THE PAINLEVE PROPERTY IN THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

N. A. KUDRYASHOV

This paper is devoted to intensive studied part of the theory of differential equations called the Painleve analysis. A short introduction to the analytical theory of differential equations is given. The connection of the Painleve property with nonlinear partial differential equations is discussed.

В статье рассмотрен интенсивно развивающийся раздел нелинейной математической физики, связанный со свойством Пенлеве для дифференциальных уравнений. Дается краткое введение в аналитическую теорию дифференциальных уравнений. Обсуждается связь свойства Пенлеве и нелинейных уравнений в частных производных, имеющих солитонные решения.

© Кудряшов Н.А., 1999

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. КУДРЯШОВ

Московский инженерно-физический институт (технический университет)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При решении различных задач естествознания исследователи часто используют язык математики, с помощью которого разрабатываются математические модели явлений. С этой целью для математического описания вводятся количественные характеристики – зависимые и независимые переменные, соотношения между которыми и составляют основу математической модели. При формулировке математических моделей прежде всего принимаются во внимание законы сохранения, в которых, как правило, содержатся производные от переменных. Это обстоятельство приводит к дифференциальным уравнениям, решение которых с учетом начальных и граничных условий позволяет представить эволюцию процесса во времени и его изменения в пространстве. Сформулируем основные понятия, относящиеся к дифференциальным уравнениям [1].

Определение 1. *Дифференциальным уравнением* называется такое уравнение, у которого неизвестным является функция от одной или нескольких переменных, причем в уравнение входит не только функция, но и производные.

Основной вопрос, возникающий в теории дифференциальных уравнений, состоит в том, имеет ли решение заданное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим этот вопрос на примере уравнения первого порядка, имеющего вид

$$x_t = f(t, x). \qquad (1)$$

Здесь t – независимая переменная, x – неизвестная функция, x_t – производная функции x по t, f – функция двух переменных t и x. Функция f, которая входит в дифференциальное уравнение (1), может быть задана не для всех значений своих аргументов t и x, а лишь в точках некоторого множества Γ. Предполагается, что множество Γ открыто. Это означает, что наряду с каждой точкой этого множества в Γ входит и некоторый круг с центром в этой точке. Относительно функции f также предполагается, что она сама и ее частная производная f_x являются непрерывными функциями переменных t и x на всем множестве Γ.

Определение 2. *Решением уравнения* (1) называется такая функция $x = \varphi(t)$ независимого переменного t, определенная на некотором интервале $t_0 < t < t_1$, что при ее подстановке в (1) мы получаем тождество на всем интервале.

Для того чтобы такая подстановка была возможной, необходимо, чтобы функция $\varphi(t)$ на всем интервале имела первую производную и чтобы точка с координатами (t, φ) принадлежала множеству Γ. Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) геометрически можно представить на плоскости переменных t и x в виде кривой с уравнением $x = \varphi(t)$. Эта кривая в каждой точке имеет касательную и называется интегральной кривой уравнения (1).

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1)

Каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, и поэтому можно ставить вопрос, во-первых, о нахождении всей совокупности решений $x(t)$ и, во-вторых, о нахождении решения, проходящего через заданную точку (t_0, x_0) множества Γ. Последняя задача называется задачей Коши, и для уравнения (1) она решается следующей теоремой существования и единственности, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1. *Пусть функция $f(t,x)$ дифференциального уравнения задана на некотором открытом множестве* Γ *переменных t и x и пусть f и ее частная производная f_x непрерывны на множестве* Γ.

Тогда: 1) *для всякой точки (t_0, x_0) множества Γ найдется решение $x = \varphi(t)$ уравнения* (1), *которое удовлетворяет условию $\varphi(t_0) = x_0$*; 2) *если два решения $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ уравнения* (1) *совпадают при каком-либо одном значении $t = t_0$, то эти решения тождественно равны при всех t, для которых они определены.*

Геометрически эта теорема означает, что через каждую точку (t_0, x_0) множества Γ переменных t и x проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1). Каждое решение $x = \varphi(t)$, проходящее через фиксированную точку (t_0, x_0) множества Γ, называется частным решением.

Рассмотрим простейший пример – вертикальное движение тела в воздухе. Если не учитывать силу сопротивления воздуха, то в соответствии со вторым законом Ньютона для описания такого движения имеем уравнение $\upsilon_t = g$, где υ – скорость тела, υ_t – его ускорение, g – ускорение свободного падения. Решением этого уравнения является бесконечное множество функций $\upsilon = c_1 + gt$, где c_1 – произвольная постоянная. Предполагая, что в момент времени $t = t_0$ скорость тела равна υ_0, имеем конкретное значение постоянной $c_1 = \upsilon_0 - gt_0$ и частное решение уравнения в виде $\upsilon = \upsilon_0 + g(t - t_0)$. Если мы интересуемся зависимостью высоты тела от времени, то, учитывая определение скорости $\upsilon = x_t$ и решение υ, получаем уравнение $x_t = \upsilon_0 + g(t - t_0)$, решением которого является множество функций: $x = c_2 + (\upsilon_0 - gt_0)t + 0{,}5gt^2$. Предполагая, что $x(t = t_0) = x_0$, находим постоянную $c_2 = x_0 - (\upsilon_0 - gt_0)t_0 + 0{,}5gt_0^2$, подстановка которой в решение дает функцию $x = x_0 + \upsilon_0(t - t_0) + 0{,}5g(t - t_0)^2$. По существу эта функция является решением дифференциального уравнения второго порядка $x_{tt} = g$.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

При решении квадратных уравнений встречаются числа в виде $x + y\sqrt{-1}$ (здесь x и y – действительные числа), что ведет к определению.

Определение 3. Число $z = x + iy$, где x и y – любые действительные числа, а i – мнимая единица ($i^2 = -1$), называется *комплексным числом*.

Действительные числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями комплексного числа* z и обозначаются как $x = \mathrm{Re}z$, $y = \mathrm{Im}z$. Поскольку две точки, определенные своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат, совпадают тогда и только тогда, когда имеют равные абсциссы и равные ординаты, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости, с одной стороны, и комплексными числами – с другой, то есть всякое комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой комплексной плоскости с абсциссой x и ординатой y. Положение точки, изображающей комплексное число z на плоскости, может быть определено также с помощью полярных координат r и φ. Числа r и φ называются соответственно *модулем* и *аргументом комплексного числа* z: $r = |z|$, $\varphi = \mathrm{Arg}z$. Из определения модуля и аргумента комплексного числа имеем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Величина $\mathrm{Arg}z$ многозначна и определена с точностью до целого кратного 2π, поэтому в качестве главного значения величины $\mathrm{Arg}z$ выбирается значение из неравенства $-\pi < \mathrm{Arg}z < \pi$, которое обозначается как $\arg z$. Таким образом, всякое комплексное число, отличное от нуля, можно представить в тригонометрической форме: $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Принимая во внимание формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, от тригонометрической формы комплексного числа можно перейти к показательной форме: $z = re^{i\varphi}$. Эти формы записи комплексных чисел чрезвычайно удобны при вычислении их произведения, частного от деления, а также при возведении комплексного числа в степень и извлечения из него корня. Так, например, формула, с помощью которой извлекается корень n-й степени из комплексного числа z, имеет вид

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, ..., n - 1$. Таким образом, при извлечении корня n-й степени из комплексного числа z имеется n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$. Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Определение функции комплексной переменной аналогично определению функции действительной переменной. Задание комплексного числа z равносильно заданию двух действительных чисел x и y, и поэтому зависимость $w = f(z) = u + i\upsilon$ эквивалентна двум зависимостям: $u = u(x, y)$ и $\upsilon = \upsilon(x, y)$, определяющим действительные величины u и υ как функции действительных переменных x и y. В качестве примера рассмотрим функцию $z = w^2$. Очевидно, что эта функция является однозначной функцией комплексной переменной w. Однако можно видеть, что обратная функция $w = \sqrt{z}$ уже не является однозначной, поскольку одной и той же точке z соответствуют две различные точки в верхней и нижней полуплоскостях w. Рисунок 1 иллюстрирует отображение области G переменных z полукруга радиуса 4 с помощью функции $w = \sqrt{z}$ на переменную w. Видно, что такое отображение двузначно. У нас есть отображение как на область g (верхняя четверть круга), так и на область g' (нижняя четверть круга).

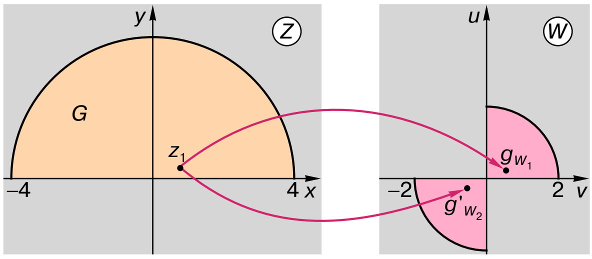

Рис. 1. Отображение с помощью функции $w = \sqrt{z}$ области G (полукруга в верхней полуплоскости комплексной плоскости z) на области g и g' комплексной плоскости W

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Над вопросом о том, что такое решение дифференциального уравнения, размышляли многие математики со времени появления дифференциального и интегрального исчисления. Уже в начале XIX века ученые обнаружили, что неизвестную зависимость в дифференциальном уравнении, как правило, не удается выразить никакой комбинацией известных к тому времени функций. Тогда же появилась идея попытки расширить состав математических функций, пополняя их новыми функциями, с помощью которых можно выразить решения дифференциальных уравнений. Это обстоятельство привело к идее исследовать решения дифференциальных уравнений, используя сами уравнения, поскольку О. Коши обратил внимание на то, что решения дифференциальных уравнений удобно рассматривать как функции комплексного переменного. Именно с этой точки зрения и ведется исследование решений в аналитической теории дифференциальных уравнений [2]. Для того чтобы рассматривать дифференциальные уравнения на комплексной плоскости, потребуется определение производной от функции комплексной переменной.

Определение 4. Пусть комплекснозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Тогда функция $w = f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0, если при $\Delta z \longrightarrow 0$ по любому закону существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f_z(z_0) = \frac{df}{dz}.$$

Этот предел называется *производной функции* $f(z)$ *в точке* z_0.

Требование существования предела в определении 4 означает, что при приближении точки $z_0 + \Delta z$ к точке z_0 по любому из бесконечного множества различных лучей эти пределы совпадают.

Чрезвычайно важным понятием теории функций комплексной переменной является понятие аналитической функции.

Определение 5. Функция $f(z)$ называется *аналитической в данной точке*, если она дифференцируема не только в этой точке, но и в некоторой ее окрестности.

Для уравнения первого порядка

$$w_z = F(w, z), \qquad (2)$$

рассматриваемого на комплексной плоскости, предполагается, что w и z – комплексные переменные и F – аналитическая функция переменной z и рациональная функция переменной w. В аналитической теории дифференциальных уравнений для уравнения (2) ищется решение, принимающее при $z = z_0$ начальное значение $w = w_0$, где z_0 и w_0 – два заданных комплексных числа. Теоремы существования и единственности, которые переносятся на уравнение от комплексной переменной, определяют его решение внутри некоторой окружности и задают элемент аналитической функции, и если он удовлетворяет дифференциальному уравнению, то этому же уравнению удовлетворяют и аналитические продолжения этого элемента на всю область. Поэтому аналитическая функция в целом есть также решение того же дифференциального уравнения.

Определение 6. Точки плоскости, в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называют *правильными точками* этой функции, а точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической (в частности, точки, в которых $f(z)$ не определена), – *особыми точками.*

Изучение поведения решений в окрестности особых точек – важная проблема. И хотя эта проблема является локальной, она тесно связана с проблемой изучения поведения решения в целом. Общая классификация особых точек произвольных аналитических функций была дана П. Пенлеве. Эта классификация основана на числе значений функции, которые она принимает при обходе вокруг анализируемой особой точки.

Определение 7. Если функция при обходе вокруг особой точки меняет свое значение, то такая особая точка называется *критической.* Если же при обходе функция не меняет своего значения, то особая точка называется *некритической.*

Примером критической особой точки может служить точка $z = 0$ для функций $w = \sqrt{z}$. Действительно, фиксируем точку z_1 на комплексной плоскости z (см. рис. 1). Пусть этой точке соответствует значение w_1 области g на комплексной плоскости w. Меняя угол на 2π, мы получим значение w_2 на области g', которое не совпадает с w_1 и, следовательно, $z = 0$ является критической особой точкой функции $w = \sqrt{z}$. Пенлеве выделил также класс алгебраических особых точек, к которым относятся полюсы и которые также могут быть как критическими, так и некритическими. Например, точка $z = 0$ является некритическим полюсом для функции $w_1 = 1/z$, но критическим полюсом для функции $w_2 = 1/\sqrt{z}$.

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. Фукс заметил, что решения дифференциальных уравнений могут иметь особые точки, которые зависят от начальных данных. В этой связи он разделил все особые точки решений дифференциальных уравнений на подвижные и неподвижные.

Определение 8. Особые точки решений дифференциальных уравнений, положение которых зависит (не зависит) от начальных данных, называются *подвижными* (*неподвижными*) особыми точками.

Рассмотрим **пример** – движение тела на плоскости при действии силы сопротивления, зависящей от квадрата скорости. Сила сопротивления направлена против движения, и поэтому дифференциальное уравнение для движущегося тела в соответствии со вторым законом Ньютона имеет вид $\upsilon_t = -k\upsilon^2$, где k – постоянная. Решением этого уравнения является множество функций $\upsilon = (c_1 + tk)^{-1}$, где c_1 – произвольная постоянная. Предположим, что $\upsilon(t = t_0) = \upsilon_0$, тогда из решения находим $c_1 = \upsilon_0^{-1} - kt_0$. В результате приходим к решению $\upsilon = [k(t - t_0) + \upsilon_0^{-1}]^{-1}$. Особой точкой этого решения является полюс $t^* = t_0 - (k\upsilon_0)^{-1}$, положение которого зависит от начальных данных t_0 и υ_0. Однако если в правой части исходного уравнения взять кубическую зависимость от скорости, то уравнение движения принимает вид $\upsilon_t = -k\upsilon^3$ (здесь k также постоянная) и общее решение представляется формулой $\upsilon = [2(c_2 + kt)]^{-1/2}$. Аналогично предыдущему случаю, задаваясь начальным значением скорости υ_0 при $t = t_0$, находим постоянную c_2 и решение задачи Коши в виде $\upsilon = [\upsilon_0^{-2} + 2k(t - t_0)]^{-1/2}$. Отсюда следует, что решение последнего уравнения в отличие от предшествующего имеет критический подвижный полюс в точке $t^* = t_0 - (2k\upsilon_0^2)^{-1}$.

Приведенные примеры показывают, что решения дифференциальных уравнений могут иметь как критические, так и некритические подвижные особые точки. Среди всех решений дифференциальных уравнений могут встретиться четыре различных варианта: 1) решение не имеет ни критических, ни подвижных особых точек; 2) решение имеет неподвижные критические особые точки; 3) решение имеет подвижные некритические особые точки и 4) решение имеет подвижные критические особые точки. В аналитической теории дифференциальных уравнений доказано, что решения линейных уравнений могут иметь только неподвижные критические особые точки. Однако в случае нелинейного дифференциального уравнения решения могут иметь как подвижные, так и неподвижные критические особые точки. В 1884 году Л. Фукс и А. Пуанкаре сформулировали проблему определения новых математических функций на основе решений нелинейных уравнений. В том же году Фукс доказал теорему о том, что среди всех уравнений первого порядка вида (2) с функцией F, рациональной по w и локально-аналитической по z, только уравнение Рикатти $w_z = P_0(z) + P_1(z)w + P_2(z)w^2$ не имеет подвижных критических особых точек.

С.В. Ковалевская, знакомая с результатами Л. Фукса, сделала следующий важный шаг в аналитической теории дифференциальных уравнений при решении задачи о движении твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести (задачи о волчке). Она доказала, что решения рассматриваемой задачи не имеют подвижных критических особых точек только при трех наборах значений параметров задачи. Решения задачи в первых двух случаях были известны из работ Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, а для третьего случая Ковалевская нашла новые решения, став первым исследователем, обнаружившим преимущества при решении дифференциального уравнения, когда его решение не имеет подвижных критических особых точек. В 1888 году С.В. Ковалевской была присуждена премия Бордэна Французской академии наук за значительный вклад в решение проблемы вращения твердого тела.

Вскоре после этого Пенлеве начал изучение дифференциальных уравнений второго порядка

$$w_{zz} = F(z, w, w_z), \qquad (3)$$

где функция F является рациональной по w и по w_z и локально-аналитической по z, w_{zz} – вторая производная от w по переменной z. Вместе со своими учениками Б. Гамбье, Р. Гарнье и другими он показал, что среди всех возможных нелинейных уравнений второго порядка вида (3) решения только 50 канонических уравнений не имеют подвижных критических особых точек. Решения 44 уравнений из этих 50 можно выразить через элементарные или известные специальные функции, а для решений оставшихся шести уравнений Пенлеве и Гамбье ввели новые специальные функции, называемые теперь трансцендентами Пенлеве. Таким образом, Пенлеве и его ученикам удалось найти шесть новых функций, определяемых решениями нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

В уходящем столетии математики неоднократно пытались найти новые функции, аналогичные трансцендентам Пенлеве, определяемые через решения нелинейных дифференциальных уравнений. Прогресс в этом направлении был достигнут недавно. В работах [3, 4] было показано, что решения предложенных в них дифференциальных уравнений четвертого порядка имеют свойства, аналогичные трансцендентам Пенлеве, и могут определять новые функции.

В работах Пенлеве и его учеников было установлено, что если в решении дифференциального уравнения отсутствуют критические подвижные особые точки, то общее решение такого дифференциального уравнения может быть получено. Это свойство дифференциальных уравнений называют теперь свойством Пенлеве. Можно дать следующее его определение.

Определение 9. Говорят, что *обыкновенное дифференциальное уравнение имеет свойство Пенлеве*, если общее решение этого уравнения не имеет критических подвижных особых точек.

Исследование дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве называется пенлеве-анализом дифференциальных уравнений. Есть несколько методов, позволяющих провести такой анализ. Однако у нас нет возможности остановиться на обсуждении этих вопросов. Свойство Пенлеве для обыкновенного дифференциального уравнения по существу является критерием существования общего решения дифференциального уравнения. Если дифференциальное уравнение имеет свойство Пенлеве, то аналитическое решение его может быть получено, если нет, то решение, как правило, найти не удается.

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ И НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В последние годы произошло значительное усиление интереса к исследованию дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве, поскольку было обнаружено, что это свойство имеет тесную связь с нелинейными уравнениями в частных производных.

В 1965 году американские физики М. Крускал и Н. Забуски обнаружили, что уединенная волна, которая является решением уравнения Кортевега–де Фриса, распространяется в среде без изменения формы и с постоянной скоростью. Оказалось, что при взаимодействии таких волн друг с другом они ведут себя как частицы, и поэтому авторы назвали эти волны солитонами [5]. Два года спустя К. Гарднер, Д. Грин, М. Крускал и Р. Миура нашли, что решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриса может быть получено как последовательное решение линейных задач. Необычность поведения решений уравнения Кортевега–де Фриса и новый метод, использованный при его решении, привлекли к этой проблеме исследователей, и уже в 1971 году В.Е. Захаров и А.Б. Шабат показали, что аналогичный подход можно применять при решении задачи Коши для другого широко известного уравнения в физике – нелинейного уравнения Шрёдингера.

В 1974 году М. Абловиц, Д. Кауп, А. Ньюэлл и Х. Сигур обобщили метод Захарова–Шабата и установили, что используемый алгоритм, названный методом обратной задачи рассеяния, применим для решения многих нелинейных уравнений в частных производных. Так возник вопрос о критерии, с помощью которого можно установить, имеет ли нелинейное уравнение солитонные решения или нет. В этой связи Абловиц и Сигур в 1977 году обратили внимание на то, что если нелинейные уравнения в частных производных, имеющие решения в виде солитонов, преобразовать к обыкновенным дифференциальным уравнениям, то получаются уравнения, имеющие свойство Пенлеве. В 1980 году эти авторы вместе с А. Рамани сформулировали тест для проверки наличия солитонных решений у нелинейных уравнений в частных производных. Суть этого теста состоит в следующем: если нелинейное уравнение в частных производных с помощью преобразований сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, имеющим свойство Пенлеве, то к такому нелинейному уравнению в частных производных применим метод обратной задачи рассеяния и оно имеет солитонные решения.

В последнее время раздел нелинейной математической физики, связанный со свойством Пенлеве для дифференциальных уравнений, интенсивно развивается и с его помощью получены важные и интересные результаты при решении многих нелинейных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олейник О.А.* Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 4. С. 114–121.

2. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Л.: ГИТТЛ, 1941. 400 с.

3. *Kudryashov N.A.* The First and Second Painleve Equations of Higher Order and Some Relation between Them // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 224. P. 353–360.

4. *Kudryashov N.A.* Transcendents Defined by Nonlinear Fourth-Order Ordinary Differential Equations // J. Phys. A. Math. and Gen. 1999. Vol. 32, № 6. P. 999–1014.

5. *Кудряшов Н.А.* Нелинейные волны и солитоны // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 2. С. 85–91.

* * *

Николай Алексеевич Кудряшов, профессор, зав. кафедрой прикладной математики МИФИ, член-корреспондент Российской академии естественных наук (РАЕН), лауреат Государственной премии СССР в области науки и техники. Область научных интересов – математическое моделирование задач газовой динамики и глобальных катастроф в природе, нелинейные волны и теория солитонов, аналитические и численные методы решения нелинейных уравнений в частных производных. Автор более 180 печатных работ, в том числе пяти учебных пособий.