NECESSARY CONDITION OF EXTREMUM AND VARIATIONAL FERMAT PRINCIPLE

V. N. SAMOKHIN

Fundamental theorem of differential calculus and the variational principle of geometric optics from the position of their logical intercommunication are discussed.

В статье обсуждаются одна фундаментальная теорема дифференциального исчисления и вариационный принцип геометрической оптики с точки зрения их логической взаимосвязи.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА И ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ФЕРМА

В. Н. САМОХИН

Московский государственный университет печати

ВВЕДЕНИЕ

Через два года исполнится 400 лет со дня рождения гениального математика XVII века Пьера Ферма (1601–1665). Получив юридическое образование и будучи блестяще образованным в области истории, языкознания и литературы, Ферма после некоторой адвокатской практики становится государственным служащим и остается им до конца жизни. С 1631 года он уполномоченный по прошениям муниципального совета в Тулузе, а в 1648 году назначается королевским советником местного парламента. За всю жизнь Ферма не опубликовал ни одной математической работы. Поэтому можно сказать, что П. Ферма не был профессиональным математиком, но пальма первенства среди любителей отдана ему давно и навсегда.

Ферма внес значительный вклад в становление и развитие различных отраслей математики – от теории чисел до теории вероятностей. Мы кратко обсудим лишь его теорему о необходимом условии существования экстремума дифференцируемой функции и попытаемся установить связь этой теоремы с фундаментальным принципом геометрической оптики, также принадлежащим Ферма.

ТЕОРЕМА ФЕРМА О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ ЭКСТРЕМУМА

Эта важная теорема дифференциального исчисления столь проста, что изучается в школьном курсе “Алгебра и элементарные функции”. В современных терминах теорема формулируется так: *если функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, дифференцируема в этой точке и имеет при $x = x_0$ экстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Теорема получена в 1628–1629 годах при решении задачи на отыскание наибольших и наименьших значений многочленов, а известна стала лишь десять лет спустя из письма к Р. Декарту (“О вершине параболы”), переданного через М. Мерсенна в 1638 году. Полученному результату Ферма посвятил также работу “Метод отыскания наибольших и наименьших значений” (1637), которая, однако, была опубликована лишь в 1679 году.

Каким же образом получил Ферма свою теорему почти за полвека до “изобретения” производной и дифференциального исчисления? Он обратил внимание на то, что в достаточно малой окрестности точки экстремума (точки локального минимума или локального максимума) приращение функции сохраняет знак независимо от знака приращения аргумента: в точке строгого минимума приращение положительно, а в точке максимума отрицательно. Поэтому для отыскания экстремума Ферма изучал зависимость приращения функции от малых приращений аргумента. Покажем, к примеру, как по методу Ферма следовало искать вершину параболы $y = x^2$, то есть минимум функции $f(x) = x^2$. Рассмотрим приращение функции $f(x)$ в произвольной точке x при малом приращении аргумента h. Получим

$$f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - x^2 = 2xh + h^2.$$

Чтобы приращение функции $f(x)$ не зависело от h, нужно, чтобы выполнялось равенство $2xh = 0$, то есть $2x = 0$. Значит, $x = 0$ и вершина параболы $y = x^2$ имеет координаты (0, 0). С точки зрения дифференциального исчисления мы искали такое x, что $f'(x) \equiv \equiv 2x = 0$. Ферма не занимался изучением достаточных условий экстремума, но отметим все же, что в силу неравенства $f(0 + h) - f(0) = h^2 \geq 0$ можно утверждать наличие в точке $x = 0$ локального минимума функции. Рассмотрим еще один пример. Пусть $g(x) = x(1 - x)$. Имеем

$$g(x + h) - g(x) = x + h - (x + h)^2 - x + x^2 = (1 - 2x)h - h^2.$$

Наибольшее значение функция $g(x)$ имеет в точке x, где $1 - 2x = 0$, то есть при $x = 1/2$. При этом $g_{max} = 1/4$.

Своим открытием Ферма перевел большой класс почти нерешаемых задач в разряд вполне разрешимых, так как для отыскания экстремума дифференцируемой функции оказалось достаточным рассматривать вместо всего множества определения функции лишь множество ее критических точек (точек, в которых производная функции обращается в нуль).

Пользуясь методом Декарта для сведения некоторых геометрических задач к задачам исследования “величин” и своим методом отыскания наибольших и наименьших значений, Ферма успешно решил задачи, часть из которых поставил сам.

Можно с уверенностью предположить, что из “Начал” Евклида Ферма знал известную задачу на отыскание максимального значения, которая теперь легко могла быть решена его методом.

Задача Евклида. *Из всех параллелограммов, вписанных в треугольник, найти тот, который имеет наибольшую площадь.*

Эту задачу Евклид решил сам и установил, что искомым параллелограммом является тот, у которого основание вдвое меньше основания данного треугольника. Теперь же задача геометрии сводится к несложной задаче на отыскание экстремума функции. Пусть в ΔABC вписан параллелограмм $AMND$ (рис. 1). Предположим, что $AD = x \cdot AC$, $0 \leq x \leq 1$. Из $\Delta ABC \backsim \Delta DNC$ следует равенство $NN' = (1 - x) \cdot BB'$. Вследствие этого площадь параллелограмма $S = AC \times \times BB' \cdot x(1 - x) = 2S_1x(1 - x)$, где S_1 – площадь треугольника. Как было показано выше, функция $g(x) = = x(1 - x)$ имеет максимум при $x = 1/2$. Таким образом, $S_{max} = S_1/2$ при $x = 1/2$, то есть при $AD = DC$.

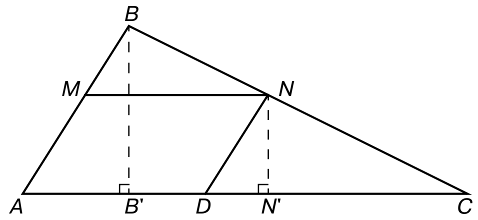

Рис. 1

Задача Ферма. *Отрезок AB разделить на отрезки AC и CB так, чтобы прямоугольник со сторонами AC и CB имел наибольшую площадь.*

Предположим, что $AC = x \cdot AB$, $0 \leq x \leq 1$. Тогда $CB = (1 - x)AB$ и площадь прямоугольника $S = = AB^2x(1 - x)$. Таким образом, площадь прямоугольника со сторонами AC и CB имеет максимальное значение $AB^2/4$ при $x = 1/2$, то есть отрезок AB нужно поделить пополам.

Приводя простейшие примеры применения своего метода, Ферма указывал, что так же нужно действовать и в других случаях. Каких? Не означает ли это, что он решал более сложные задачи на отыскание экстремума, которые навели его на мысль о неком общем законе, господствующем в природе?

ПРИНЦИП ФЕРМА В ОПТИКЕ

Ферма не был физиком в современном понимании, да и с точки зрения современной ему науки тоже. Видимо, осмысление известных экспериментальных фактов и результатов собственных наблюдений с позиций открытого им метода отыскания экстремумов привело его к формулировке фундаментального положения геометрической оптики, называемого принципом Ферма.

Принцип Ферма. *Из всех путей от точки A к точке B свет выбирает тот путь, на который требуется наименьшее время.*

Этот принцип был сформулирован для явления преломления света впервые в 1662 году в письме к де ла Шамбру. Ферма пытался объяснить справедливость этого принципа, утверждая, что “природа действует наиболее легкими и доступными путями”. В последнем утверждении заключается широкий естественнонаучный и философский взгляд ученого, который можно было обрести лишь изучая конкретные физические факты и решая математические задачи прикладного характера. Таковой, к примеру, является задача об отражении света от зеркальной поверхности, которая была решена Героном Александрийским: при отражении свет выбирает кратчайший путь – угол падения равен углу отражения. В этой задаче вопрос о наименьшем времени прохождения света решается легко, так как выбирается кратчайший путь в одной среде. Если требуется найти кратчайший путь ACB света из точки A в точку B (рис. 2), то достаточно построить точку A', симметричную A относительно прямой L, и прямую $A'B$. Точка C является точкой пересечения прямых L и $A'B$. Если $D \neq C$, то $ADB > ACB = A'CB$.

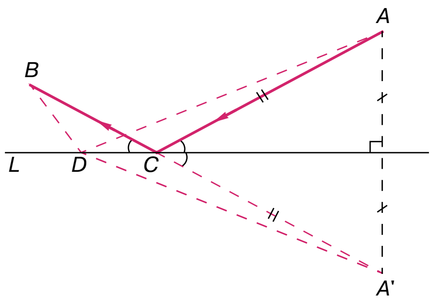

Рис. 2

Закон преломления света на границе двух сред, хорошо известный из школьного учебника физики, был открыт голландцем В. Снеллом в 1621 году. Согласно этому закону, отношение синусов углов между перпендикуляром к границе раздела двух сред и лучами падающего и преломленного света постоянно (рис. 3):

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = n,$$

n – коэффициент преломления среды по отношению к воздуху.

Весьма вероятно, что эти результаты были хорошо известны Ферма. Хотя физические представления XVII века не позволяли дать количественную оценку зависимости скорости света в среде и коэффициента преломления среды, но ситуационно подобные задачи о наименьшем времени достижения Ферма мог решать применяя свой метод отыскания экстремумов. Возможно, это и были другие случаи, когда можно применить тот же метод, что и для отыскания вершины параболы.

Одной из таких задач является задача о нахождении пути скачущей лошади, по которому она из точки A, расположенной на лугу, быстрее всего достигнет точки B на пашне. Принимая, естественно,

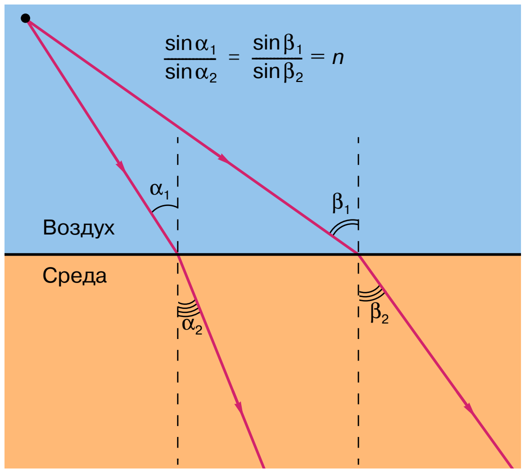

Рис. 3

что скорости υ_1 и υ_2 бега лошади по лугу и пашне различны, предположим, что граница двух полей прямолинейна (рис. 4) и совпадает с координатной осью OX. Если искомым путем из A в B является ломаная AxB, то время $t(x)$ прохождения этого пути

$$t(x) = \frac{\sqrt{(c-x)^2 + a^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{\upsilon_2}.$$

Находим

$$t'(x) = -\frac{c-x}{\upsilon_1\sqrt{(c-x)^2 + a^2}} + \frac{x}{\upsilon_2\sqrt{x^2 + b^2}}$$

и, следовательно,

$$t'(x) = -\frac{\sin\alpha_1}{\upsilon_1} + \frac{\sin\alpha_2}{\upsilon_2}.$$

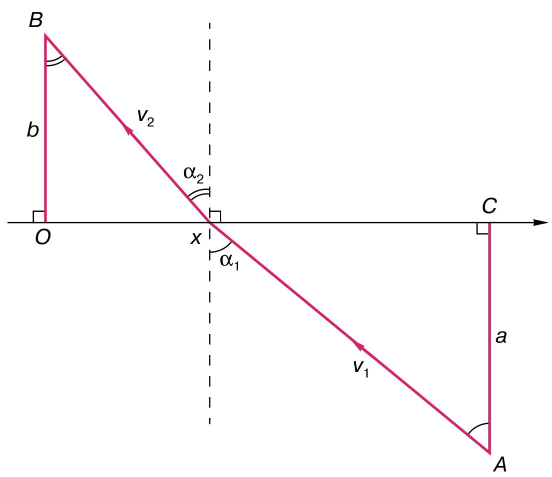

Рис. 4

Время $t(x)$ будет минимально, если точка x выбрана так, что $t'(x) = 0$, откуда следует равенство

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}.$$

Это соотношение поразительно аналогично закону Снелла, но в отличие от него рационально объясняет, почему ломаный путь из A в B предпочтительнее прямолинейного.

В пылу состязания жокею не всегда удается правильно найти точку x, но путь коня всегда преломляется на границе луга и пашни. Не эта ли аналогия с движением луча света позволила Ферма проникнуть в одну из тайн природы?

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМА ПРИНЦИПА ФЕРМА

В математике кроме функций изучаются и исследуются на экстремум более общие отображения – функционалы. Так называются однозначные отображения, принимающие числовые значения, аргументами которых являются функции. Изучение экстремальных свойств функционалов является предметом вариационного исчисления. Основы этого исчисления были заложены Я. Бернулли и И. Бернулли в XVIII веке. Существенный вклад в развитие этого исчисления внесли Л. Эйлер и Ж. Лагранж. Приведем примеры функционалов, зависящих от непрерывных и дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[a, b]$:

$$J(\upsilon(x)) = \int_a^b \upsilon(x)dx$$

есть площадь криволинейной трапеции (с учетом знака),

$$J(y(x)) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

есть длина кривой $y = y(x)$ и вообще

$$J(\upsilon(x)) = \int_a^b F(x, \upsilon(x), \upsilon')dx,$$

где $F(x, y, z)$ – непрерывная функция трех переменных.

Если определить тем или иным путем расстояние между функциями, заданными на отрезке $[a, b]$, то по аналогии с экстремумом функций можно ввести понятие экстремума функционала. Л. Эйлер вывел необходимое условие того, что на функции $y(x)$ функционал $J(y(x))$ принимает экстремальное значение. Изучая функционалы, заданные на множестве функций с фиксированными значениями $y(a)$ и $y(b)$, Эйлер (подобно тому, как это делал Ферма для функций) рассматривал приращение функционала, то есть

$$J(y(x) + h(x)) - J(y(x)) =$$
$$= \int_a^b (F(x, y + h, y' + h') - F(x, y, y'))dx,$$

где функция $h(x)$ такова, что $h(a) = h(b) = 0$, и нашел условие, при котором это приращение не зависит от $h(x)$. Таким условием является равенство нулю функционала

$$\delta J(y(x), h(x)) \equiv$$
$$\equiv \int_a^b \left(F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y, y')\right)h(x)dx = 0, \qquad (1)$$

где F_y и $F_{y'}$ означают производные по переменным y и y' соответственно. Для этого необходимо, чтобы функция $y(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y, y') = 0. \qquad (2)$$

Условие (1) является аналогом необходимого условия экстремума функции, выведенного Ферма, а уравнение (2) называется уравнением Эйлера.

Принцип Ферма, сформулированный им для явления преломления света, может быть дан в современной вариационной форме для общего случая распространения света в неоднородной среде. Для примера предположим, что свет распространяется в некоторой плоскости, в которой введены декартовы координаты (x, y). Неоднородность среды в данном случае означает, что коэффициент преломления и скорость υ в среде зависит от x и y. Согласно вариационному принципу Ферма, свет из точки $A(a, y(a))$ в точку $B(b, y(b))$ движется по такой кривой $y = y(x)$, $a \le x \le b$, которая обеспечивает минимум функционалу

$$T(y(x)) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\upsilon(x, y(x))}dx.$$

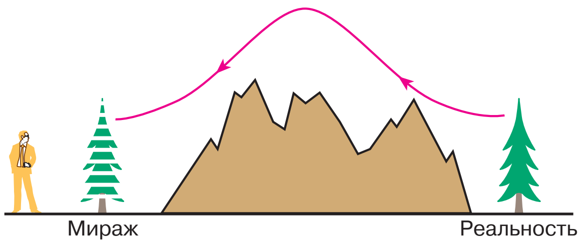

Рис. 5

Принцип Ферма является основополагающим при изучении процессов распространения света в сложных оптических системах, неоднородных и неизотропных средах, кристаллах и т.п. Он объясняет, почему на закате мы продолжаем видеть солнце, когда фактически оно находится уже за горизонтом, а также дает объяснение такого удивительного оптического явления в атмосфере, как мираж.

В общих чертах причина миража состоит в том, что из-за разреженности воздуха у поверхности земли вследствие высокой температуры и естественной разреженности на большой высоте в атмосфере возникают два слоя воздуха с одинаково низким коэффициентом преломления. Между этими слоями находится слой воздуха с большей плотностью и, следовательно, с большим коэффициентом преломления света. Благоприятное сочетание этих обстоятельств обеспечивает такую траекторию для луча света, по которой он может распространятся на большие расстояния, огибая естественные препятствия (рис. 5). Подобным образом распространяются в плоскости (x, y) некоторые лучи света, исходящие из точки (0, 0), если коэффициент преломления в точке (x, y)

$$n(x, y) = y^4 - y^2 + 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белл Э.Т.* Творцы математики: Предшественники современной математики: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1979. 256 с.

2. Хрестоматия по истории математики: Пособие для студентов пед. ин-тов / Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1977. 224 с.

3. *Кудрявцев П.С.* Курс истории физики. М.: Просвещение, 1982. 448 с.

4. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424 с.

5. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 240 с.

* * *

Вячеслав Николаевич Самохин, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного университета печати. Область научных интересов – дифференциальные уравнения с частными производными, математические проблемы гидродинамики, приложения математики в технических науках. Автор 72 научных работ и соавтор одной монографии.