

PECULIARITIES
IN DYNAMIC SYSTEM
BEHAVIOR
IN THE VICINITY
OF DANGEROUS
BIFURCATION
BOUNDARY

M. I. FEIGIN

To understand already known cases of unusual behavior of dynamic systems and to predict the unknown peculiarities of these systems, simple examples of the effects of both a bifurcation memory in passing over and enhanced sensitivity in approaching the dangerous boundary of stability are considered.

На простых примерах рассмотрены эффекты бифуркационной памяти динамической системы к прохождению через опасную границу устойчивости и повышенной чувствительности системы в случаях приближения к границе. Они позволяют понять уже известные, а также прогнозировать новые случаи необычного поведения систем.

© Фейгин М.И., 1999

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОКРЕСТНОСТИ ОПАСНЫХ БИФУРКАЦИОННЫХ ГРАНИЦ

М. И. ФЕЙГИН

Волжская государственная академия водного транспорта,
Нижний Новгород

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к исследованию рассматриваемых в статье особенностей динамических систем был индуцирован прикладной проблемой выяснения причин необычного поведения некоторых систем в процессе управления. Рабочие режимы движения системы обычно удовлетворяют традиционному требованию устойчивости. Вместе с тем известны случаи, когда в целях обеспечения более важных динамических характеристик (например, повышенной маневренности судна или самолета) допускают неустойчивость основного стационарного режима движения, стабилизируемого соответствующим воздействием управляющего органа.

Было обнаружено, что неустойчивость в интервале сравнительно небольших управляющих воздействий порождает новые нелинейные эффекты даже при достаточно больших управлениях. Эти эффекты включают понижение управляемости в определенной области фазового пространства (эффект фазового пятна) и начальную неуправляемость, когда непосредственно после приложения управляющего воздействия нужного знака реакция динамической системы в течение конечного интервала времени противоположна ожидаемой.

Попытка найти простое объяснение такому необычному поведению привела к общей задаче исследования динамических процессов в окрестности опасных границ устойчивости. Получение общей качественной картины возникновения особенностей позволило иначе интерпретировать, а иногда и впервые объяснить известные случаи странного поведения некоторых конкретных динамических систем.

ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ СИСТЕМЫ

Будем рассматривать поведение динамических систем, изменение состояний которых во времени описывается дифференциальными уравнениями. Для понимания основных закономерностей излагаемых особенностей достаточно ограничиться случаем уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, \lambda, \mu), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, \lambda, \mu), \end{aligned} \quad (1)$$

где x и y – переменные, характеризующие состояние системы; λ и μ – постоянные параметры системы, которые могут перенастраиваться; P и Q – гладкие функции указанных аргументов.

Так, если предстоит исследовать поведение обычного колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных конденсатора и катушки, то состояние контура в каждый момент времени будет определяться величиной заряда конденсатора и тока в контуре. Изменяемыми параметрами могут быть емкость конденсатора и индуктивность.

Пусть для некоторых значений параметров выбрано начальное состояние x_0, y_0 . Тогда уравнения (1) определяют единственное решение

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t, x_0, y_0, \lambda, \mu), \\ y(t) &= g(t, x_0, y_0, \lambda, \mu), \end{aligned} \quad (2)$$

а также траекторию в трехмерном пространстве x, y, t .

Чтобы иметь достаточно полное представление о возможном поведении системы при фиксированных значениях параметров, следует рассмотреть множество траекторий при различных начальных условиях. Однако для получения качественной картины обычно ограничиваются исследованием проекции траектории (2) на фазовую плоскость x, y . Такие проекции называют фазовыми траекториями.

Подчеркнем, что переход от рассмотрения трехмерного пространства к рассмотрению фазовой плоскости лишает нас точного анализа зависимости решения от времени (переходного процесса). Информация, сохраняемая на фазовой плоскости, – это лишь направление движения. Поэтому фазовые траектории, получаемые из уравнений (2) формальным исключением t , дополняются стрелкой. (Если не ограничиваться качественным анализом, то на фазовой плоскости системы (1) дополнительно вводят в рассмотрение точечное отображение $M^* = T(t_1, t_2)M$ состояния системы M в момент t_1 в ее состояние M^* в момент t_2 .)

Семейство фазовых траекторий при заданных значениях параметров образует фазовый портрет системы, дающий полное качественное представление о возможном ее поведении. Заметим, что фазовые траектории нетрудно наблюдать на дисплее компьютера в циклическом режиме построения решений дифференциальных уравнений (1) для множества значений x_0, y_0 , перебираемых с некоторым шагом. Но это будет слепой машинный перебор, ибо нет гарантии того, что наиболее интересные решения не окажутся пропущенными при выбранном шаге перебора.

В динамических системах (1) качественная картина фазового портрета определяется состояниями равновесия (особыми точками) и особыми траекториями [1, 2]. В зависимости от расположения фазовых траекторий в окрестности особых точек различают следующие их типы: устойчивые или неустойчивые узлы и фокусы, а также всегда неустойчивые седла. Уравнения особых точек получают из (1), если полагать производные равными нулю:

$$\begin{aligned} P(x, y, \lambda, \mu) &= 0, \\ Q(x, y, \lambda, \mu) &= 0. \end{aligned}$$

К особым траекториям относятся устойчивые и неустойчивые предельные циклы, представляющие замкнутые траектории. Для их отыскания вводят в рассмотрение одномерные отображения некоторых отрезков в самих себя и находят неподвижные точки таких отображений.

Особые точки и циклы представляют стационарные решения. Это означает, что если начальные условия совпадают с особой точкой или расположены на предельном цикле, то система (теоретически) будет сколь угодно долго там оставаться. Практически же так будет лишь в случае устойчивости, когда при начальных условиях из малой окрестности решений система возвращается к исходному стационарному режиму. Поэтому фазовый портрет дает наглядное представление о возможных устойчивых стационарных решениях, а также областях их притяжения, если таких решений несколько.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОРТРЕТ СИСТЕМЫ. ОПАСНЫЕ И БЕЗОПАСНЫЕ ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Обычно параметры реальной системы не остаются постоянными длительное время как по чисто эксплуатационным причинам в стационарных режимах работы (например, уменьшение массы топлива и изменение скорости в транспортном аппарате), так и в связи с необходимостью управления системой (подстройка частоты генератора, отклонение рулей у судов и самолетов). В связи с этим весьма актуальна задача изучения характера изменения фазовых портретов системы в зависимости от ее параметров или деформации системы. В процессе деформации могут возникнуть бифуркационные ситуации, при которых качественно меняется фазовый портрет.

Для рассматриваемых систем возможны следующие бифуркации: слияние с исчезновением пары из устойчивой и неустойчивой особых точек, слияние устойчивого и неустойчивого циклов. Возможна бифуркация слияния цикла с особой точкой типа фокус. Наконец, это может быть рождение цикла через бифуркацию гомоклинической траектории седло-узла. Если параметр изменяется в противоположном направлении, то имеет место обратная картина – рождение указанных пар стационарных

решений. Перечисленные случаи читателям журнала знакомы из статьи В.Н. Белых [1].

Конечной целью качественного исследования является получение параметрического портрета системы (1) или разбиение плоскости параметров λ, μ на области различного поведения, соответствующие топологически различным фазовым портретам.

Если штатному режиму работы динамической системы соответствует устойчивое стационарное решение, то важное значение приобретает анализ поведения системы в случаях нарушения устойчивости этого решения при возможных изменениях параметров. В 1949 году Н.Н. Баутин разработал метод, позволяющий различать безопасные и опасные границы области устойчивости. В первом случае достаточно малые нарушения приводят к малым отклонениям нового режима движения от режима, потерявшего устойчивость. Малейшее же нарушение опасной границы приводит к неконтролируемому нарастанию отклонений режима от исходного. По выражению А.А. Андропова, указанная работа представляла значительный шаг в трудном и важном вопросе исследования устойчивости нелинейных систем.

Так, например, безопасной будет бифуркация, при которой фокус, теряя устойчивость, порождает устойчивый предельный цикл. Здесь потеря устойчивости означает, что фазовые траектории, представлявшие скручивающиеся спирали, становятся раскручивающимися спиралями. А безопасность бифуркации заключается в том, что раскручивающиеся из особой точки траектории наматываются на предельный цикл, родившийся из этой точки. Чем меньше изменяемый параметр отличается от бифуркационного значения, тем меньше будет амплитуда возникших автоколебаний (мягкое возбуждение колебаний).

В качестве другого примера можно привести безопасную бифуркацию удвоения периода колебаний, при которой цикл, ставший неустойчивым, порождает двухоборотный цикл. Чем меньше параметр отличается от бифуркационного значения, тем меньше расщепление. В обоих примерах при смене направления изменяющегося параметра имеет место безгистерезисная картина обратного бифуркационного перехода.

ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ЗА ОПАСНОЙ ГРАНИЦЕЙ. ЭФФЕКТ БИФУРКАЦИОННОЙ ПАМЯТИ

Перейдем к изложению обнаруженных в последние годы особенностей поведения систем в окрестности опасных бифуркационных границ. Начнем с рассмотрения примера.

Пример 1. Опасная бифуркация седло-узел со скачком в режим автоколебаний. Воспользуемся уже знакомой читателям журнала из статьи [1] системой в полярных координатах

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho(1 - \rho), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \lambda - \mu \sin \varphi, \quad \lambda > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

дополнив ее еще одним параметром μ , полагая сначала $\mu = 1$. Здесь $\rho > 0$ – так называемый полярный радиус, равный расстоянию точки до начала координат, а φ – угол между осью абсцисс и этим радиусом, отсчитываемый против часовой стрелки.

Если $\lambda < 1$, то существуют два стационарных решения на окружности $\rho = 1$ – устойчивый узел M_1 ($\rho_1 = 1, \varphi_1 = \arcsin \lambda$) и седло M_2 ($\rho_2 = 1, \varphi_2 = \pi - \arcsin \lambda$). При переходе параметра через бифуркационное значение $\lambda = 1$ особые точки сливаются и умирают, порождая устойчивые автоколебания. Фазовая траектория соответствующего им предельного цикла представляет окружность $\rho(t) \equiv 1$. Эта бифуркация опасная, ибо из особой точки $M_1 = M_2$ происходит скачок в режим автоколебаний с достаточно большой амплитудой (жесткое возбуждение колебаний).

Для подчеркивания особенностей автоколебаний в системе (3) при значении параметра λ , несколько превышающем бифуркационное значение, рассмотрим также эту систему при значении другого параметра $\mu = 0$. Важно подчеркнуть, что в случае $\mu = 0$ никаких бифуркаций при $\lambda = 1$ не происходит. Качественная картина поведения фазовых траекторий для обоих случаев совпадает (рис. 1, а). Поэтому исходя из фазового портрета трудно представить различие в характере непосредственно колебательных процессов – зависимости исходных переменных от времени. При переходе от полярных координат к декартовым $x(t) = \rho(t) \sin \varphi(t), y(t) = \rho(t) \cos \varphi(t)$. Это проекции на оси абсцисс и ординат вращающейся по окружности фазовой точки. В левой части рис. 1, б, в приведены зависимости $y(t)$ для $\mu = 0$ и $\mu = 1$. Их существенное различие очевидно. Примерно в двадцать раз (!) различаются и периоды колебаний.

Столь разное поведение систем с очень близкими фазовыми портретами объясняется потерей части информации при переходе от рассмотрения траекторий в трехмерном пространстве x, y, t к рассмотрению их проекций на фазовую плоскости x, y . Очевидно, что при анализе **стационарных решений**, устанавливающихся при $t \rightarrow \infty$, такой подход дает огромный выигрыш. Успехи качественной теории и теории бифуркаций это блестяще доказали.

Вместе с тем во многих прикладных задачах важнейшее значение имеет именно характер протекания переходных процессов, и особенно при пересечении параметром опасной бифуркационной границы. В этом смысле установившиеся термины “срыв” или “скачок” обусловлены влиянием характера научного мышления в рамках стационарных решений. Действительно, система, находясь в устойчивом стационарном режиме, будет там оставаться сколь

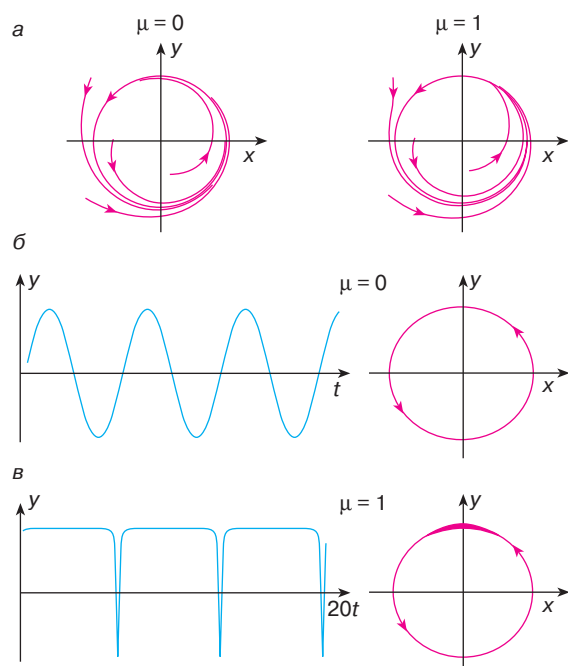


Рис. 1. Изображение процесса колебаний предельным циклом на плоскости x, y и зависимость $y(t)$. Заторможенность движения отражена утолщением участка фазовой траектории цикла (в)

угодно долго ($t \rightarrow \infty$) при неизменном добифуркационном значении параметра. При постбифуркационном значении параметра после переходного процесса система снова неограниченно долго ($t \rightarrow \infty$) будет находиться в новом стационарном режиме. Естественно поэтому назвать скачком переход от одного бесконечно долгого существования к другому.

Оказалось, однако, что существенные динамические особенности системы сохраняются за опасной границей. При этом новые и весьма важные в прикладном плане эффекты бифуркационной памяти не просматриваются непосредственно на фазовой плоскости. Они обнаруживаются при анализе скорости движений.

Получить дополнительную информацию о движении системы можно, если на фазовых траекториях вместе с положением точки как-то отражать и ее скорость V в направлении нового стационарного решения. Можно менять ширину или толщину кривой: чем больше скорость, тем тоньше участки изображаемой траектории. Можно ввести точечное отображение $M^* = T(t_1, t_2)M$, $t_2 - t_1 = \text{const}$, и выделять на траектории точки получаемой последовательности: чем меньше скорость, тем ближе они будут расположены.

На рис. 1, б, в справа от осциллограмм изображены предельные циклы с переменной шириной фазовых траекторий, которая зависит от значения угло-

вой скорости $d\phi/dt$. В случае $\mu = 0$ цикл практически не отличается от изображенного в верхней части рисунка. В случае же $\mu = 1$ отличие весьма существенно. Появившееся фазовое пятно говорит о том, что этот участок цикла фазовая точка проходит со значительным торможением.

Заметим, что при анализе конкретных систем фазовые траектории с переменной яркостью могут быть получены при наблюдении их на обычном осциллографе. Например, на фотографии предельного цикла мультивибратора, приведенной в книге [2, рис. 597], можно легко различить быстрые, полубыстрые и медленные движения.

На рис. 2 дополнительная информация о скорости фазовой точки на цикле для случая $\mu = 1$ получена из рассмотрения точечной последовательности преобразования $M^* = T(t_1, t_2)M$, $t_2 - t_1 = 0,25$. Из рисунка видно, как уменьшается по мере удаления параметра λ от бифуркационного значения заторможенность движения на верхнем участке траектории.

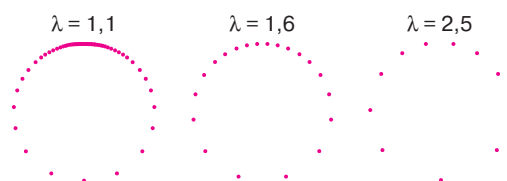


Рис. 2. Эволюцию с ростом λ участка заторможенного движения можно наблюдать, если фазовую траекторию изображать точками через фиксированный интервал времени

Заметим, что любознательные школьники при получении фазового портрета на дисплее компьютера могут в зависимости от скорости изменять цвет траектории.

РОЖДЕНИЕ И УМИРАНИЕ ФАЗОВОГО ПЯТНА

Таким образом, система демонстрирует удивительное свойство бифуркационной памяти, замедляя движение при прохождении участка, на котором умерла особая точка седло-узел. Существование области заторможенного движения (эффект фазового пятна [3]) имеет место и при других опасных бифуркациях. После установления этого факта отпадает необходимость в усложнении традиционной процедуры получения соответствующих фазовых портретов. Просто возникла самостоятельная задача — разработка метода определения местоположения и расчета границ фазового пятна, а также расчета показателя заторможенности движения от параметра. Оказалось, что в одних динамических системах фазовые пятна исчезают, а в других сохраняются. Но во всех случаях показатель заторможенности движения уменьшается.

На фазовой плоскости проявление эффекта бифуркационной памяти наиболее наглядно можно изобразить нанесением фазового пятна. Это и будет продемонстрировано в следующих примерах.

Пример 2. Опасная бифуркация седло-узел со срывом в устойчивый узел. Система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (x^2 - \mu)(1 - x), \\ \frac{dy}{dt} &= -0,5y, \quad \mu < 1 \end{aligned} \quad (4)$$

имеет стационарные режимы движения – особые точки M_i , получаемые из решения системы алгебраических уравнений, если полагать производные равными нулю. Причем во всех случаях $y_i = 0$. Если $\mu > 0$, особых точек три:

$$\begin{aligned} M_1(x_1 = -\sqrt{\mu}, y_1 = 0), \quad M_2(x_2 = \sqrt{\mu}, y_2 = 0), \\ M_3(x_3 = 1, y_3 = 0). \end{aligned}$$

Согласно (4), координата $y(t)$ и ее производная имеют разные знаки. Поэтому $y(t) > 0$ – убывающая функция, а $y(t) < 0$ – возрастающая. Иными словами, фазовые траектории приближаются к оси абсцисс. Что касается координаты $x(t)$, то при $x > 1$ она убывает (производная отрицательна). Так как в особых точках производная равна нулю, то каждая вертикаль $x = x_i$ является границей смены возрастания $x(t)$ на убывание или наоборот. Таким образом, если $\mu > 0$, то точки M_1 и M_3 – устойчивые узлы, а средняя точка M_2 – седло (рис. 3, а).

При $\mu = 0$ происходит слияние узловой M_1 и седловой M_2 точек (рис. 3, б). После исчезновения седло-узловой точки остается единственный устойчивый узел M_3 .

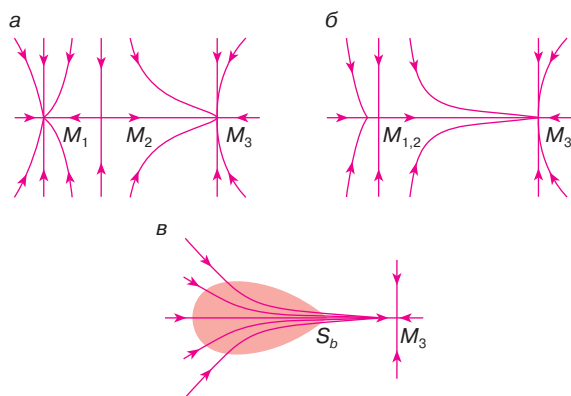


Рис. 3. Эволюция фазового портрета при переходе параметра через бифуркационное значение $\mu = 0$: а – седло M_2 расположено между устойчивыми узлами M_1 и M_3 , б – слияние седла с узлом, в – система помнит об опасной бифуркации, пока существует фазовое пятно

На фазовом портрете при $\mu < 0$, отражающем эффект бифуркационной памяти, следует изобразить фазовое пятно. В момент зарождения пятна легко выделить его центральную точку S_c , совпадающую с умирающей седло-узловой особой точкой. Фазовая скорость этой точки V_c равна нулю ($V^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2$).

Очевидно, что в конечной точке участка фазовой траектории $M_c M_3$ фазовая скорость $V_3 = 0$. Следовательно, на этом участке должна быть точка, например S_b , фазовая скорость в которой V_b максимальна. Точка M_b расположена на границе пятна, а сама граница фазового пятна определяется как геометрическое место точек с такой же скоростью (рис. 3, в).

Центральная M_c и граничная M_b точки пятна перемещаются с уменьшением μ . Слияние указанных точек в системе (4) произойдет при $\mu = -1/3$. Оно соответствует исчезновению пятна. Количественно эффект фазового пятна характеризуется показателем заторможенности движения $K = V_c/V_b$, $0 \leq K \leq 1$. При рождении пятна $K = 0$, а при исчезновении $K = 1$.

Пример 3. Случай опасной бифуркации Андронова–Хопфа слияния неустойчивого цикла с устойчивым фокусом. Рассмотрим две системы ($\mu < 1$):

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho(\rho - \mu)(1 - \rho), \quad \frac{d\phi}{dt} = 1; \quad (5)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho^2(\rho - \mu)(1 - \rho), \quad \frac{d\phi}{dt} = 1. \quad (6)$$

В обоих случаях стационарный режим автоколебаний $\rho = 1$ устойчив, а $\rho = \mu > 0$ неустойчив. Особая точка $\rho = 0$ при $\mu > 0$ является устойчивым фокусом. Опасная бифуркация слияния фокуса с неустойчивым циклом происходит при $\mu = 0$. Области фазовых пятен и примеры переходного процесса из окрестности особой точки, ставшей неустойчивой, представлены на рис. 4 для системы (5) и рис. 5 для системы (6). При этом если в первом случае параметр мало отличается от бифуркационного значения ($\mu = -0,005$), то в системе (6) значение параметра увеличено в 120 раз ($\mu = -0,6$), а начальные условия – вдвое.

Рассмотренный пример наглядно показывает, что медленное нарастание колебаний системы не связано с медленным изменением параметра. Во втором случае он изменен скачкообразно и сразу до

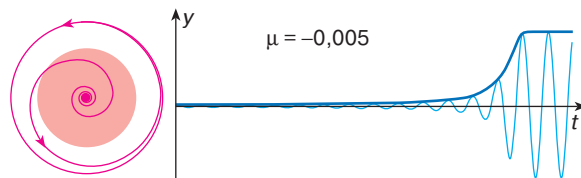


Рис. 4. Переходный процесс после потери устойчивости, когда параметр мало отличен от бифуркационного значения $\mu = 0$

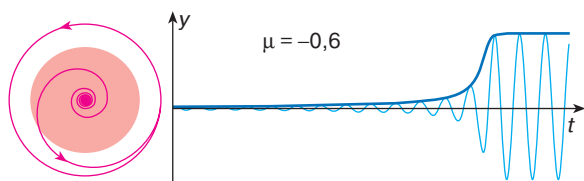


Рис. 5. Существование фазового пятна обуславливает заторможенный переход к новому стационарному состоянию даже при параметре, весьма далеком от бифуркационного значения

значения $\mu = -0,6$. Эффект обязан общей закономерности – рождению фазового пятна и его существованию в определенном интервале параметра.

ПОВЫШЕННАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СИСТЕМЫ К ПРИБЛИЖЕНИЮ ОПАСНОЙ ГРАНИЦЫ

Мы рассмотрели удивительное свойство динамической системы помнить об особых точках или циклах в окрестности их исчезновения. В связи с этим появилась определенная уверенность, что система должна также как-то сигнализировать и о приближающейся опасной границе. Но как? Здесь уместно напомнить известные слова академика Л.И. Мандельштама о том, что “именно физика учит нас, как допрашивать дифференциальные уравнения”. Действительно, в каждом случае опасной бифуркации можно обнаружить соответствующий “датчик сигналов” о ее приближении.

Продемонстрируем это на рассмотренных выше примерах бифуркации седло-узел. Естественно предположить, что с изменением параметра в сторону опасной границы система продолжает оставаться в окрестности устойчивого узла. Поэтому чувствительность системы можно оценить, если найти отношение приращения в положении узла к приращению значения параметра.

Так, из второго уравнения системы (3) в предбифуркационном случае $\mu = 1, \lambda \rightarrow 1$ имеем для отыскания особых точек условие $\lambda - \sin \varphi = 0$. Отсюда следует, что при $\lambda \rightarrow 1$ значение $\varphi \rightarrow \pi/2$. Нас интересует зависимость координаты φ от λ . Поэтому перепишем условие в виде

$$\lambda - \sin \varphi(\lambda) = 0. \quad (7)$$

Скорость изменения $\varphi(\lambda)$ характеризует производная $d\varphi/d\lambda$. Дифференцируя по λ выражение (7), имеем

$$1 - \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0.$$

Отсюда следует, что $d\varphi/d\lambda \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow \pi/2$.

В случае примера 2 чувствительность перемещения координаты x узла в зависимости от параметра μ получим из первого уравнения системы (4)

$$(x(\mu)^2 - \mu)(1 - x(\mu)) = 0. \quad (8)$$

При $\mu \rightarrow 0$ абсцисса узла $x \rightarrow 0$. После дифференцирования по μ выражения (8) легко убедиться, что и в этом случае производная $dx/d\mu \rightarrow \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эффекты бифуркационной памяти и повышенной чувствительности в окрестности опасных бифуркационных границ могут различно проявляться и использоваться в конкретных динамических системах.

В случае судов, например, возможно повысить качество управления и предсказать потенциально аварийные ситуации [3–5]. Проявление эффекта бифуркационной памяти, как было показано в [6], играет существенную роль в процессе формирования обширной “озонной дыры” в весенней антарктической стратосфере. В робототехнических системах имеет место затягивание потери устойчивости [7]. С проявлением эффекта повышенной чувствительности связаны некоторые странности ударного виброгашения [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белых В.Н.* Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 1. С. 115–121.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 926 с.
3. *Фейгин М.И., Чиркова М.М.* О существовании области пониженной управляемости для судов, неустойчивых на прямом курсе // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 2. С. 73–78.
4. *Фейгин М.И.* О начальной неуправляемости динамической системы // Проблемы теории колебаний: Межвуз. сб. науч. тр. Нижний Новгород: ННГУ, 1995. С. 184–197.
5. *Фейгин М.И.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994. 288 с.
6. *Feigin A.M., Konovalov I.V.* On the Possibility of Complicated Dynamic Behavior of Atmospheric Photochemical Systems: Instability of the Antarctic Photochemistry during the Ozone Hole Formation // J. Geophys. Res. 1996. Vol. 101, № D20. P. 26 023–26 038.
7. *Нейштадт А.И., Сидоренко В.В.* Исследование запаздывания потери устойчивости в системе Циглера // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 1. С. 18–29.

* * *

Марк Исаакович Фейгин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой информатики и автоматизации производственных процессов Волжской государственной академии водного транспорта, заслуженный деятель науки РФ, академик Международной и Российской инженерных академий. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний, теория бифуркаций, динамические системы, системы управления. Автор 140 научных публикаций, одной монографии, ряда учебных пособий, трех авторских свидетельств.