ON DIFFERENTIAL EQUATIONS ARISING FROM DYNAMICS OF SYSTEMS WITH DRY FRICTION

I. A. FINOGENKO

Basic data on Coulomb sliding friction is given and the specific character of the equations of motion for mechanical systems with Coulomb's laws is considered. The origin and methods of elimination of P. Painleve classical paradoxes by purely mathematical tools are discussed.

В статье приведены общие сведения о кулоновом трении скольжения, рассмотрены особенности уравнений движения механических систем, полученных с использованием закона Кулона. Обсуждаются возникновение и методы устранения классических парадоксов Пенлеве чисто математическими средствами.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

И. А. ФИНОГЕНКО

Иркутский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

Законы Кулона определения сил сухого трения оправдывают себя для многих механических систем и используются для описания движений различных механизмов и устройств. Но сила трения в реальных механических системах возникает в результате сложных и разнообразных явлений и зависит от многих факторов (свойства материалов скользящих поверхностей, скорость скольжения, температура и др.). Законы трения основаны на экспериментальных данных. Использование их в теоретических исследованиях может привести к парадоксальным ситуациям.

В 1895 году выдающийся французский ученый П. Пенлеве в своих "Лекциях о трении" [1] привел пример, когда уравнения движения, составленные с использованием законов Кулона и гипотезы существования абсолютно твердых тел, для некоторых начальных состояний либо определяли сразу два движения, либо не определяли ни одного движения. Эти явления, получившие название парадоксов Пенлеве, вызвали дискуссию, теоретические и экспериментальные исследования, которые продолжаются и по сей день.

Основы общей теории систем с трением были заложены в трудах П. Пенлеве и в рамках классической механики систем абсолютно твердых тел получили развитие в работах П. Аппеля, Н.Г. Четаева, Г.К. Пожарицкого, В.В. Румянцева, где на системы с трением перенесены принцип возможных перемещений Эйлера–Лагранжа, метод Лагранжа и принцип наименьшего принуждения Гаусса. Вопросы существования и устойчивости движений рассматривались В.М. Матросовым.

Упомянутая выше дискуссия опубликована в [1]. Чтение ее захватывает даже неискушенных в механике людей. Она является замечательным образцом корректного, доброжелательного и уважительного отношения к своим оппонентам в научном споре. В дискуссии приняли участие немецкие и французские ученые Л. Лекорню, Де Спарр, Ф. Клейн, Р. Мизес, Г. Гамель, Л. Прандтль, Ф. Пфейфер. Сам Пенлеве пришел к выводу: "Между динамикой твердого тела и законами Кулона имеется логическое противоречие при условиях, которые могут быть осуществлены в действительности" [1, с. 248]. Но в результате дискуссии выяснилось также, что парадоксы устраняются, если отказаться от гипотезы абсолютно твердых тел. Были намечены и другие пути, которые к настоящему времени сформировали направления исследований систем с трением, связанные с учетом тех или иных дополнительных механических гипотез. Здесь следует отметить работы Н.В. Бутенина, Н.А. Фуфаева, Ю.И. Неймарка, Ле Суан Аня, В.В. Никольского, Ю.П. Смирнова, опубликованные в разное время в журналах "Механика твердого тела" и "Прикладная математика и механика".

Однако трудности изучения уравнений движения механических систем с трением не ограничиваются парадоксами Пенлеве. Здесь имеются и значительные трудности математического характера. Математические модели механических систем с кулоновым трением, полученные в рамках механики систем абсолютно твердых тел, имеют свою специфику и представляют собой дифференциальные уравнения, правые части которых являются функциями, разрывными относительно обобщенных скоростей, то есть сила трения изменяется скачкообразно при изменении направления движения (ниже это показано на примере). Характерным для систем с трением является также наличие множества неизолированных положений равновесия – зон застоя. Поэтому к ним неприменима классическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений, особенно в связи с утверждением о возможной несовместимости уравнений движения с законами трения Кулона (парадоксами Пенлеве). Здесь может быть использована теория дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, интенсивно развивающаяся в настоящее время. Следует отметить, что эта теория восходит именно к задачам механики, где впервые изучались системы с сухим трением в трудах Пенлеве и Аппеля (см. [1–3]). В настоящее время разрывными системами уравнений описываются задачи многих областей науки и техники, в особенности в теории автоматического регулирования с различными релейными характеристиками. Систематическое изложение и обзор теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями имеются в книге А.Ф. Филиппова [4].

И вот сейчас имеется возможность исследовать классическую задачу механики методами современных математических теорий, толчок к развитию которых она дала более ста лет назад.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассмотрим следующий простой пример [2, с. 257]. На горизонтальном столе лежит тяжелый брусок (рис. 1). Сила давления бруска на стол (вес бруска **P**) имеет равнодействующую **N** (нормальную реакцию), направленную перпендикулярно плоскости стола в сторону, противоположную силе **P**. Система находится в равновесии. Приложим к бруску горизонтальную силу **Q**, проходящую через его центр тяжести. Мы считаем, что центр тяжести расположен близко к столу. Наш опыт состоит в том, что интенсивность силы **Q** увеличивается до тех пор, пока брусок не начнет двигаться, а при высоко расположенном центре тяжести брусок опрокинется раньше, чем начнет двигаться. При увеличении силы **Q** будет меняться реакция **R** стола на него. Она может быть разложена на две: нормальную реакцию **N**, равную и противоположную силе **P**, и касательную реакцию **F**, равную и противоположно направленную силе **Q**. Эта касательная составляющая и есть сила трения.

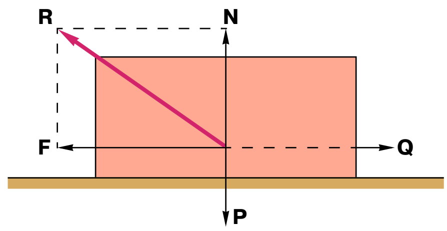

Рис. 1. Движение тяжелого бруска по горизонтальной плоскости

До тех пор пока величина силы **Q** меньше некоторого значения Φ, тело остается в равновесии (брусок не двигается) и **F** является силой трения в покое. При достижении силой **Q** значения Φ тело приходит в движение, и тогда **F** называется трением в начале движения. Отношение $f = \Phi/N = \Phi/P$ называется коэффициентом трения. Кулон измерял значения f и Φ (он использовал повозку, которую тянули с возрастающей силой) и пришел к следующим трем законам:

1) трение в начале движения не зависит от площадей поверхностей, находящихся в соприкосновении;

2) трение зависит от природы соприкасающихся поверхностей;

3) трение пропорционально нормальной составляющей реакции.

Из нашего опыта видно, что сила трения **F** в движении направлена в сторону, противоположную движению бруска. Кулон предполагал также, что трение по величине не зависит от скорости, но это справедливо в области очень малых скоростей.

В общем случае вообразим два движущихся твердых тела A и B, тело A скользит по телу B, m – точка соприкосновения. **N** – нормальная реакция тела B на тело A, то есть сила, направленная перпендикулярно к соприкасающимся поверхностям в точке m, **F** – сила, приложенная к этой же точке m и расположенная в касательной плоскости к соприкасающимся поверхностям. Сила **F** называется силой трения скольжения. Она направлена в сторону, противоположную относительной скорости точки

m по отношению к B, и равна по величине fN, где f – коэффициент трения, а N – абсолютная величина нормальной реакции. Таким образом, сила трения скольжения при движении определена, если известны значения f и N. Коэффициент трения f определяется экспериментально и зависит от природы соприкасающихся поверхностей. Отметим, что коэффициент трения в покое несколько меньше коэффициента трения в движении. Здесь, следуя [3], мы считаем, что они равны.

Что произойдет, если относительная скорость точки m по отношению к телу B обратится в нуль, то есть скольжение прекратится? В этом случае либо тело A останется неподвижным по отношению к телу B, либо относительным движением будет качение и верчение и законы трения скольжения в движении не будут применимы. Пренебрегая трениями качения и верчения, сформулируем общий принцип определения силы трения скольжения при относительном покое, то есть в моменты прекращения скольжения [3, с. 107].

Допустим, что относительная скорость точки m в начальный момент времени t_0 равна нулю. Нужно узнать, какой тип относительного движения тела A по телу B будет осуществляться в следующие моменты времени $t > t_0$. Чтобы ответить на этот вопрос, поступаем следующим образом: предполагаем, что при $t > t_0$ скорость точки m остается равной нулю. Тогда реакция тела A на тело B на основании принятых законов будет состоять из нормальной реакции $\mathbf{N}$ и касательной реакции $\mathbf{F}$. Допускается, что в этом случае применимы законы трения в состоянии покоя, и поэтому должно выполняться неравенство $F < fN$. При этих условиях составляем уравнения задачи и вычисляем значения N и F. Если действительно найденное значение F окажется меньше, чем fN, то сделанное предположение будет правильным, а именно относительная скорость точки m при $t > t_0$ равна нулю и $\mathbf{F}$ является силой трения скольжения в покое. Это утверждение будет справедливым до тех пор, пока величина F не сделается больше, чем fN. Начиная с этого момента будет происходить скольжение и уравнения нужно изменить. Если, наоборот, найденное значение F будет с самого начала больше, чем fN, то сделанное предположение (о том, что скорость точки m при $t > t_0$ равна нулю) неверно и движение скольжения невозможно. С самого начала нужно написать уравнения движения, применяя законы трения скольжения при движении.

В том случае, когда как до момента остановки t_0, так и после него происходит скольжение, в соответствии с законом трения в движении при изменении направления движения изменит знак на противоположный, то есть произойдет скачкообразное изменение силы трения, о чем уже упоминалось.

Приведенные здесь рассуждения являются весьма схематичными и общими. В конкретных ситуациях для определения силы трения недостаточно только выводить уравнения движения. Если активные силы, действующие на систему, известны, то реакции связей необходимо вычислять и анализировать. В том случае, когда имеется множество точек соприкосновения трущихся тел, все сказанное следует применять к каждой такой точке.

Ниже будут приведены общие уравнения движения, описывающие достаточно широкий класс механических систем с трением скольжения. Вначале рассмотрим два примера.

ПРИМЕР ПЕНЛЕВЕ

Здесь укажем на противоречия, к которым пришел Пенлеве при применении законов Кулона. Это не исключительный, а достаточно общий случай при больших значениях коэффициента трения. Он исследован в книге П. Пенлеве [1] (см. также [3]).

Рассматриваются две материальные точки (рис. 2) единичной массы, связанные невесомым стержнем MM_1 длины $r > 0$. Точка M скользит с трением по неподвижной горизонтальной прямой Ox, с которой не может сойти, другая точка M_1 движется без внешнего сопротивления в вертикальной плоскости Oxy под действием силы тяжести g (и реакции стержня). Ось Oy направлена вниз, θ – угол отклонения стержня от положительного направления Ox по часовой стрелке, x – координата точки M. Внешними силами, действующими на систему, являются полный вес $2g$, приложенный в центре тяжести G, и реакция R оси Ox, составляющие которой по осям Ox и Oy обозначим R_x и R_y.

По теоремам о движении центра масс и кинетического момента относительно центра масс получаем уравнения движения и уравнение для нормальной реакции R_y

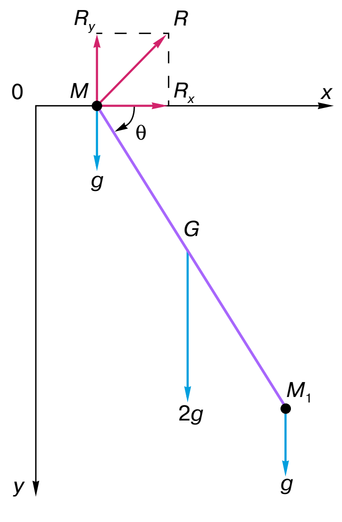

Рис. 2. Пример П. Пенлеве

$$2\ddot{x} - r\sin\theta \cdot \dot{\theta} = r\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + R_x,$$
$$-\sin\theta \cdot \ddot{x} + r\ddot{\theta} = g\cos\theta, \qquad (1)$$

$$R_y = -2g + r\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - r\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2. \qquad (2)$$

Касательная реакция R_x при $\dot{x} \neq 0$ (сила трения скольжения в движении) по абсолютному значению равна $f|R_y|$ и имеет знак, противоположный знаку скорости $\dot{x}$ точки M, где $f > 0$ – коэффициент трения (постоянная величина), $|R_y|$ – абсолютная величина нормальной реакции. Таким образом, согласно закону Кулона, в движении при $\dot{x} \neq 0$ имеем

$$R_x = -f|R_y|\operatorname{sign}\dot{x} \qquad (3)$$

(через $\operatorname{sign}\nu$ обозначена функция, определяющая знак величины ν, то есть

$$\operatorname{sign}\nu = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad \nu < 0, \\ 1, & \text{если} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

Введем обозначения: $\varepsilon = \operatorname{sign}(R_y \cdot \dot{x})$ и

$$D = 1 + \cos^2\theta + \varepsilon f \sin\theta\cos\theta. \qquad (4)$$

Тогда $R_x = -fR_y\varepsilon$ и уравнения (1), (2) можно разрешить относительно $\ddot{x}, \ddot{\theta}, R_y$ следующим образом при $D \neq 0$:

$$\ddot{x} = \frac{1}{D}[r\dot{\theta}^2(\cos\theta + \varepsilon f\sin\theta) +$$
$$+ g(\cos\theta\sin\theta + \varepsilon f(1 + \sin^2\theta))],$$
$$\ddot{\theta} = \frac{1}{rD}(2g + r\dot{\theta}^2\sin\theta)(\cos\theta + \varepsilon f\sin\theta), \qquad (5)$$
$$R_y = -\frac{1}{D}(2g + r\dot{\theta}^2\sin\theta).$$

Поместим систему в начальное положение $(x_0, \dot{x}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0)$, где $0 < \theta_0 < \pi/2$, и предположим, что выполняется неравенство

$$1 + \cos^2\theta_0 < f\sin\theta_0\cos\theta_0. \qquad (6)$$

Поскольку $\sin\theta_0\cos\theta_0 > 0$, то неравенство (6) будет выполняться для достаточно больших значений f. Отметим также, что из третьего уравнения системы (5) следует равенство

$$\operatorname{sign} R_y = -\operatorname{sign} D. \qquad (7)$$

Пусть теперь $\dot{x}_0 > 0$. Если окажется $R_y > 0$, то из (4), (6) вытекает $\operatorname{sign} D = \operatorname{sign}\varepsilon > 0$ и тогда (7) влечет $R_y < 0$. Если $R_y < 0$, то из тех же соотношений (4), (6), (7) получаем $R_y > 0$. Оба случая противоречивы.

Таким образом, при $\dot{x}_0 > 0$ уравнения (5) неразрешимы (парадокс невозможности движения).

Предположим, что $\dot{x}_0 < 0$. Тогда уравнения (5) имеют два решения, одно из которых соответствует значению $\varepsilon = -1$, а другое – значению $\varepsilon = +1$, и оба они не противоречат закону трения (3) (парадокс неединственности движения).

Нашей целью было указать на парадоксы трения. Поэтому мы не рассматриваем случай $\dot{x}_0 = 0$ и прекращаем исследование примера Пенлеве. Для того чтобы рассмотреть математические трудности, приведем более простой пример с уравнением, избавленным от противоречий.

ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

Линейным осциллятором при наличии кулоновского трения служит устройство, изображенное на рис. 3, *а*. Тело m единичной массы под действием упругой силы пружин движется по горизонтальной поверхности какого-либо твердого тела. Тело рассматривается как материальная точка с координатой x, k – коэффициент упругости пружин с точкой ненапряженного состояния $x = 0$. В соответствии с законом Гука при малых отклонениях упругая сила пропорциональна отклонению и равна $-kg$, g – вес тела. Согласно законам Кулона, сила сухого трения F определяется формулой

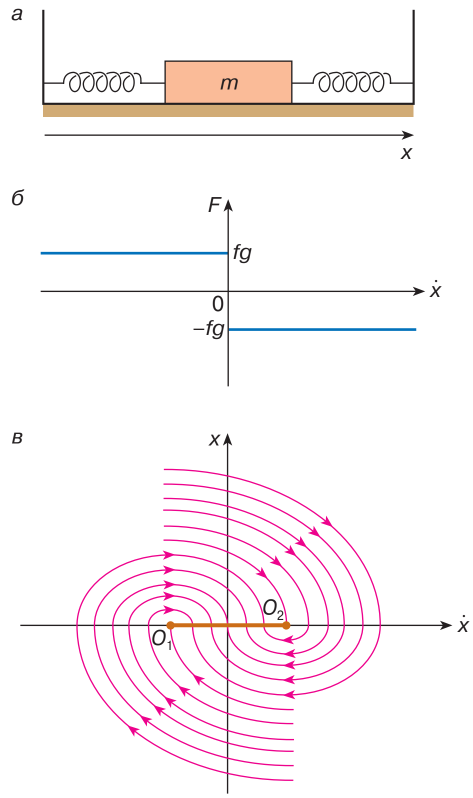

Рис. 3. *а* – линейный осциллятор при наличии кулонова трения, *б* – характеристика разрывной зависимости силы трения от скорости при движении линейного осциллятора, *в* – фазовый портрет линейного осциллятора (стрелками указано направление движений по траекториям, O_1O_2 – зона застоя)

$$F = \begin{cases} -fg\operatorname{sign}\dot x, & \text{если} \quad \dot x \ne 0, \\ kx, \quad \text{если} \quad \dot x = 0, & k|x| \le fg, \\ fg\operatorname{sign} x, \quad \text{если} \quad \dot x = 0, & k|x| > fg, \end{cases}$$

где $f > 0$ – коэффициент трения.

В классической механике ускорение рассматривается, по существу, как правая производная скорости $\dot x$. Обозначив ее через $D^+\dot x$, запишем уравнения движения линейного осциллятора

$$D^+\dot x = \begin{cases} -kx - fg\operatorname{sign}\dot x, & \text{если} \quad \dot x \ne 0, \\ -kx + fg\operatorname{sign} x, & \text{если} \quad \dot x = 0, \ k|x| > fg, \\ 0, \quad \text{если} \quad \dot x = 0, & k|x| \le fg. \end{cases} \qquad (8)$$

Таким образом, движение точки описывается не одним, а тремя различными уравнениями, причем первые два уравнения также изменяются в зависимости от знаков $\dot x$ и x. Точнее, уравнения (8) переходят одно в другое (меняют структуру) в зависимости от расположения точки $(x, \dot x)$. Это обусловлено разрывностью силы трения F относительно скорости $\dot x$. Зависимость F от $\dot x$ при $\dot x \ne 0$ изображена на рис. 3, *б*. При переходе скорости $\dot x$ через значение, равное нулю, происходит смена уравнений. Фазовый портрет рассматриваемой динамической системы (то есть поведение точки $(x, \dot x)$ с течением времени для всевозможных начальных состояний) изображен на рис. 3, *в*.

Из уравнений (8) видно, что если в некоторый момент времени t_0 выполняются условия $\dot x = 0$ и $k|x| \le fg$, то $D^+\dot x = 0$. Следовательно, движение системы прекращается, она находится в положении равновесия. Положениям равновесия на фазовом портрете соответствует отрезок O_1O_2, где $O_1 = fg/k$, $O_2 = -fg/k$. Это явление – наличие множества неизолированных положений равновесия, которое часто называют зоной застоя, – является типичным для систем с кулоновым трением. Застой возникает, когда активные силы, действующие на систему, не могут преодолеть силу трения. В нашем случае – когда упругая сила пружин в момент остановки оказывается по абсолютной величине меньше, чем величина силы трения в движении.

Если же в момент времени t_0 выполняются условия $\dot x = 0$ и $k|x| > fg$, то $D^+\dot x \ne 0$ и из (8) получаем $\operatorname{sign} D^+\dot x = -\operatorname{sign} x$. Следовательно, при $t > t_0$ движение не прекращается и траектории решений уравнения (8) переходят либо в верхнюю, либо в нижнюю полуплоскость фазовой плоскости (см. рис. 3, *в*) в зависимости от расположения точки x. Трение в этот момент меняется на величину $2fg$. Траектории системы (8) с течением времени приближаются к зоне застоя и попадают в нее. В книге [5] это строго обосновывается интегрированием уравнений движения и припасовыванием начальных данных системы.

Но интегрируются лишь простейшие типы уравнений. В более общих случаях возникает задача изучения вопросов существования движений системы и исследования их динамических свойств в условиях, когда уравнения движения меняют свою структуру подобно тому, как это происходит в нашем примере с линейным осциллятором.

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Вернемся на некоторое время к примеру Пенлеве. В первом из уравнений (1) выражение R_x, определенное формулой (3), можно рассматривать как функцию не только переменных $(\theta, \dot\theta)$, но и как функцию от $\ddot\theta$, поскольку R_y в (2) зависит от $\ddot\theta$. Таким образом, и в правой и в левой частях уравнений (1) имеются старшие (вторые) производные. Такие уравнения называются неразрешенными относительно старших производных или неявно заданными дифференциальными уравнениями. В том случае, если они разрешимы относительно $(\ddot x, \ddot\theta)$, получим те же самые уравнения в явной форме. Однако такое разрешение не всегда возможно и не всегда однозначно. Вот тогда и возникают парадоксы невозможности и неединственности движений. Мы убедились в этом при исследовании уравнений (1), (2) в форме (5). Поэтому можно утверждать, что при условиях однозначной разрешимости неявных уравнений движения относительно ускорений парадоксы Пенлеве устраняются.

Запишем общие уравнения движения голономных механических систем с k степенями свободы, с идеальными удерживающими связями под действием кулоновых сил трения скольжения, введенные В.М. Матросовым, из работы [6]. Записанные в векторной форме уравнений Лагранжа 2-го рода они имеют вид

$$A(t, q)\ddot q = g(t, q, \dot q) + Q^A(t, q, \dot q) + Q^T(t, q, \dot q, \ddot q). \quad (9)$$

Здесь $q = (q_1, q_2, ..., q_k)$, $\dot q = (\dot q_1, \dot q_2, ..., \dot q_k)$, $\ddot q = (\ddot q_1, \ddot q_2, ..., \ddot q_k)$ – векторы обобщенных состояний, скоростей и ускорений. Векторные функции $g = (g_1, g_2, ..., g_k)$, $Q^A = (Q^A_1, Q^A_2, ..., Q^A_k)$ описывают обобщенные гироскопические силы, переносные силы инерции и активные силы, действующие на систему; $A(t, q)$ – симметричная, положительно-определенная матрица размерности $k \times k$ коэффициентов инерции $a_{si}(t, q)$, $Q^T = (Q^T_1, Q^T_2, ..., Q^T_k)$ – обобщенные силы трения скольжения, определяемые в соответствии с законами Кулона по формуле

$$Q^T_s = \begin{cases} -f_s|N_s|\operatorname{sign}\dot q^s, \ \text{если} \ \dot q^s \ne 0, \\ f_s|N_s|\operatorname{sign} Q^{T_0}_s, \ \text{если} \ \dot q^s = 0, \\ \ddot q^s = 0, \ \left|Q^{T_0}_s\right| > f_s|N_s|, \\ Q^{T_0}_s, \ \text{если} \ \dot q^s = 0, \ \ddot q^s = 0, \ \left|Q^{T_0}_s\right| \le f_s|N_s|, \end{cases} \qquad (10)$$

где $s = 1, 2, ..., k_*$, $k_* \le k$, $|N_s|$ – модули нормальных реакций в точках соприкосновения трущихся тел, являющиеся функциями переменных $(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$ $f_s = f_s(t, q^s, \dot{q}^s) > 0$ – коэффициенты трения, $Q_s^{T_0}$ – силы трения при относительном покое, определяемые формулой

$$Q_s^{T_0} = \sum_{i=1, i \neq s}^{k} a_{si}(t, q) - [g_s(t, q, \dot{q}) + Q_s^A(t, q, \dot{q})].$$

Для $s = k_* + 1,\ k_* + 2,\ ...,\ k$ считаем $f_s = 0$. Модули нормальных реакций $|N_s|$ определяются согласно А.И. Лурье [7, с. 327] (см. также [6]).

Уравнения (9) с силами трения (10) являются очень сложными для анализа, поскольку они аккумулируют в себе все трудности, на которые было указано в примерах. Более того, из определения сил трения (10) не следует даже непрерывности их относительно $\ddot{q}$. Но зато парадоксы Пенлеве могут устраняться чисто математическими средствами, а именно при условиях однозначной разрешимости уравнений (9) относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}$ они приводятся к явной форме

$$\ddot{q} = G(t, q, \dot{q}), \tag{11}$$

в которой избавлены от противоречий.

Исследование уравнения (11) требует специального рассмотрения. Функция G является не только разрывной, но и неявно заданной. Могут быть известны лишь условия ее существования и единственности, которые определяются методами математического анализа и которые связывают между собой параметры искомой системы (9), коэффициенты трения f_s и коэффициенты инерции a_{si} и выполняются для достаточно малых значений f_s и a_{si} при $s \neq i$. Для примера Пенлеве таким условием является

$$f < \frac{1 + \cos^2\theta}{|\sin\theta\cos\theta|}. \tag{12}$$

Легко заметить, что неравенство (12) в точке $\theta = \theta_0$ противоположно неравенству (6), которое привело к противоречиям. Минимальное значение правой части (12) приблизительно равно 2,8. Таким образом, строго обосновывается оценка коэффициентов трения f, для которых парадоксов Пенлеве не возникает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В одном фантастическом рассказе изобретатель создал устройство, уничтожающее трение. Представьте себе летящие без остановки поезда, сталкивающиеся автомобили, падающие прохожие на улице. Но это лишь поверхностный взгляд. На самом деле картина будет гораздо более грандиозной: все, что движется, не сможет остановиться, все, что покоится, не в состоянии будет сдвинуться с места. Такой мир существовать не сможет и разрушится. Но природа, как всегда, распорядилась мудро, ее законов нельзя ни изменить, ни отменить. Человек может лишь с доступной ему долей истинности узнавать, исследовать и использовать эти законы в своей деятельности. Законы механики, как, впрочем, и других наук, имеют свои границы применимости, которые подлежат определению исходя из тех или иных критериев. В нашей ситуации условия однозначной определенности уравнений движения могут служить критерием применимости законов Кулона. Построение математической теории этих уравнений безусловно подкрепляет адекватность принятой математической модели реальному механическому процессу.

Подход, основанный на исследовании уравнений движения в неявной форме (10), не является единственно возможным. Всякий раз, когда принятый в науке закон вступает в противоречие с опытом или теоретическими изысканиями, он неизменно привлекает к себе самое пристальное внимание ученых. Тогда открываются новые закономерности и появляются новые направления развития теории. Такие знакомые и привычные со школьной скамьи законы трения не исключение. Они все еще хранят свои тайны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Painleve P.* Leçons sur le frottement. P.: Hermann, 1895. 111 p. (рус. пер.: М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.)
2. *Аппель П.* Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960. Т. 1. 515 с.
3. *Аппель П.* Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960. Т. 2. 487 с.
4. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
5. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
6. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 6. С. 3–13.
7. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

* * *

Иван Анатольевич Финогенко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Иркутского государственного университета, старший научный сотрудник Института динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН. Область научных интересов – дифференциальные уравнения, функциональный анализ, динамические системы и устойчивость движения. Автор более 50 научных статей.