

## THE SIMPLEST AUTOWAVES

V. V. OSIPOV

*One of the striking and universal phenomena of nonlinear physics, excitation of the simplest autowaves in different physical, chemical and biological bistable distribution systems having two stable uniform states, is discussed. In physical systems, these autowaves describe propagation of the front of the transition of system from one (metastable) state of system to another, stable (equilibrium) state.*

**Рассматривается одно из ярких и универсальных явлений нелинейной физики – возбуждение простейших автоволн в различных физических, химических и биологических бистабильных распределенных системах, имеющих два устойчивых однородных состояния. В физических системах такие автоволны описывают распространение фронта переключения системы из одного ее устойчивого (метастабильного) состояния в другое (равновесное).**

## ПРОСТЕЙШИЕ АВТОВОЛНЫ

В. В. ОСИПОВ

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики  
Московский физико-технический институт,  
Долгопрудный Московской обл.

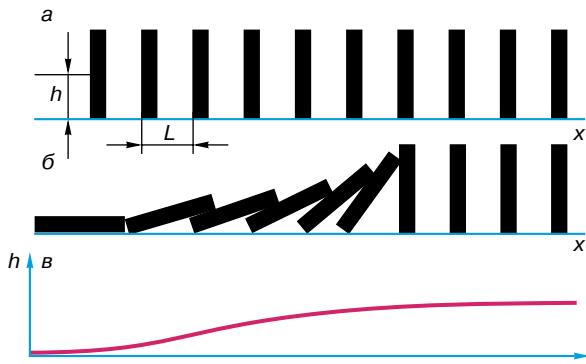
### ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных черт современного этапа развития науки является исследование и осмысление различного рода нелинейных явлений, которые существенно меняют наши представления о фундаментальных свойствах окружающего нас мира. Эти явления носят достаточно универсальный характер, то есть не зависят от природы конкретной системы, а определяются лишь ее некоторыми свойствами, присущими широкому классу физических, химических, биологических, медицинских и других систем.

Многие физические системы при одних и тех же внешних условиях могут находиться в нескольких стационарных или фазовых состояниях. Такие состояния, устойчивые относительно малых возмущений, называются метастабильными. В равновесных системах автоволна переброса описывает процесс переключения такой системы из одного ее метастабильного или фазового состояния в другое (с меньшей энергией) или же в состояние равновесия, которому отвечает наименьшая энергия. Такие волны можно возбудить за счет внешнего кратковременного воздействия достаточно большой амплитуды на одну из границ системы. В результате такого воздействия на некотором расстоянии от этой границы в системе установится волна, движущаяся с постоянной скоростью, характеристики которой (скорость, амплитуда и профиль) полностью определяются параметрами системы и не зависят от предыстории возникновения волны (вида и параметров первоначального внешнего воздействия). Иными словами, такая волна представляет собой некоторое собственное (авто) состояние данной системы, поэтому такого типа нелинейные волны принято называть автоволнами (АВ). Этот удачный термин предложил Р.В. Хохлов по аналогии с автоколебаниями.

### 1. АВТОВОЛНА ПЕРЕБРОСА В ПРОСТЕЙШЕЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Представим себе стоящие на ребре фишками домино. Такие фишкы при малых их отклонениях от такого положения снова возвращаются в него. Другими словами, состояние в виде стоящей на ребре фишкы устойчиво относительно малых возмущений. Но мы хорошо знаем, что если достаточно сильно толкнуть крайнюю фишку, то это приведет к самораспространяющейся волне последовательного падения фишек вдоль линии их построения (рис. 1).



**Рис. 1.** Автоволна последовательного падения фишек домино: а – стоящие на ребре, б – падающие фишк; в – профиль автоволны – положения центра тяжести фишек

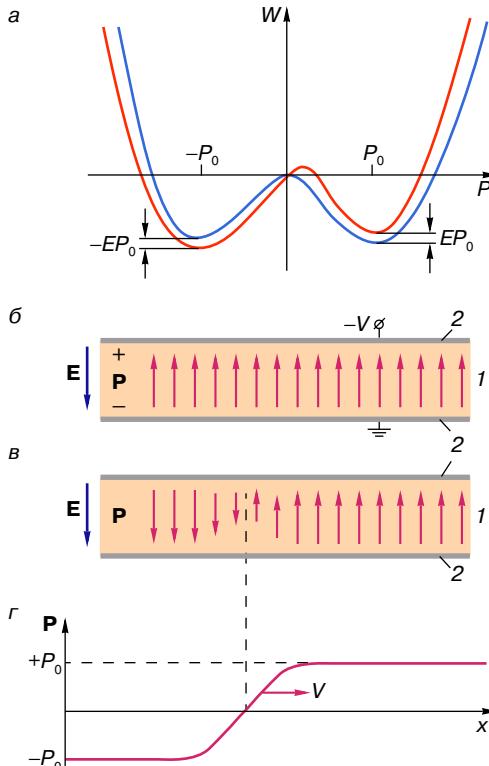
По-видимому, каждый из нас не раз наблюдал это забавное явление.

Причина этого явления связана с тем, что в исходном состоянии каждая стоящая фишка (по сравнению с лежащей) обладает потенциальной энергией гравитационного поля Земли  $W = mgh$ , где  $m$  – масса фишек,  $2h$  – ее высота (рис. 1, а),  $g$  – постоянная свободного падения. Кроме того, и это существенно, соседние фишки, то есть элементы системы, взаимодействуют между собой: каждая падающая фишка толкает соседнюю и роняет ее. В рассматриваемом случае самораспространяющаяся волна падения фишек представляет собой АВ переключения системы из метастабильного состояния с потенциальной энергией  $W = mgh$  в более выгодное состояние с меньшей энергией  $W = 0$ . При таком переключении запасенная в фишках потенциальная энергия  $mgh$  необратимо переходит в тепло, выделяющееся при падении фишек.

## 2. АВТОВОЛНА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ И МАГНЕТИКАХ

Эффект, качественно аналогичный рассмотренному в разделе 1, реализуется в сегнетоэлектрической пленке, помещенной в электрическое поле (рис. 2). Сегнетоэлектриком называется диэлектрик, обладающий спонтанной поляризацией  $\mathbf{P}$  (дипольным моментом). Каждый его объемчик представляет собой диполь: одна из его сторон, например верхняя, имеет заряд плюс, а другая – минус. Дипольный момент  $\mathbf{P}$  направлен от минуса к плюсу.

Пусть в начальном состоянии электрическое поле  $\mathbf{E}$  направлено в сторону, противоположную  $\mathbf{P}$  (рис. 2, б). При наличии  $\mathbf{E}$  дипольные моменты стремятся выстроиться вдоль электрического поля. Поэтому если дипольный момент на границе пленки перевернуть, то есть выстроить вдоль электрического поля (рис. 2, в), то благодаря электростатическому



**Рис. 2.** Автоволна переключения в сегнетоэлектрической пленке: а – зависимость энергии сегнетоэлектрика  $W$  от его поляризации  $P$  при отсутствии (синяя кривая) и при наличии электрического поля  $E$  (красная кривая); б – метастабильное состояние сегнетоэлектрической пленки; в – процесс переключения из метастабильного состояния в равновесное; г – бегущая с постоянной скоростью  $V$  доменная стенка – профиль автоволны. 1 – пленка сегнетоэлектрика, 2 – металлические электроды; стрелки показывают направление внешнего электрического поля  $\mathbf{E}$  и дипольного момента  $\mathbf{P}$  в сегнетоэлектрике

взаимодействию между соседними объемчиками это приведет к последовательной самопроизвольной переориентации диполей из состояния против поля в состояние вдоль поля. Иными словами, в сегнетоэлектрической пленке возникнет АВ в виде самораспространяющегося фронта переполяризации (рис. 2, в, г).

Область, где меняется дипольный момент, называется доменной стенкой. Поэтому в данном случае АВ представляет собой бегущую с постоянной скоростью доменную стенку. Последняя, так же как и в разделе 1, есть АВ переключения системы из одного ее метастабильного состояния в другое с меньшей энергией.

Действительно, в простейшем случае зависимость энергии пленки от поляризации имеет вид

$$W = -\frac{1}{2}\alpha P^2 + \frac{1}{4}\beta P^4 - EP, \quad (1)$$

где для сегнетофазы коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  больше 0. При отсутствии поля ( $E = 0$ ) функция  $W(P)$  имеет вид двух потенциальных ям (синяя кривая на рис. 2, а), минимумы которых расположены в точках  $P = +P_0$  или  $P = -P_0$ , где  $P_0 = (\alpha/\beta)^{1/2}$ . Величины  $\pm P_0$  определяют два устойчивых равновесных состояния сегнетоэлектрика с противоположными направлениями поляризации и одной и той же энергией, равной  $W = -(1/4)\alpha P_0^2$ . При наличии электрического поля появляется дополнительная энергия электростатического взаимодействия поля и дипольного момента, которая определяется последним слагаемым в (1). При этом дно правой потенциальной ямы, которое отвечает состоянию с  $P = P_0$ , то есть с дипольным моментом, направленным против электрического поля, повысится на величину  $W \approx P_0 E$ , а дно другой (левой) ямы понизится на величину  $W \approx -P_0 E$  (красная кривая на рис. 2, а). (Здесь мы учли, что, как правило,  $E \ll P_0$ .) Поэтому первое состояние остается устойчивым, но метастабильным состоянием, а второе – равновесным состоянием. Разность энергий между этими состояниями примерно равна  $2P_0 E$ .

Пусть пленка находится в метастабильном состоянии, то есть ее поляризация направлена против электрического поля (рис. 2, б). Если теперь внешним кратковременным локальным воздействием повернуть вектор поляризации у одной из границ пленки вдоль электрического поля, то в ней возникнет самораспространяющаяся с постоянной скоростью АВ, представляющая собой фронт переключения пленки из метастабильного в равновесное состояние. При этом в области фронта (доменной стенки) запасенная в пленке электростатическая энергия  $2P_0 E$  переходит в тепло.

Данная АВ, то есть движение доменной стенки в сегнетоэлектрике в электрическом поле, описывается уравнением

$$\tau \frac{\partial P}{\partial t} = l^2 \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \alpha P - \beta P^3 - E, \quad (2)$$

в котором член в левой части описывает диссипативный процесс перехода электростатической энергии в тепловую,  $\tau$  – характерное время такого процесса, точнее, время релаксации дипольного момента. Первый член в правой части уравнения описывает процесс взаимодействия между дипольными моментами соседних областей сегнетоэлектрика, последние члены в правой части определяют величину дипольного момента в однородном сегнетоэлектрике<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Уравнение (2) и все другие уравнения, которые приводятся ниже, являются сложными нелинейными уравнениями в частных производных, с которыми читатель может быть совершенно незнаком. Поэтому не нужно стремиться их глубоко понять или как-то осмыслить. Они приводятся лишь для того, чтобы пояснить математическую общность рассматриваемых явлений в системах различной природы (см. раздел 6).

Эффект, качественно аналогичный рассмотренному выше, реализуется и в магнитных пленках, каждый элемент которых обладает магнитным моментом  $\mathbf{M}$ , то есть представляет собой маленький магнитик. Хорошо известно, что магнитики стремятся выстроиться вдоль внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Это связано с тем, что разность энергий между состояниями с  $\mathbf{M}$ , направленным против и вдоль магнитного поля, равна  $2MH$ . Поэтому в пленке из магнетика, помещенной в магнитное поле  $\mathbf{H}$ , в результате взаимодействия между ее соседними областями можно возбудить самораспространяющуюся АВ, представляющую собой движущуюся с постоянной скоростью магнитную доменную стенку переключения пленки из метастабильного состояния в равновесное. В простейшем случае такая АВ также описывается уравнением типа (2), в котором вектор  $\mathbf{P}$  следует заменить на  $\mathbf{M}$ , а поле  $\mathbf{E}$  – на  $\mathbf{H}$ . Однако в реальных магнитных материалах доменные стенки имеют достаточно разнообразную и сложную структуру, а процесс их распространения может быть весьма нетривиальным, в частности движение магнитной стенки может быть связано с вращением вектора  $\mathbf{M}$ .

### 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФРОНТА ГОРЕНИЯ

Хорошо известным и наиболее наглядным примером АВ переключения является распространение фронта горения в бикфордовом шнуре, то есть в цилиндрической оболочке, внутренняя часть которой заполнена порохом. Такой порох находится в устойчивом состоянии, но при его поджигании у одного из концов шнуря в нем возникает самораспространяющаяся с постоянной скоростью область горения. Ее возникновение связано с тем, что при горении пороха выделяется тепловая энергия, которая прогревает соседнюю область (следующую порцию пороха), вызывая воспламенение пороха в ней, а затем и в соседних к ней областях.

Процесс горения описывается уравнением теплопроводности:

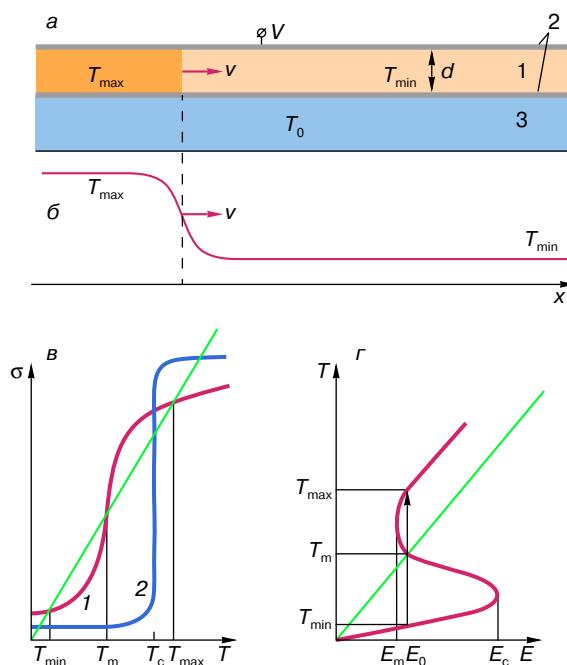
$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + WG(T) - \frac{T - T_0}{R_T}, \quad (3)$$

где  $T$  и  $T_0$  – температура горящего пороха и окружающей среды;  $C$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$  – теплоемкость, удельная плотность и теплопроводность пороха;  $W$  – энергия, выделяемая при сгорании 1 см<sup>3</sup> пороха;  $G(T)$  – скорость реакции горения, которая носит термоактивационный характер, то есть  $G(T) \sim \exp(-\Delta/T)$ . Член в левой части уравнения (3) описывает изменение температуры единицы объема пороха. Первый член в его правой части описывает распространение тепла вдоль шнуря от области горения к холодной соседней области за счет теплопроводности пороха, второй член – выделение тепла при горении пороха, последний член описывает охлаждение шнуря за счет ухода тепла в окружающую среду,

$R_T$  – тепловое сопротивление, характеризующее интенсивность этого процесса.

#### 4. АВТОВОЛНА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛЕНКИ

Рассмотрим полупроводниковую пленку, которая нанесена на массивную подложку, играющую роль термостата (рис. 3). Пусть к пленке приложено напряжение  $V$ , то есть в ней имеется электрическое поле  $E = V/d$  ( $d$  – толщина пленки). Под действием этого поля в пленке течет ток, плотность которого, согласно закону Ома, есть  $I = \sigma E$ , где  $\sigma$  – удельная проводимость полупроводника. За счет протекания тока в пленке будет выделяться мощность, плотность которой (в соответствии с законом Джоуля–Ленца) равна  $W = IE = \sigma E^2$ . В свою очередь, эта мощность будет разогревать пленку, и в ней установится температура, отличающаяся от температуры термостата  $T_0$ . Температура пленки  $T = T_h$  при од-



**Рис. 3.** Автоволна переключения полупроводниковой пленки из “холодного” (высокоомного) в “горячее” (низкоомное) состояние: а – схематическое изображение полупроводниковой пленки 1 на термостатирующем подложке 3; ярко-оранжевая область отвечает “горячему” состоянию пленки; через металлические электроды 2 на пленку подано напряжение  $V$ ; б – вид автоволны переключения, то есть бегущего в пленке с постоянной скоростью  $v$  профиля температуры; в – вид зависимости проводимости пленки от температуры (кривая 1 – для полупроводника, кривая 2 – для материала с фазовым переходом диэлектрик–металл); г – вид зависимости температуры полупроводниковой пленки от электрического поля в ней (S-образная кривая). Зеленой линией на рис. в и г показана “нагрузочная” прямая

нородном распределении тока в ней определяется уравнением

$$\sigma E^2 = \frac{T_h - T_0}{R_T}. \quad (4)$$

Член в его правой части описывает уход тепла в подложку (термостат),  $R_T$  – тепловое сопротивление, характеризующее интенсивность этого процесса (см. также уравнения (3)).

Особенность полупроводников состоит в том, что их проводимость  $\sigma$  в определенной области температур  $T$  сильно возрастает с ростом  $T$  (кривая 1 на рис. 3, в). Как правило,  $\sigma \sim \exp(-\Delta/T)$ . Аналогичный эффект особенно сильно проявляется в материалах, в которых при некоторой критической температуре  $T = T_c$  осуществляется фазовый переход из диэлектрического (высокоомного) в металлическое (низкоомное) состояние (кривая 2 на рис. 3, в). Из анализа уравнения (4) следует, что когда функция  $\sigma(T)$  имеет вид, изображенный кривыми 1 или 2 на рис. 3, в, то зависимость температуры пленки  $T$  от электрического поля  $E$  в ней приобретает вид S-образной кривой (рис. 3, г). Отсюда следует, что при одном и том же значении  $E = E_0$ , лежащем в диапазоне  $E_m < E_0 < E_c$  (рис. 3, г), уравнение (4) допускает три решения  $T_{\min}$ ,  $T_m$  и  $T_{\max}$ . Их можно найти графически, поскольку эти решения согласно (4) определяются точками пересечения функции  $\sigma(T)$  с прямой  $(T_h - T_0)/R_T E_0^2$  (рис. 3, в). Можно показать, что  $T = T_m$  отвечает неустойчивому, а  $T = T_{\min}$  и  $T = T_{\max}$  – устойчивым неравновесным стационарным состояниям.

Наличие двух устойчивых состояний холодного с  $T = T_{\min}$  и горячего с  $T = T_{\max}$  при заданном значении  $E$  можно пояснить следующим образом. При низкой температуре  $T = T_{\min}$  мала проводимость полупроводника (рис. 3, в), а следовательно, малы величина тока  $I = \sigma E$  и выделяемая джоулева мощность  $\sigma(T_{\min})E^2$ . При высоких температурах значение  $\sigma(T_{\max}) \gg \sigma(T_{\min})$ , то есть при том же значении  $E$  разогревающая пленку мощность  $\sigma(T_{\max})E^2$  будет велика, что, согласно (4), будет поддерживать высокое значение температуры пленки  $T = T_{\max}$ .

Пусть пленка находится в холодном состоянии с  $T = T_{\min}$ . Разогреем пленку горячей спичкой у левого конца. Тогда в этой локальной области увеличится проводимость пленки  $\sigma$ , а следовательно, и выделяемая в ней джоулева мощность  $\sigma(T)E^2$ . В результате пленка перейдет из состояния  $T_{\min}$  в  $T_{\max}$ . (Этот переход показан стрелкой на рис. 3, г.) За счет теплопроводности, то есть потока тепла в соседнюю область, проводимость соседней области, а следовательно, и выделяемая в ней мощность увеличится и эта соседняя область перейдет в горячее состояние с  $T = T_{\max}$ . Это, в свою очередь, приведет к прогреванию следующей за ней области и т.д. В результате в пленке сформируется движущаяся с постоянной скоростью тепловая волна переключения пленки (рис. 3, б) из

холодного (высокоомного) состояния в горячее (низкоомное). Распространение такой тепловой АВ определяется уравнением теплопроводности

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \sigma(T)E^2 - \frac{T - T_0}{R_T}, \quad (5)$$

где константы  $C$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$ ,  $R_T$  имеют тот же смысл, что и в уравнении (3) для бикфордова шнура (раздел 3), с той лишь разницей, что они относятся к материалу полупроводниковой пленки.

Легко усмотреть аналогию не только вида уравнений (3) и (5), но и физики распространения тепловой АВ переключения в полупроводниковой пленке и фронта горения в бикфордовом шнуре (раздел 3). Подчеркнем, однако, отличие этих двух систем. В бикфордовом шнуре энергия запасена в порохе и распространение тепловой волны связано с его выгоранием. Иными словами, бикфордов шнур является одноразовой системой. Рассмотренную же здесь полупроводниковую пленку легко вернуть в исходное состояние. Для этого нужно лишь на некоторое время выключить внешнее напряжение, дать пленке остыть, а затем опять включить напряжение. Рассматриваемая особенность пленки связана с тем, что она является открытой неравновесной системой. В ней происходит подкачка энергии от распределенного источника, который в каждой точке пленки задает электрическое поле  $E = V/d$ . В результате этого в пленке течет ток, плотность которого равна  $I = \sigma E$ , и в каждой ее точке выделяется джоулева мощность  $W = \sigma E^2$ . Эта поступающая к электронам мощность уходит в подложку, играющую роль термостата (рис. 3, а). Иными словами, рассматриваемая пленка является диссипативной, открытой и неравновесной системой. Именно в таких системах могут возникать автоколебания и уединенные АВ, которые рассматриваются в другой статье.

## 5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГЕНОВ И ЭПИДЕМИЙ

По-видимому, впервые (еще в 1937 году) АВ была строго теоретически изучена А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым, а также Р. Фишером при рассмотрении распространения дефектного гена. Биологическая подоплека этой проблемы такова. Генетическая информация представлена в хромосомах парами генов. Если хотя бы один из генов в этой паре является доминантным, то, передаваясь по наследству, при скрещивании он будет передавать новой особи определенные свойства (например, цвет глаз). Если в этом гене в результате неблагоприятной мутации (изменения) возникает информация, реализующаяся, например, в заболевании красных кровяных клеток – эритроцитов, то такой ген становится причиной распространения наследуемой генетической болезни. Число потомков с таким заболеванием будет возрастать.

Обозначим вероятность или частоту появления дефектного гена как  $q$ . Тогда если популяция живет в замкнутом регионе и все особи могут между собой скрещиваться, то уравнение для эволюции вероятности имеет вид

$$\frac{dq}{dt} = mq(1 - q). \quad (6)$$

Здесь коэффициент  $m$  характеризует выживаемость особи с дефектным геном. Если начальная вероятность  $q_0 \ll 1$ , то для малых  $q$  уравнение (6) упрощается и принимает вид  $dq/dt \approx mq$ . Его решение есть  $q(t) = q_0 \exp(mt)$ . Если же  $q \rightarrow 1$ , то производная  $dq/dt \rightarrow 0$ , то есть процесс нарастания  $q$  прекращается, когда вся популяция оказывается генетически дефектной.

Если популяция обитает на протяженном пространстве, то в случае появления в некотором малом районе особей с дефектным геном будет происходить нарастание  $q$  в этом районе и, кроме того, ген будет распространяться в пространстве из-за случайных перемещений особей. Такие блуждания можно характеризовать некоторым эффективным коэффициентом диффузии  $D$  и записать уравнение для  $q(r, t)$  в уже знакомом нам виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + mq(1 - q), \quad (7)$$

где  $r$  – пространственная координата.

## 6. ОБ ОБЩНОСТИ ОПИСАНИЯ ВОЛН ПЕРЕБРОСА В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ

Легко усмотреть математическую общность уравнений (2), (3), (5) и (7), описывающих АВ переключения в системах различной природы. Эти уравнения можно записать в общем виде

$$\tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = l^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - q(\theta, A), \quad (8)$$

где  $\theta$  – параметр, описывающий свойства системы (дипольный или магнитный момент для систем, рассмотренных в разделе 2; температура для систем, рассмотренных в разделах 3 и 4; вероятность появления дефектного гена в модели, рассмотренной в разделе 5);  $\tau_\theta$  и  $l$  – характерные времена и длина изменения параметра  $\theta$ ;  $q(\theta, A)$  – нелинейный источник;  $A$  – контролирующий параметр, в физических системах характеризующий степень их возбуждения ( $A = E$  для сегнетоэлектрика (раздел 2),  $A \sim W$  для системы с горением (раздел 3) и  $A \sim E^2$  для разогреваемой в электрическом поле полупроводниковой пленки (раздел 4)).

Уравнение (8) есть нелинейное уравнение диффузионного типа, которое в математике называется уравнением в частных производных параболического типа. Для того чтобы уравнение (8) допускало решение в виде АВ, необходимо, чтобы в некотором

диапазоне параметра  $A$  алгебраическое уравнение  $q(\theta, A) = 0$  имело три решения, два из которых  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_3$  соответствуют устойчивым состояниям системы. Рассматриваемая АВ описывает распространение с постоянной скоростью  $V$  фронта переключения из одного состояния с  $\theta = \theta_1$  в другое с  $\theta = \theta_3$ .

Отметим, однако, что это условие не выполняется для системы, рассмотренной в разделе 5. Уравнение (7) описывает некоторую вырожденную (не физическую) ситуацию, особенности которой мы здесь рассматривать не будем.

Для описания волны перейдем в систему координат, движущуюся вместе с АВ со скоростью  $V$ . Для этого введем координату  $X = x - Vt$  и будем измерять время, длину и скорость в единицах  $\tau_0$ ,  $l$  и  $l/\tau_0$  соответственно. Тогда уравнение (8) преобразуется к виду

$$V \frac{d\theta}{dX} = \frac{d^2\theta}{dX^2} - q(\theta, A). \quad (9)$$

Умножим уравнение (9) на  $d\theta/dX$  и проинтегрируем его от  $+\infty$  до  $-\infty$ . Учитывая, что при  $X \rightarrow -\infty$  величина  $\theta = \theta_1$  и  $d\theta/dX = 0$ , а при  $X \rightarrow +\infty$  величина  $\theta = \theta_3$  и  $d\theta/dX = 0$ , получим

$$V \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\theta}{dX} \right)^2 dX = - \int_{-\infty}^{+\infty} q(\theta, A) \frac{d\theta}{dX} dX = - \int_{\theta_1}^{\theta_3} q(\theta, A) d\theta. \quad (10)$$

Введем формально некоторый потенциал

$$W = \int q(\theta, A) d\theta. \quad (11)$$

Тогда (10) можно записать в виде

$$V = [W(\theta_1, A) - W(\theta_3, A)] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\theta}{dX} \right)^2 dX \right]^{-1}. \quad (12)$$

Из (10) и (12) видно, что при некотором значении  $A = A_s$ , удовлетворяющем условию

$$\int_{\theta_1}^{\theta_3} q(\theta, A) d\theta = W(\theta_3, A) - W(\theta_1, A) = 0, \quad (13)$$

скорость волны равна нулю ( $V = 0$ ), то есть возникает стоячая АВ переключения, или доменная стенка.

В случае сегнетоэлектрика (раздел 2)  $\theta \equiv P$ , а  $A \equiv E$ , то есть величины  $\theta$  и  $A$  являются векторами. При этом, согласно (2) и (8),

$$q(P, E) = -\alpha P + \beta P^3 + E, \quad (14)$$

а энергия  $W$ , определяемая (11), дается выражением (1), то есть в случае сегнетоэлектрика (12) приобретает вид

$$V = [W(P_0, E) - W(-P_0, E)] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{dP}{dX} \right)^2 dX \right]^{-1}. \quad (15)$$

Из (15) и (1) легко убедиться, что скорость доменной стенки  $V$  равна нулю только при  $E = 0$ . При этом стационарное уравнение (2) для  $E = 0$  допускает решение

$$P(X) = P_0 \text{th}(X - X_0), \quad (16)$$

описывающее состояние в виде статической доменной стенки (рис. 2, *г*), находящейся в некоторой точке  $X = X_0$ . (Напомним, что в (16)  $X$  измеряется в длинах  $l$ .) При  $E \neq 0$  доменная стенка, согласно (15) и (1), имеет конечную постоянную скорость, то есть образуется АВ переключения, движущаяся из метастабильного состояния  $\theta_1 \approx P_0$  с энергией  $EP_0$  в равновесное состояние  $\theta_3 \approx -P_0$  с меньшей энергией, равной  $-EP_0$  (рис. 2, *а*). Из (15), (1) и (16) следует, что при  $E \ll P_0$  скорость движения доменной стенки (АВ) в размерных единицах примерно равна  $V = (l/\tau)E/P_0$ .

В неравновесных системах параметры  $\theta$  и  $A$  могут быть скалярными величинами. В частности, в разогретой полупроводниковой пленке, рассмотренной в разделе 4,  $\theta \equiv T$  и  $A \equiv E^2$ . Для такой пленки, согласно (5),

$$q(T, E^2) = -\sigma(T)E^2 + \frac{T - T_0}{R_T}. \quad (17)$$

Используя (12), легко убедиться (в частности, полагая  $\sigma(T) \sim T^2$ ), что  $V = 0$  при некотором конечном значении разогревающего электрического поля  $E = E_s \neq 0$ . При этом АВ возникает только тогда, когда электрическое поле удовлетворяет условию  $E_m < E < E_c$  (рис. 3, *г*). При этом, когда  $E_c > E > E_s$ , происходит переключение пленки, находящейся в состоянии  $T = T_{\min}$ , в другое устойчивое стационарное состояние  $T = T_{\max}$  (рис. 2, *б*). Напротив, при меньших полях, удовлетворяющих условию  $E_s > E > E_m$ , АВ возникает только в том случае, когда пленка находится в стационарном состоянии  $T = T_{\max}$ , и описывает ее переключение в состояние  $T = T_{\min}$ .

## 7. АВТОВОЛНЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В ДВУХМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Сегнетоэлектрические (рис. 2, *б*) и полупроводниковые пленки (рис. 3, *а*), к которым приложено внешнее напряжение  $V$ , по существу являются двухмерными системами. Ясно, что если такую пленку, находящуюся в “метастабильном” состоянии, переключить вдоль одной из ее границ, то в такой пленке можно возбудить АВ переключения, которая будет иметь плоский фронт, в сечении совпадающий с изображенным на рис. 2, *в* или рис. 3, *б*. Если же на пленку подать локализованное возмущение (например, в виде пятна радиуса  $R$ ), то площадь этой области будет увеличиваться до тех пор, пока не займет всю площадь пленки, то есть пока в результате распространения АВ не произойдет переключение пленки в более выгодное состояние.

Наглядным примером АВ в двухмерных системах является распространение фронта горения травы в степи. Если на пути такой АВ возникнет препятствие в виде участка, на котором отсутствует трава, то в этом месте горение затухнет, но фронт горения обойдет это препятствие.

Аналогичный эффект реализуется и в случае сегнетоэлектрической (раздел 2) и полупроводниковой пленок (раздел 3), когда металлические электроды к ним сделаны не сплошными, а дискретными и такими, чтобы была возможность подавать напряжение на любую часть пленки. Это позволяет создавать препятствия произвольной формы на пути распространения фронта АВ переключения таких пленок. Ясно, что взаимодействие АВ с препятствием зависит от его формы. Поэтому если поместить на границу системы (пленки) датчики, то по их реакции можно судить о форме и размере препятствия. В настоящее время на основе этого эффекта делаются попытки создать функциональные устройства распознавания образов, которые в отличие от традиционных компьютерных систем принимают решения по одному или нескольким циклам переключения пленок.

Процесс стационарного роста начального локального возмущения (в каком-то смысле зародыша новой фазы) описывается уравнением (9), в котором  $V$  надо заменить на  $V + K$ , где  $V$  — нормальная к поверхности фронта АВ скорость, а  $K$  — кривизна поверхности фронта. Анализ этого уравнения показывает, что существует некоторый критический размер начальной области возмущения ("зародыша")  $R = R_c$ , величина которого зависит от уровня возбуждения системы (параметра  $A$ ): при  $R < R_c$  зародыш исчезает, а при  $R > R_c$  он прорастает через всю систему, переключая ее в более выгодное состояние.

## 8. АВТОВОЛНЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ

Эффект прорастания зародыша хорошо известен из теории фазовых переходов I рода. Такие фазовые переходы реализуются в равновесных системах, которые в определенном диапазоне температур  $T$  могут находиться в нескольких (как правило, в двух) фазовых состояниях. Примерами таких фазовых переходов является образование воды из переохлажденного пара, льда из переохлажденной воды и кристаллов из переохлажденных жидкых расплавов. Переохлажденные вещества представляют собой метастабильные состояния систем, в которых фазовые переходы I рода реализуются в две стадии.

Так, в переохлажденном паре сначала у малых неоднородностей (пылинок) образуются зародыши новой равновесной фазы (маленькие капельки воды), затем те из этих зародышей, чей радиус больше критического ( $R > R_c$ ), начинают увеличиваться по размеру и таким образом переводят пар в воду. Аналогично за счет роста зародышей в виде маленьких льдинок (или кристалликов) осуществляется фазовый переход переохлажденной воды в лед (или переохлажденного расплава в кристаллическое состояние).

Итак, мы видим, что процесс прорастания зародышей новой фазы в равновесных системах с фазовым переходом I рода также представляет собой АВ переключения из метастабильного в равновесное состояние.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы убедились, что АВ переключения возникают как в равновесных, так и в неравновесных системах различной природы и описывают динамику перехода системы из одного устойчивого (метастабильного) состояния в другое устойчивое, более выгодное (равновесное) состояние. Иными словами, образование таких АВ является универсальным и достаточно распространенным в природе явлением. АВ переключения в двухмерных системах (пленках) могут быть использованы для создания функциональных систем обработки информации, в частности распознавания образов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
2. Полак Л.С., Михайлов А.С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М.: Наука, 1983. 285 с.
3. Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитоны. М.: Наука, 1991. 198 с.
4. Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитоны // Успехи физ. наук. 1989. Т. 157, № 2. С. 201–266.

\* \* \*

Вячеслав Владимирович Осипов, доктор физико-математических наук, профессор МИРЭА и МФТИ, лауреат Государственной премии. Область научных интересов – теория неравновесных и нелинейных явлений, самоорганизация, автосолитоны, физика полупроводников и фотоника. Автор четырех монографий, семи обзоров и более 300 научных статей в реферируемых научных журналах.