NEW LIGHT ON THE QUADRATIC TRINOMIAL

E. M. BRONSHTEIN

The elementary nonlinear function, the quadratic trinomial, allows to find many unexpected effects, in particular transition to chaos. M. Feigenbaum has discovered many of these effects.

Простейшая нелинейная функция – квадратный трехчлен – позволяет обнаружить многие неожиданные эффекты, в частности переход к хаосу. Многие из этих явлений открыл М. Фейгенбаум.

НОВОЕ О КВАДРАТНОМ ТРЕХЧЛЕНЕ

Е. М. БРОНШТЕЙН

Уфимский государственный авиационный технический университет

ЦИКЛЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ФУНКЦИЯМИ

В этом разделе речь пойдет о произвольной непрерывной функции $f(x)$. При численном решении уравнения

$$f(x) = x \qquad (1)$$

обычно применяется метод последовательных приближений, суть которого в следующем. Задавшись произвольным числом x_0, формируют итерационную последовательность $x_1 = f(x_0)$, ..., $x_{k+1} = f(x_k)$, ... Если эта последовательность сходится, то непременно к корню x^* уравнения (1). Обратно, если в некоторой окрестности корня x^* функция $f(x)$ имеет производную, не превосходящую по модулю 1, то сформированная последовательность (при x_0, достаточно близком к x^*) сходится к x^*. Характер сходимости иллюстрируют так называемые диаграммы Ламерея (рис. 1). На этом рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = x$. Последовательность строится так. На оси Ox отмечается точка x_0, затем на графике $y = f(x)$ отмечается соответствующая точка. Затем с помощью графика $y = x$ на оси Ox строится точка x_1 и т.д.

Типичный пример такого процесса – приближенное вычисление значения $\sqrt{x}$ как корня уравнения $(x + 1/x)/2 = x$, то есть предела последовательности $x_{n+1} = (x_n + 1/x_n)/2$ при произвольном

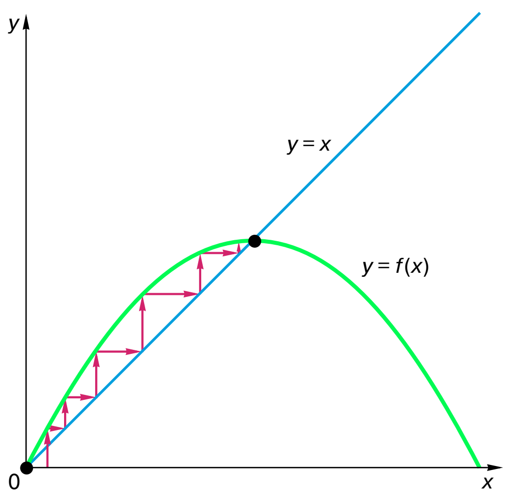

Рис. 1

положительном x_0. Важно, что при этом применяются только четыре арифметических действия.

Корни уравнения (1) называются неподвижными точками функции $f(x)$. Обычно не задаются вопросом: а что, если последовательность x_k не сходится? Это так, если производная функция $f(x)$ в точке x^* по модулю больше единицы и $x_0 \neq x^*$. Поведение последовательности x_k в этом случае может быть весьма интересным и разнообразным. В частности, значения x_k могут циклически повторяться. Именно эта ситуация важна для дальнейшего.

Функция $f(x)$ порождает цикл длины n, если найдутся числа $x_1, x_2, ..., x_n$ такие, что

$$f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3,\ ...,\ f(x_{n-1}) = x_n,\ f(x_n) = x_1. \quad (2)$$

Тем самым цикл первого порядка – это неподвижная точка.

Геометрически (при $n = 6$) эта ситуация отображена на рис. 2. Разумеется, точки x_i лежат на одной прямой, но удобнее изображать их на плоскости. Стрелки изображают "деятельность" функции $f(x)$.Очевидно, что в этом случае функция $f(x)$ порождает циклы длин $2n$, $3n$, ...; в этих циклах точки $x_1, x_2, ..., x_n$ повторяются.

Для дальнейшего удобно ввести обозначение $f_k(x) = f(f(...f(x)...))$, где в правой части функция f вычисляется k раз. В этих обозначениях точка p входит в цикл n-го порядка, если справедливо равенство $f_n(p) = p$.

Очевидны следующие полезные равенства:

$$f_{m+n}(x) = f_m(f_n(x)) = f_n(f_m(x)).$$

Цикл, порождаемый функцией, может быть притягивающим – аттрактором (от англ. to attract). Это означает, что при любом начальном значении c последовательность $\{f_k(c)\}$ приближается к точкам цикла. Точная формулировка этого интуитивно понятного утверждения имеет вид

$$\lim_{s\to\infty} f_{ns}(a) = x_1, \qquad \lim_{s\to\infty} f_{ns+1}(a) = x_2, \ ...$$
$$..., \lim_{s\to\infty} f_{ns-1}(a) = x_n$$

при подходящем выборе первой точки цикла.

Разумеется, цикл может и не быть аттрактором.

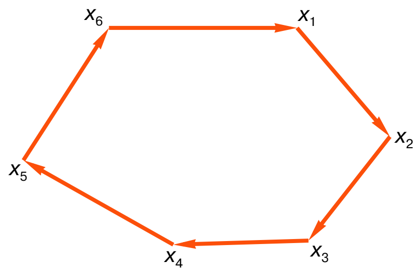

Рис. 2

Если функция $f(x)$ дифференцируемая, то во всех точках цикла n-го порядка производные функции $f_n(x)$ равны. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции, как следует из (2), $f'_n(x_i) = f'(x_1)f'(x_2)...f'(x_n)$ и тем самым производная не зависит от i.

ЦИКЛЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПОРОЖДАЕМЫЕ КВАДРАТНЫМ ТРЕХЧЛЕНОМ

На рубеже 70–80-х годов физик-теоретик из Лос-Аламосской лаборатории Калифорнийского университета М. Фейгенбаум [1] исследовал структуру циклов, порождаемых некоторыми нелинейными функциями, и обнаружил очень интересные эффекты. Простейшей из таких функций является, казалось бы, хорошо изученный квадратный трехчлен.

Обозначим через $g(x, a)$ семейство квадратных трехчленов вида $ax(1 - x)$, зависящее от параметра a. Нас будет интересовать поведение функций $g(x, a)$ только на отрезке [0, 1]. Для дальнейшего важно, что при $a \in [0, 4]$ значения всех трехчленов $g(x, a)$ на этом отрезке также принадлежат отрезку [0, 1]. Графики всех этих функций симметричны относительно прямой $x = 1/2$.

При $a \in [0, 1]$ функция $g(x, a)$ имеет одну неподвижную точку 0, которая является аттрактором. Ситуация меняется при $a = 1$. При $a > 1$ функция $g(x, a)$ имеет две неподвижные точки 0 и $1 - 1/a$: первая становится отталкивающей, а вторая – аттрактор. Наглядно процесс сходимости при $a = 2$ приведен на рис. 1. Но точка $1 - 1/a$ является аттрактором, только пока $a < 3$ – при больших значениях a производная функции $g(x, a)$ в точке $1 - 1/a$ меньше -1.

Для того чтобы понять, что происходит при переходе через значение $a = 3$, рассмотрим одновременно графики функций $g(x, a)$ и $g_2(x, a)$:

$$g_2(x, a) = g(g(x, a), a) = a \times g(x, a) \times (1 - g(x, a)) =$$
$$= a \times (ax(1 - x)) \times (1 - ax(1 - x)).$$

Отсюда $g_2(x, a)$ – многочлен четвертой степени, график его при a, несколько большем 3, приведен на рис. 3, *б*. У функции $g_2(x, a)$ четыре неподвижные точки: естественно, две из них $(0, 1 - 1/a)$ являются неподвижными для функции $g(x, a)$, две другие x_1^* и x_2^* возникают вблизи точки $1 - 1/a$. При возврате к функции $g(x, a)$ мы видим, что эти точки образуют цикл второго порядка. Производные функции $g_2(x, a)$ в этих точках по предыдущему равны и не превосходят 1 по модулю. Это значит, что для функции $g_2(x, a)$ они являются аттракторами, поэтому и соответствующий цикл второго порядка функции $g(x, a)$ – аттрактор. Все эти свойства иллюстрирует рис. 3.

При $a = a_1 = 3$ произошло удвоение цикла – из цикла первого порядка возник цикл второго порядка, причем свойство притяжения перешло к этому

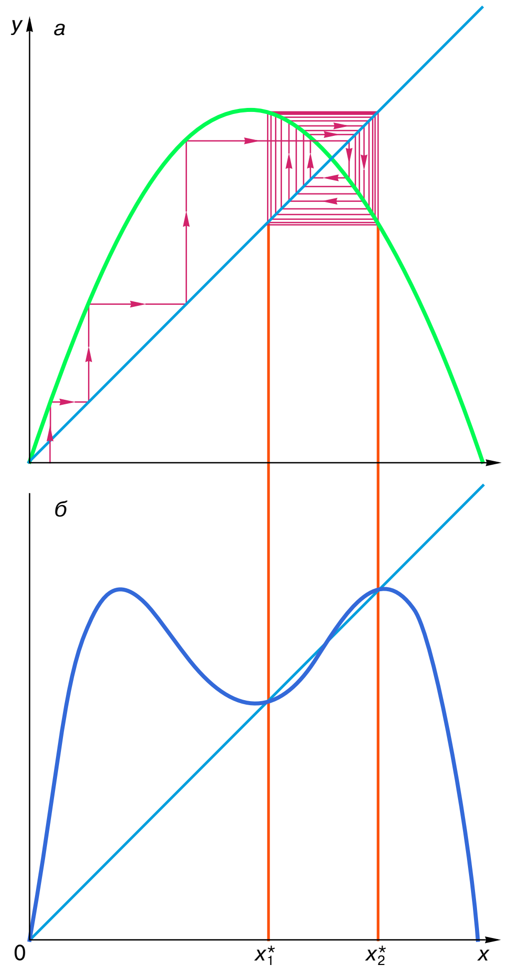

Рис. 3

новому циклу. Такие значения параметра a называются точками бифуркации.

ДАЛЬНЕЙШИЕ УДВОЕНИЯ ЦИКЛОВ

Что происходит при дальнейшем росте параметра a? Здесь необходимо рассматривать уже три функции: $g(x, a)$, $g_2(x, a)$ и $g_4(x, a)$. Последняя из этих функций является (по x) многочленом 16-й степени. Ее неподвижными точками до значения параметра $a = a_2 = 1 + \sqrt{6}$ являются только четыре неподвижные точки функции $g_2(x, a)$. При $a = a_2$ происходит следующий акт нашего спектакля – производные функции $g_2(x, a)$ в точках x_1^* и x_2^* становятся равными -1 и при дальнейшем росте a вблизи каждой из них возникают пары неподвижных точек функции $g_4(x, a)$. Для функции $g_2(x, a)$ эти точки образуют два устойчивых цикла второго порядка, а для функции $g(x, a)$ – устойчивый цикл четвертого порядка.

Механизм дальнейшего развития событий аналогичен: при некотором значении параметра $a = a_n$ (очередная точка бифуркации) устойчивый цикл порядка 2^{n-1} функции $g(x, a)$ расщепляется на два, которые вместе образуют цикл порядка 2^n. При этом “старый” цикл теряет свойства аттрактора, передав их своему детищу.

Возникает интригующий вопрос. Возможно одно из трех:

1) процесс удвоения циклов происходит только до некоторого значения n;

2) точки бифуркации существуют при всех n, но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ конечен.

Что именно справедливо? Ответ: третье. Причем, оказывается, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 4$. Тем самым функция $4x(1 - x)$ имеет циклы порядков 2^m при всех натуральных m. О том, что это означает, чуть ниже, а пока опишем свойства последовательности точек бифуркации $\{a_n\}$.

М. Фейгенбаум экспериментально установил, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n},$$

то есть последовательность разностей точек бифуркаций при больших n ведет себя почти как геометрическая прогрессия. Значение этого предела оказалось равным приблизительно 4,669 201 6. Казалось бы, что в этом интересного? Но Фейгенбаум вычислил аналогичные пределы и для других функций (не только одной переменной), допускающих удвоение периода, и обнаружил поразительный факт: при очень широких предположениях эти пределы совпадают. Например, это так для функции $a\sin\pi x$.

Тем самым открыта новая универсальная мировая константа – она называется константой Фейгенбаума. Фейгенбаум открыл и другие универсальные явления, связанные с удвоением циклов. В частности, соответствующим образом масштабированные кусочки графиков функций $g_{2^n}(x, a_n)$ в окрестности точек максимума или минимума сходятся к графику некоторой универсальной функции, не зависящей от g, – лишь бы было удвоение периода. Подробное рассмотрение этого эффекта находится за рамками данной статьи.

ПОРЯДОК И ХАОС

Вернемся к вопросу о поведении функций $g(x, a)$ при $a > \lim a_n$, в частности функции $g(x) = 4x(1 - x)$. Эти функции в определенном смысле порождают хаос. Кстати, это еще до Фейгенбаума было обнаружено Ли и Йорке [2].

Хаотическое поведение понимается следующим образом. Некоторые точки отрезка [0, 1] попадают в циклы, порожденные функцией $g(x, a)$. Множество S таких точек счетное.

Для любых двух различных точек $p, q \notin S$ выполняются соотношения

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |g_n(p) - g_n(q)| > 0,$$
$$\underline{\lim_{n \to \infty}} |g_n(p) - g_n(q)| = 0.$$

Первое из этих условий означает, что последовательности $g_n(p)$, $g_n(q)$ при некоторых сколь угодно больших n отделены одна от другой, второе – что при некоторых сколь угодно больших n сближаются сколь угодно близко.

Далее при $p \notin S$, $q \in S$ $\quad \underline{\lim_{n \to \infty}} |g_n(p) - g_n(q)| > 0.$

Это означает, что ни один цикл не является аттрактором.

Принципиально важно, что мы не можем вычислять абсолютно точно. Из приведенных условий следует, что самая ничтожная погрешность вычислений резко меняет поведение последовательности $g_n(x)$. Если есть аттрактор, то погрешность вычисления ничего не меняет – все равно мы к нему приблизимся. Непредсказуемость поведения последовательности $g_n(x)$ создает предпосылки для ее вероятностного описания. Ситуация здесь аналогична [3] – казалось бы, детерминированный процесс адекватно описывается в вероятностных терминах.

На первый взгляд представляется, что порядок и хаос отделены друг от друга. В первом случае есть аттрактор, во втором его нет. Но все здесь не так просто. Если аттрактором является цикл порядка $2^{10\,000}$, то можно сказать наверняка, что человечество никогда не обнаружит его. Просто не хватит ресурсов. То есть граница между порядком и хаосом практически оказывается размытой. Это аналогично знаменитому парадоксу кучи: одно зерно не куча; если к множеству зерен, не являющемуся кучей, добавить еще одно, то кучи мы не получим и тем не менее кучи существуют. Разрешение этого парадокса в том, что есть такие множества зерен, про которые нельзя однозначно сказать, кучи они или нет. Так и в нашем случае: при достаточно больших аттракторах поведение последовательности фактически является хаотическим.

ЦИКЛЫ ДРУГИХ ПОРЯДКОВ

Мы проанализировали циклы порядка 2^n, порождаемые функциями. Но, очевидно, функция может иметь циклы и других порядков. И здесь справедлив еще один поразительный факт. Расположим все натуральные числа несколько странным образом:

$$3, \quad 5, \ldots, 3 \times 2, \quad 5 \times 2, \ldots, 3 \times 2^2, \quad 5 \times 2^2, \ldots$$
$$\ldots, 3 \times 2^3, \quad 5 \times 2^3, \ldots, 2^3, \quad 2^2, \quad 2, \quad 1.$$

Если непрерывная функция $f(x)$ порождает цикл какого-либо порядка, то она порождает и циклы всех последующих порядков из этой последовательности. То есть, например, если функция порождает цикл третьего порядка, то она порождает циклы всех порядков. Этот результат был получен в 1964 году киевским математиком А.Н. Шарковским и переоткрыт в 1973 году американскими математиками Н. Метрополисом, М. Стейном и П. Стейном (он упоминается также в [4]). Американские исследователи назвали эту последовательность U-последовательностью (от universal – универсальный). Фейгенбаум отмечает, что эта работа стимулировала его исследования. То есть бесконечное удвоение циклов, порождаемых функцией $g(x, a)$, – это только начало. При $a = 4$ существует цикл третьего порядка, а значит, и циклы всех порядков.

Для того чтобы лишний раз продемонстрировать глубинные взаимосвязи между разными разделами математики, приведу приложение изложенных подходов к элементарной теории чисел.

Пусть $P(x)$ – многочлен k-й степени. Опишем методику нахождения циклов различных порядков, порождаемых $P(x)$. При этом мы считаем многочлен комплексным, вся теория годится и для этого случая. Неподвижными точками $P(x)$ являются корни многочлена $Q^1(x) = P(x) - x$. Для того чтобы найти циклы второго порядка, необходимо найти корни уравнения $P_2(x) - x = 0$. Среди его корней будут и неподвижные точки $P(x)$. Точки, входящие в циклы второго порядка и не являющиеся неподвижными, являются корнями многочлена $Q^2(x) = (P_2(x) - x)/ Q^1(x)$. Продолжая, получим: в циклы только n-го порядка, порождаемые $P(x)$, входят корни многочлена

$$Q^n(x) = (P_n(x) - x) / \prod_{i \,\vdots\, n,\, i \neq n} Q_i(x).$$

Здесь, как обычно, $i \,\vdots\, n$ означает, что i является делителем n. Отсюда следует, что число корней многочлена $Q^n(x)$ кратно n. Пусть a_n – степень многочлена $Q^n(x)$. Числа a_n определяются по индуктивному правилу $a_1 = k$, $a_n = k^n - \sum_{i \,\vdots\, n,\, i < n} a_i$ при $n > 1$. Поскольку число корней многочлена $Q^n(x)$ кратно n, то a_n делится на n.

Этот факт интересен сам по себе. К тому же из него легко следует широко известная малая теорема Ферма: если число n простое и k не делится на n, то $n \,\vdots\, (k^{n-1} - 1)$.

Аналогичные итеративные построения с удвоением периода в двумерном случае часто приводят к очень красивым и необычным множествам – фракталам. Более подробно с ними можно познакомиться в цитированной статье В.В. Жикова [4].

Подобные эффекты возникают и в других системах, например описываемых дифференциальными уравнениями. Введение в эту теорию см. в [5]. Соображения о взаимосвязи порядка и хаоса (это необязательно связано с процессом удвоения периода) играют важную роль в современных исследованиях самой разной природы. Качественному описанию этих процессов в современной физике посвящена работа [6].

В статье затронуты только математические аспекты теории удвоения периода. Подобные явления нелинейной динамики возникают во многих реальных процессах. М. Фейгенбаум отмечает, что именно так происходит переход к одному из основных явлений гидродинамики – турбулентности. Колебания, приводящие к хаосу, часто встречаются в физиологии. Обзор этих процессов см. в [7]. И везде проявляются универсальности, открытые Фейгенбаумом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Feigenbaum M.J.* Universal Behavior in Nonlinear Systems // Los Alamos Sci. 1980. Vol. 1, № 1. P. 4–27 (рус. пер.: *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, № 2. С. 343–374).
2. *Li T.-Y.*, *Yorke J.A.* Period Three Implies Chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82. P. 982–985.
3. *Брусин В.А.* "Склеенные" динамические системы, скользящие режимы и вероятности // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 3. С. 118–122.
4. *Жиков В.В.* Фракталы // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 12. С. 110–115.
5. *Белых В.Н.* Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 1. С. 115–121.
6. *Маневич Л.И.* Обратимость и стрела времени: между порядком и хаосом. // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. Ч. I. № 11. С. 64–69; Ч. II. № 12. С. 79–83.
7. *Гласс Л.*, *Мэки М.* От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.

* * *

Ефим Михайлович Бронштейн, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и кибернетики Уфимского государственного авиационного технического университета. Область научных интересов – выпуклый анализ и финансовая математика. Автор более 80 научных статей и учебных пособий.