $K[\lambda]$ будем обозначать совокупность всех многочленов над кольцом K. Если определить сумму и произведение многочленов по обычным школьным правилам почленного умножения, группировки подобных членов и вынесения общих множителей, считая при этом λ некоторой переменной, перестановочной со всеми элементами кольца K, то множество $K[\lambda]$ также оказывается ассоциативным коммутативным кольцом с единицей. Роль нуля в нем играет нулевой многочлен, а роль единицы – многочлен нулевой степени, равный единице кольца K. Многочлены $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ из кольца $K[\lambda]$ назовем взаимно простыми, если в кольце $K[\lambda]$ найдутся такие многочлены $M(\lambda)$ и $N(\lambda)$, что выполнено равенство

$$P(\lambda)M(\lambda) + Q(\lambda)N(\lambda) = 1.$$

Утверждение 1. *Пусть $P_1(\lambda), P_2(\lambda), ..., P_k(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ – многочлены над полем K. Многочлен $Q(\lambda)$ взаимно прост с каждым из многочленов $P_1(\lambda), P_2(\lambda), ..., P_k(\lambda)$ тогда и только тогда, когда он взаимно прост с их произведением $P_1(\lambda)P_2(\lambda)...P_k(\lambda)$.*

Утверждение 2. *Пусть x и y – элементы кольца K, m и n – натуральные числа. Многочлены $(\lambda - x)^m$ и $(\lambda - y)^n$ взаимно просты тогда и только тогда, когда элемент $x - y$ обратим.*

Всякое отображение $F: K \longrightarrow K$ будем называть преобразованием кольца K или сокращенно оператором. По определению, оператор F ставит в соответствие каждому элементу x кольца K некоторый элемент $y = F(x)$ того же кольца. Этот факт будем записывать как $F: x \longrightarrow F(x)$, $x \in K$. Ядром $\operatorname{Ker} F$ оператора F назовем совокупность всех элементов $x \in K$, для которых $F(x) = \theta$. Если $F: K \longrightarrow K$ и $G: K \longrightarrow K$ – два оператора, то под их суммой $F + G$ будем понимать оператор, действующий по правилу $F + G: x \longrightarrow F(x) + G(x)$, $x \in K$. Под произведением FG будем понимать композицию операторов F и G, то есть оператор, действующий по правилу $FG: x \longrightarrow F(G(x))$, $x \in K$. Операторы F и G назовем перестановочными, если $FG = GF$, то есть $F(G(x)) = G(F(x))$ для любого элемента x кольца K. Буквой I будем обозначать тождественное преобразование кольца K: $I: x \longrightarrow x$, $x \in K$. Для каждого элемента c кольца K под произведением cF элемента c на оператор F будем понимать оператор, действующий по правилу $cF: x \longrightarrow cF(x)$, $x \in K$.

Если $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_n\lambda^n$ – многочлен над кольцом K, $F: K \longrightarrow K$ – некоторый оператор, то под $P(F)$ будем понимать оператор $P(F) = a_0I + a_1F + ... + a_nF^n$, получаемый формальной подстановкой оператора F вместо λ в соотношение (7).

Оператор $\Phi: K \longrightarrow K$ назовем морфизмом (кольца K), если для любых двух элементов x и y кольца K выполнены равенства

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y), \qquad \Phi(xy) = \Phi(x) \bullet \Phi(y).$$

Теперь мы можем определить, что в дальнейшем будем понимать под дифференцированием.

Пусть K – некоторое кольцо. Оператор $D: K \longrightarrow K$ назовем дифференцированием (кольца K), если существует элемент γ кольца K, такой, что для всех элементов f и g кольца K выполнены равенства (6), а также соотношения

$$D(1) = \theta, \qquad D(\gamma) = \theta. \tag{9}$$

В дальнейшем будем считать, что и кольцо K и оператор D дифференцирования кольца K фиксированы, и через K_D обозначать ядро $\operatorname{Ker} D$ оператора D. Элементы этого ядра назовем константами (оператора дифференцирования D). Единица 1 кольца K и элемент γ в соответствии с (9) являются константами. Из равенств $D(f) = D(f + \theta) = D(f) + D(\theta)$ следует, что $D(\theta) = \theta$. Поэтому константой является и нуль кольца K. Используя второе из равенств (6), легко убедиться, что для произвольной константы c оператора дифференцирования D и любого элемента f кольца K выполняется равенство (4).

Утверждение 3. *Ядро K_D оператора дифференцирования D кольца K является кольцом (подкольцом кольца K). Если c – обратимая константа оператора D, то c^{-1} – также константа оператора D.*

Утверждение 4. *Пусть $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ – два многочлена над кольцом K_D, $S(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda)$ и $T(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda)$ – соответственно сумма и произведение этих многочленов. Тогда оператор $S(D)$ является суммой операторов $P(D)$ и $Q(D)$, а оператор $T(D)$ – произведением (композицией) перестановочных операторов $P(D)$ и $Q(D)$.*

Пусть

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n \tag{7}$$

есть произвольный многочлен n-й степени над кольцом K_D. Уравнение

$$a_0 y + a_1 D(y) + \dots + a_n D^n(y) = \theta \tag{*}$$

относительно неизвестного элемента y кольца K будем называть линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами, а многочлен $P(\lambda)$ – характеристическим многочленом этого уравнения. Более коротко уравнение (*) можно записать в виде

$$P(D)(y) = \theta. \tag{10}$$

Задача нахождения всех решений уравнения (10) эквивалентна отысканию ядра оператора $P(D)$. Формулу, описывающую множество всех решений уравнения (10) и только их, будем называть общим решением уравнения (10).

Теорема 1. *Пусть многочлены $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, ..., $P_m(\lambda)$ над кольцом K_D попарно взаимно просты, а многочлен $P(\lambda)$ является их произведением. Тогда*

$$\operatorname{Ker} P(D) = \operatorname{Ker} P_1(D) \oplus \operatorname{Ker} P_2(D) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} P_m(D).$$

Теорема 1 позволяет свести решение уравнения (10) к двум задачам. Первая из них – это алгебраическая задача разложения характеристического многочлена $P(\lambda)$ на наиболее просто устроенные попарно взаимно простые множители $P_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Вторая задача – отдельное решение каждого из уравнений $P_j(D)(y) = \theta$, $j = 1, 2, \dots, m$, с последующим сложением множеств решений всех этих уравнений.

Наиболее просто устроены многочлены первой степени вида $P(\lambda) = \lambda - c$, где c – константа оператора D, и их степени $(\lambda - c)^k$, поэтому прежде всего займемся решением уравнений

$$D(y) = cy, \tag{11}$$

$$(D - cI)^k(y) = \theta. \tag{12}$$

Константу c оператора D назовем спектральной, если уравнение (11) имеет обратимое решение. Для каждой спектральной константы c зафиксируем обратимое решение уравнения (11) и обозначим его $\operatorname{Exp} D(c)$.

Утверждение 5. *Если c – спектральная константа, то константа $(1 + \gamma c)$ обратима. Множество всех решений уравнения (11) дается формулой $\operatorname{Exp} D(c) K_D$. Иными словами, общее решение уравнения (11) дается формулой $y = b \operatorname{Exp} D(c)$, где b – произвольная константа оператора D.*

Возможность решения уравнения (12) при $k > 1$ напрямую связана с наличием в кольце K некоторого элемента, который назовем аргументом оператора дифференцирования D и обозначим t_D. Именно, аргументом t_D оператора D назовем всякий элемент кольца K, удовлетворяющий равенству $D(t_D) = 1$. Ясно, что аргумент оператора D определен с точностью до константы. Ниже будем предполагать, что аргумент оператора D существует и зафиксируем его.

Будем также предполагать, что, каково бы ни было натуральное число n, соответствующий элемент n кольца K обратим.

Теорема 2. *Пусть c – спектральная константа. Тогда при любом натуральном k ядро оператора $(D - cI)^k$ имеет вид*

$$\operatorname{Ker}(D - cI)^k = \operatorname{Exp} D(c)(K_D \oplus t_D K_D \oplus \dots \oplus (t_D)^{k-1} K_D).$$

В соответствии с этой теоремой все решения уравнения (12) (при условии, что c – спектральная константа) и только они представимы (причем единственным образом!) в виде $y = \operatorname{Exp} D(c) M(t_D)$, где $M(\lambda)$ – произвольный многочлен степени не выше $k - 1$ над кольцом K_D.

Из теорем 1 и 2 и утверждения 2 вытекает следующая

Теорема 3. *Пусть многочлен $P(\lambda)$ над кольцом K_D представим в каноническом виде*

$$P(\lambda) = (\lambda - c_1)^{r_1}(\lambda - c_2)^{r_2} \dots (\lambda - c_m)^{r_m}, \tag{13}$$

где c_j – спектральные константы, r_j – натуральные числа, $j = 1, 2, \dots, m$. Пусть каждая из констант $(c_j - c_i)$, $1 \le i < j \le m$, обратима. Тогда общее решение уравнения (10) дается формулой

$$y = \operatorname{Exp} D(c_1) M_1(t_D) + \operatorname{Exp} D(c_2) M_2(t_D) + \dots$$
$$\dots + \operatorname{Exp} D(c_m) M_m(t_D), \tag{14}$$

где $M_j(\lambda)$ – произвольные многочлены степени не выше $r_j - 1$ над кольцом K_D, $j = 1, 2, ..., m$.

Перейдем к рассмотрению примеров. Рассмотрим морфизм Φ кольца K. Ассоциированным этому морфизму назовем оператор $D = \Phi - I$.

Утверждение 6. *Оператор $D = \Phi - I$, ассоциированный морфизму Φ, является дифференцированием кольца K, причем в* (6) $\gamma = 1$.

Константами морфизма назовем назовем константы ассоциированного этому морфизму оператора дифференцирования. Множество всех констант морфизма Φ в соответствии с утверждениями 6 и 3 является подкольцом кольца K. Это подкольцо обозначим K^Φ. Каждая константа b морфизма Φ удовлетворяет равенству $\Phi(b) = b$. Аргументом t^Φ морфизма Φ назовем аргумент t_D ассоциированного оператора D. Аргумент морфизма определяется равенством $\Phi(t^\Phi) = t^\Phi + 1$.

Рассмотрим произвольный многочлен $Q(\lambda)$ над кольцом K^Φ и уравнение

$$Q(\Phi)(y) = \theta \qquad (15)$$

относительно неизвестного элемента y кольца K. Многочлен $Q(\lambda)$ назовем характеристическим многочленом уравнения (15). Если в уравнение (15) подставить $\Phi = D + I$ (D – оператор дифференцирования, ассоциированный морфизму Φ), раскрыть скобки и перегруппировать слагаемые, то получится дифференциальное уравнение вида (10), в котором $P(\lambda) = Q(\lambda + 1)$. Это наблюдение позволяет перенести на уравнение (15) результаты теоремы 3.

Константу b морфизма Φ назовем спектральной, если уравнение

$$\Phi(y) = by \qquad (16)$$

имеет обратимое решение. Зафиксируем это обратимое решение и обозначим его $\mathrm{Exp}\Phi(b)$.

Утверждение 7. *Константа b морфизма Φ является спектральной тогда и только тогда, когда константа $b - 1$ является спектральной константой ассоциированного морфизму Φ оператора дифференцирования D. При этом соответствующие обратимые решения можно зафиксировать так, что* $\mathrm{Exp}\Phi(b) = \mathrm{Exp}\,D(b-1)$.

Теорема 4. *Пусть многочлен $Q(\lambda)$ над кольцом K^Φ представим в каноническом виде*

$$Q(\lambda) = (\lambda - b_1)^{r_1}(\lambda - b_2)^{r_2}...(\lambda - b_m)^{r_m}, \qquad (17)$$

где b_j – спектральные константы морфизма Φ, r_j – натуральные числа, $j = 1, 2, ..., m$. Пусть каждая из констант $(b_j - b_i)$, $1 \le i < j \le m$, обратима. Тогда общее решение уравнения (15) *дается формулой*

$$y = \mathrm{Exp}\Phi(b_1)M_1(t^\Phi) + \mathrm{Exp}\Phi(b_2)M_2(t^\Phi) + ...$$
$$... + \mathrm{Exp}\Phi(b_m)M_m(t^\Phi), \qquad (18)$$

где $M_j(\lambda)$ – произвольные многочлены степени не выше $r_j - 1$ над кольцом K^Φ, $j = 1, 2, ..., m$.

Применим результаты теоремы 4 к решению так называемых рекуррентных уравнений.

Рассмотрим кольцо K всех комплекснозначных последовательностей $f = \{f_k\}$, где $f_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, ...\}$ с обычными операциями почленного сложения и умножения последовательностей. Нулем этого кольца является последовательность, все члены которой – нули, а единицей – последовательность, все члены которой – единицы. Рассмотрим преобразование Φ кольца K, которое каждой последовательности $f = \{f_k\}$ ставит в соответствие последовательность $g = \{g_k\}$, в которой $g_k = f_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Это преобразование является морфизмом кольца K. Константами морфизма Φ являются все постоянные последовательности. Каждую такую последовательность условимся отождествлять с тем комплексным числом, которому равны все ее члены. Аргументом морфизма является последовательность $t = \{t_k\}$, в которой $t_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Уравнение (16) для неизвестной последовательности $y = \{y_k\}$ принимает вид $y_{k+1} = by_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Это уравнение имеет обратимое решение $\mathrm{Exp}(b) = \{b^k\}$ для любой константы b, неравной нулю. Поэтому спектральными константами морфизма Φ являются все ненулевые постоянные последовательности.

Зафиксируем теперь комплексные числа $d_0, d_1, ...$ $..., d_n$, $d_0 \ne 0$, $d_n \ne 0$, и поставим задачу найти все последовательности $y = \{y_k\}$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$d_0y_k + d_1y_{k+1} + ... + d_ny_{k+n} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}. \qquad (19)$$

Используя введенный выше морфизм Φ, перепишем это соотношение в виде уравнения вида (15), в котором $Q(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + ... + d_n\lambda^n$. В соответствии с теоремой 4 далее следует поступить следующим образом. Нужно представить характеристический многочлен $Q(\lambda)$ в каноническом виде (17) и написать ответ (см. (18))

$$y_k = (b_1)^kM_1(k) + (b_2)^kM_2(k) + ... + (b_m)^kM_m(k),$$
$$k \in \mathbb{Z}, \qquad (20)$$

где $M_j(\lambda)$ – произвольные многочлены с постоянными коэффициентами степени не выше $r_j - 1$, $j = 1, 2, ..., m$.

Рассмотрим в качестве примера рекуррентное уравнение

$$y_k - y_{k+1} - y_{k+2} + y_{k+3} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Характеристический многочлен этого уравнения

$$Q(\lambda) = 1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

В соответствии с формулой (20) решениями рекуррентного уравнения являются все последовательности вида

$$y_k = (1)^k(A + Bk) + (-1)^kC = A + Bk + (-1)^kC, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где A, B, C – произвольные фиксированные комплексные числа.

Теорема 3 применима и к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим кольцо K всех бесконечно дифференцируемых функций $f = \{f(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ с обычными операциями сложения и умножения функций. Нулем θ этого кольца является функция, равная нулю при всех t, а единицей кольца является функция, равная 1 при всех значениях t. Обозначим через D преобразование этого кольца, ставящее в соответствие каждой функции f ее производную f'. В соответствии с формулами дифференцирования (3) преобразование D является дифференцированием. Оно удовлетворяет требованиям (6), (9) при $\gamma = 0$. Константами оператора D являются постоянные функции. Аргументом оператора D является функция $f(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Эту функцию будем обозначать той же буквой t. Каждая константа c оператора D является спектральной, причем $\operatorname{Exp} D(c)$ есть функция e^{ct}, $t \in \mathbb{R}$. В соответствии с теоремой 3 для решения дифференциального уравнения (10) следует выписать характеристический многочлен этого уравнения, представить его в каноническом виде (13), в котором $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — все попарно различные корни характеристического многочлена, и записать ответ (см. (14)):

$$y(t) = e^{c_1 t} M_1(t) + e^{c_2 t} M_2(t) + \ldots + e^{c_m t} M_m(t), \qquad (21)$$

где $M_j(\lambda)$ — произвольные многочлены с постоянными коэффициентами степени не выше $r_j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Решим в качестве примера уравнение

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Характеристический многочлен этого уравнения

$$P(\lambda) = 1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

В соответствии с формулой (21) общее решение этого уравнения

$$y(t) = e^t(A + Bt) + Ce^{-t},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
2. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.

* * *

Петр Борисович Гусятников, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института. Область научных интересов – теория оптимального управления, дифференциальные игры, теория дифференциальных уравнений, контактная гидродинамика. Автор более 80 публикаций, в том числе трех книг и нескольких учебных пособий.