EULER'S THEOREM FOR POLYHEDRONS

G. M. ZHISLIN

Topological aspects of Euler's Theorem are considered. Elementary proof of this theorem for simple polyhedrons and for more complex surfaces is given.

Обсуждаются топологические аспекты теоремы Эйлера и приводится ее элементарное доказательство как для простых многогранников, так и для более сложных поверхностей.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА ДЛЯ МНОГОГРАННИКОВ

Г. М. ЖИСЛИН

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Посвящается памяти
Николая Петровича Тихомирова, моего учителя
математики в школе № 2 г. Владимира

ВВЕДЕНИЕ

Теорема Эйлера – математическое утверждение, связывающее между собой число ребер, граней и вершин многогранников. Эта теорема была открыта французским ученым Рене Декартом еще в 1640 году, затем забыта более чем на сто лет и лишь в 1752 году переоткрыта российским математиком Леонардом Эйлером, имя которого она носит.

Теорема Эйлера хорошо известна и присутствует в продвинутых школьных курсах математики. Однако там она, как правило, жестко связана с изучением многогранников и используется в основном для выяснения того, какие правильные многогранники могут существовать. Такой подход создает превратное впечатление о роли и месте теоремы Эйлера: остается невскрытой чисто топологическая сущность этой теоремы и ее роль в классификации поверхностей, не выясняется связь эйлеровой характеристики с родом поверхности. В результате возникают потери и для приложений: распространение теоремы Эйлера на более сложные, чем обычные многогранники, объекты (сферы с "ручками", многогранники с "дырками" и т.д.) остается вне школьных факультативов.

Цель настоящей статьи – привлечь внимание учителей к чисто топологическим аспектам теоремы Эйлера. Для этого мы сначала (следуя идеям [1]) проводим наглядное топологическое доказательство данной теоремы для простых многогранников, а затем, используя уже полученный результат, доказываем теорему Эйлера и для более сложных поверхностей. Одновременно выясняется связь эйлеровой характеристики и рода поверхности. В заключение приведено вытекающее из теоремы Эйлера описание всех возможных правильных многогранников.

В статье использованы только простые математические понятия, самым сложным из которых (по мнению автора) является понятие непрерывного взаимно однозначного отображения (определение 1). Поэтому изложенный материал доступен не только учителям, но и старшим школьникам, и после соответствующего расширения (см., например, [1–4]) он может быть использован в школьных факультативах.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРОСТЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Начнем с рассмотрения двух многогранников, хорошо известных из школьной программы, – тетраэдра и куба. Условимся обозначать число вершин многогранника буквой B, число ребер – буквой P, число граней – буквой Γ. Тогда для выбранных многогранников можно составить следующую табличку:

	B	Γ	P	$Э = B + \Gamma - P$
Тетраэдр	4	4	6	2
Куб	8	6	12	2
				2

В последнем столбце таблицы вычисляется величина $Э$, которая, по определению, равна $B + \Gamma - P$. Мы видим, что, хотя числа B, Γ и P для тетраэдра и куба различны, величины $Э$ для них совпадают. Можно было бы подумать, что это совпадение случайно, однако если бы мы подсчитали величины B, Γ и P для какого-либо другого многогранника "без дырок", заполнив свободную строчку таблицы, то еще раз убедились бы, что, несмотря на различия самих многогранников и различия для них величин B, Γ и P, значение $Э$ остается постоянным и равным двум. Таким образом, имеет место равенство

$$B + \Gamma - P = 2, \tag{1}$$

которое и называется теоремой Эйлера для многогранников. В этом разделе мы опишем условия справедливости равенства (1) и дадим его простое геометрическое доказательство. Начнем с необходимых определений. Многоугольником называется часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией (без самопересечений). Пространственная фигура, ограниченная многоугольниками, называется многогранником. Примеры многоугольников и многогранников хорошо известны, и мы на них не останавливаемся. В настоящем разделе рассматриваются только так называемые простые многогранники. Чтобы определить их строго, нам необходимо ввести основное для дальнейшего изложения понятие гомеоморфизма или гомеоморфного отображения.

Пусть $G = \{r | r = (x, y, z)\}$ и $G' = \{r' | r' = (x', y', z')\}$ – два точечных множества в трехмерном пространстве (мы не исключаем возможности того, что G и G' лежат на каких-либо кривых или принадлежат каким-либо плоскостям).

Определение 1. Отображение $r' = f(r)$ множества G на множество G' называется *гомеоморфизмом*, если выполняются следующие условия:

А. Каждой точке r из G отображение $f(r)$ ставит в соответствие единственную точку r' из G' и для любой точки $r' \in G'$ существует единственная точка r из G, для которой $f(r) = r'$.

Б. Для любых r_1, r_2 из G, $r'_1 = f(r_1)$, $r'_2 = f(r_2)$:
если $|r_1 - r_2| \longrightarrow 0$, то $|r'_1 - r'_2| \longrightarrow 0$;
если $|r'_1 - r'_2| \longrightarrow 0$, то и $|r_1 - r_2| \longrightarrow 0$.

Условие А есть требование взаимной однозначности отображения $r' = f(r)$: разные точки под действием $f(r)$ переходят в разные.

Условие Б есть требование непрерывности отображения $f(r)$ и его обратного $f^{-1}(r')$: близкие точки r_1 и r_2 из G должны отображаться в близкие точки из G' и, наоборот, близкие точки r'_1 и r'_2 из G' должны иметь близкие прообразы r_1 и r_2 в G.

Таким образом, можно сказать, что гомеоморфизм – это взаимно однозначное и непрерывное отображение, для которого обратное тоже является непрерывным. Примером гомеоморфизма может служить соответствие между точками поверхности куба и точками содержащей его произвольной сферы. Установим это соответствие следующим образом (рис. 1): из произвольной точки O, лежащей строго внутри куба, проведем лучи ко всем точкам сферы и точке r пересечения луча с поверхностью куба поставим в соответствие точку r' пересечения этого же луча с поверхностью сферы. Легко проверить, что построенное отображение удовлетворяет требованиям А, Б определения 1 и, следовательно, является гомеоморфизмом. Нетрудно показать также, что замкнутая ломаная линия без самопересечений гомеоморфна окружности, что парабола гомеоморфна прямой и т.д. В то же время, например, отрезок прямой негомеоморфен окружности. Действительно, если бы отрезок был гомеоморфен окружности, то отрезок с выколотой точкой был бы гомеоморфен окружности с выколотой точкой. Но это невозможно, поскольку отрезок с выколотой точкой есть множество несвязное и при гомеоморфизме он должен отображаться в несвязное множество, а окружность с выколотой точкой является множеством связным (множество G называется связным, если любая пара точек из G может быть соединена непрерывной кривой, все точки которой принадлежат G; сохранение связности множества при гомеоморфизме легко проверяется).Точно так же можно показать, что отрезок негомеоморфен

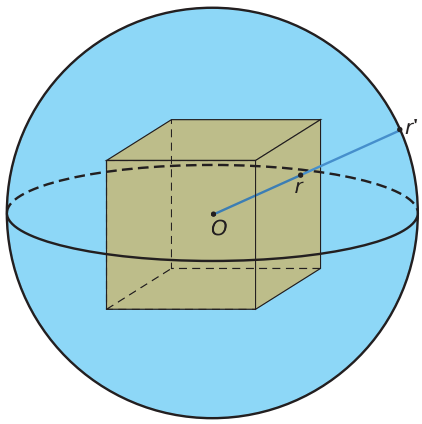

Рис. 1. Гомеоморфное отображение поверхности куба на поверхность сферы

кругу. В качестве распространенного и наглядного примера гомеоморфного отображения поверхности можно рассматривать ее деформацию при условии, что эта деформация не разрывает поверхности (является непрерывной) и не приводит к склеиванию различных точек (то есть является взаимно однозначной).

Теперь мы можем дать определение простого многогранника.

Определение 2. Многогранник называется *простым*, если его поверхность гомеоморфна сфере.

Простыми многогранниками являются, например, пирамиды, призмы и вообще все выпуклые многогранники (то есть такие, для которых отрезок, соединяющий любые точки многогранника, целиком принадлежит этому многограннику). Мы можем убедиться в этом, построив явно гомеоморфное отображение поверхности многогранника на поверхность сферы так же, как это было сделано в случае куба. Выпуклость многогранника нужна нам здесь лишь для того, чтобы лучи, идущие из внутренней точки многогранника к поверхности содержащей его сферы, пересекали поверхность многогранника только в одной точке. Пример многогранника, не являющегося простым, – многогранник с "дыркой" (рис. 2, *а*).

Докажем теорему Эйлера (то есть равенство (1)) для простых многогранников. Пусть Σ – поверхность простого многогранника, $B(\Sigma)$, $\Gamma(\Sigma)$ и $P(\Sigma)$ – соответственно число вершин, граней и ребер поверхности Σ, $Э(\Sigma) := B(\Sigma) + \Gamma(\Sigma) - P(\Sigma)$. Мы хотим доказать, что $Э(\Sigma) = 2$. Отобразим гомеоморфно Σ на поверхность S_0 некоторой сферы. Тогда на S_0 появится криволинейная сетка L_0, состоящая из образов ребер многогранника; образами граней будут некоторые области на S_0, гомеоморфные кругу, а образами вершин – точки пересечения кривых сетки L_0 между собой. Сохраним за образами на сфере ребер, вершин и граней поверхности Σ прежние названия. Вследствие гомеоморфизма поверхностей Σ и S_0 числа ребер $P(S_0)$, граней $\Gamma(S_0)$ и вершин $B(S_0)$ криволинейной сетки L_0 на сфере S_0 будут теми же, что у поверхности Σ, и, значит, $Э(S_0) = \Gamma(S_0) + B(S_0) - P(S_0) = Э(\Sigma)$. Вырежем из поверхности сферы S_0 одну грань и гомеоморфно деформируем полученную сферу с "дыркой" в плоскую область, растягивая сферу так, чтобы ребра – границы дырки составили границу полученной плоской области Σ_1 (рис. 3, *а* соответствует случаю, когда вырезанная грань была пятиугольником). Вследствие деформации сферы S_0 сетка L_0 на S_0 трансформируется в некоторую сетку L_1 на Σ_1. По построению, сетка L_1 имеет на одну грань меньше, чем L_0, при том же количестве вершин и ребер, и, значит,

$$Э(\Sigma_0) = Э(\Sigma_1) + 1. \qquad (2)$$

Для нахождения $Э(\Sigma_1)$ будем последовательно упрощать область Σ_1, убирая ребра, грани и вершины так, чтобы на каждом этапе величина $Э = B + \Gamma - P$ не менялась. В качестве первого шага уберем из Σ_1 ребро AB и грань α. Ясно, что для полученной области Σ_2 выполняется $Э(\Sigma_2) = Э(\Sigma_1)$. Далее из Σ_2 удалим ребро AC и грань β. Для полученной фигуры Σ_3 (см. рис. 3, *б*), очевидно, $Э(\Sigma_3) = Э(\Sigma_2)$. Теперь уберем одинокое ребро AA_1 с вершиной A. Так как при этом уменьшаются на единицу и число ребер, и число вершин (входящие в формулу Эйлера с противоположными знаками), то для полученной области Σ_4 выполняется $Э(\Sigma_4) = Э(\Sigma_3)$. Продолжая действовать подобным образом, после k-го шага придем к области Σ_{k+1}, являющейся многоугольником. Но для любого многоугольника числа ребер и вершин совпадают, грань одна. Поэтому $Э(\Sigma_{k+1}) = 1$. По построению, $Э(\Sigma_1) = Э(\Sigma_{k+1}) = 1$, и в силу (2) $Э(\Sigma_0) = 2$.

Теорема Эйлера доказана.

Самым поучительным в приведенном доказательстве является то, что оно верно не только для многогранников. Действительно, рассмотрим произвольную пространственную фигуру, гомеоморфную шару. Нанесем на ее поверхность Σ криволинейную сетку L, разбивающую Σ на конечное число областей, гомеоморфных кругу, которые мы назовем гранями. Пусть $P(\Sigma)$, $\Gamma(\Sigma)$ и $B(\Sigma)$ суть соответственно число ребер, граней и вершин сетки L и $Э(\Sigma) = B(\Sigma) + \Gamma(\Sigma) - P(\Sigma)$. Отобразив Σ гомеоморфно на поверхность какой-либо сферы и рассуждая аналогично предыдущему, получим $Э(\Sigma) = 2$. Таким образом, мы установили, что все гомеоморфные

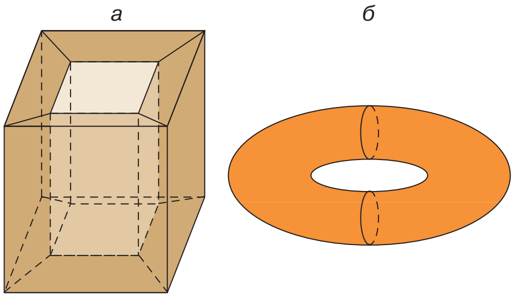

Рис. 2. *а* – многогранник с дыркой, *б* – тор

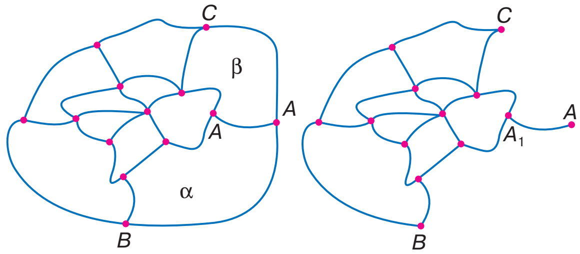

Рис. 3. *а* – гомеоморфный образ на плоскости поверхности простого многогранника с вырезанной гранью; *б* – то же, что *а*, но без ребер *AB*, *AC* и граней α, β

сфере поверхности Σ имеют одну и ту же величину эйлеровой характеристики $Э(\Sigma)$ – число 2. Обратим внимание на то, что значение $Э(\Sigma)$ оказалось не зависящим от площади и числа граней, длин и числа ребер, углов пересечения ребер и числа вершин сетки и т.д. Другими словами, эйлерова характеристика не связана с метрическими свойствами поверхностей, а отображает более глубокие их свойства.

Определение 3. Свойство поверхности Σ называется *топологическим*, если оно сохраняется при любых гомеоморфных преобразованиях Σ.

Ясно, например, что объем, ограниченный поверхностью Σ, или площадь Σ не относятся к топологическим свойствам. В отличие от них эйлерова характеристика является топологическим свойством поверхности. Более того, она определяет тип поверхности в том смысле, что если для какой-то поверхности эйлерова характеристика равна двум, то эта поверхность гомеоморфна сфере. Точная формулировка этого и более общего утверждений будет дана в следующем разделе.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Доказательство теоремы Эйлера для простых многогранников привело нас к выделению класса поверхностей, гомеоморфных сфере. Рассмотрим теперь многогранники, не являющиеся простыми. Примером таких многогранников может служить уже упоминавшийся многогранник с дыркой (рис. 2, *а*). Эйлерова характеристика для него равна нулю. Легко проверить, что для многогранника с двумя не пересекающимися дырками она равна –2. Возникают вопросы: какие еще значения может принимать эйлерова характеристика для многогранников, не являющихся простыми; являются ли многогранники с одним и тем же значением эйлеровой характеристики гомеоморфными друг другу, и если да, то какая геометрическая фигура может наглядно представлять класс многогранников с заданным значением $Э(\Sigma)$, подобно тому как сфера представляет поверхности простых многогранников?

Ответ на эти вопросы будет дан в ответе на вопросы более общего характера, формулируемые ниже.

Рассмотрим произвольную поверхность Σ, которая с помощью криволинейной сетки L разбита на конечное число областей, гомеоморфных кругу. Пусть $B_L(\Sigma)$, $Г_L(\Sigma)$ и $P_L(\Sigma)$ суть числа вершин, граней и ребер сетки L. Сопоставим поверхности Σ и сетке L число $Э_L(\Sigma) = B_L(\Sigma) + Г_L(\Sigma) - P_L(\Sigma)$. Интересно выяснить:

1) зависит ли величина $Э_L(\Sigma)$ от выбора сетки L;

2) если не зависит, то какие значения $Э(\Sigma)$ возможны для различных поверхностей;

3) будут ли все поверхности Σ с одним и тем же значением $Э(\Sigma)$ гомеоморфны друг другу;

4) если да, то каков “эталонный представитель” класса поверхностей с заданным значением $Э(\Sigma)$ и как он зависит от величины $Э(\Sigma)$?

Ответ на первый вопрос: не зависит. Величина $Э_L(\Sigma)$ определяется только поверхностью Σ, и, значит, можно писать $Э_L(\Sigma) = Э(\Sigma)$. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть две произвольные сетки L_1 и L_2 одной и той же поверхности и сетку L_3, которая получается наложением сеток L_1 и L_2 друг на друга. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что ни одна из вершин одной сетки не попадает на ребра другой сетки, так как при необходимости вершины можно немного сдвинуть (изгибая ребра) с сохранением величины $Э_{L_i}(\Sigma)$. Тогда, рассматривая сетку L_3 как произошедшую из L_1 и аккуратно подсчитывая вновь образованные грани, ребра и вершины, мы получаем, что $Э_{L_3}(\Sigma) = Э_{L_1}(\Sigma)$. Аналогично показывается, что

$$Э_{L_3}(\Sigma) = Э_{L_2}(\Sigma).$$

Ответ на третий вопрос: поверхности с одним и тем же значением $Э(\Sigma)$ гомеоморфны друг другу. Доказательство можно найти в [2], а здесь мы отметим лишь, что поверхности с различными значениями $Э(\Sigma)$ не могут быть гомеоморфны друг другу, так как при гомеоморфных отображениях величин $Э(\Sigma)$ сохраняется. Таким образом, все множество поверхностей распадается на непересекающиеся классы, отвечающие различным значениям эйлеровой характеристики $Э(\Sigma)$.

Переходим теперь к ответам на второй и четвертый вопросы. При этом мы ограничимся рассмотрением только тех поверхностей, для которых (как будет показано далее) эйлеровы характеристики совпадают с эйлеровыми характеристиками какихлибо многогранников. Нам будут необходимы некоторые определения [2].

Определение 4. *Поверхностью* (*без края*) называется фигура, у которой каждая точка $r = (x, y, z)$ имеет окрестность[1], гомеоморфную кругу, и точка r лежит внутри этой окрестности.

Определение 5. *Краем* называется множество тех точек $r = (x, y, z)$ фигуры, для каждой из которых существует окрестность, гомеоморфная кругу, и точка r лежит на границе этой окрестности.

Примеры поверхностей: сфера, многогранник, тор (бублик) (см. рис. 2, *б*) и т.д.

Если вырезать из поверхности шапочку, гомеоморфную кругу, то граница получившейся дырки образует край. На рис. 4 приведены сфера с краем и тор с краем. Тор с краем называется ручкой. Если две поверхности имеют края, гомеоморфные окружности, то их можно склеить по краю. В результате получится поверхность без края, так как отверстие в одной поверхности закрывается другой поверхностью. Например, склеив две сферы с краями, получим фигуру типа гантели; склеив сферу с

[1] Окрестность точки $r = (x, y, z)$ фигуры – это множество ее точек, попадающих в шар с центром в точке r.

краем и ручку, мы получим фигуру типа гири – сферу с ручкой (рис. 5, *а*). Если из сферы вырезано m непересекающихся шапочек, то к ней можно приклеить m ручек и т.д.

Определение 6. Поверхность называется *ориентируемой* или *двухсторонней*, если для любой точки $r = (x, y, z)$, лежащей на поверхности, при движении нормали из этой точки по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности и проходящему через $r = (x, y, z)$, направление нормали после возвращения в точку r не меняется на противоположное.

Примеры двухсторонних поверхностей – многогранник, тор, сфера с ручками или без, сфера с краем и т.д.

Пример поверхности, не являющейся двухсторонней, – лента Мёбиуса. Чтобы получить ленту Мёбиуса, надо взять длинную бумажную прямоугольную ленту и склеить ее концы после поворота одного из концов на 180° (рис. 4, *в*). Поверхность Мёбиуса обладает удивительными и на первый взгляд неожиданными свойствами и заслуживает специального рассмотрения. Здесь же отметим только, что если двигать нормаль, например, по средней линии поверхности Мёбиуса начиная с какой-либо точки r (которую мы отметим проколом), то нормаль вернется в r с противоположным направлением. Таким образом, поверхность Мёбиуса не является двухсторонней: она имеет только одну сторону! Чтобы убедиться в этом, будем закрашивать поверхность Мёбиуса начиная от какого-то места и двигаясь в одном направлении. Тогда мы закрасим ее всю.

Теперь можно сформулировать ответ на второй и четвертый вопросы, поставленные в начале раздела.

Теорема. *Пусть Σ – произвольная замкнутая двухсторонняя поверхность без края, допускающая разбиение на конечное число областей, гомеоморфных кругу. Тогда для некоторого целого числа p*

$$Э(\Sigma) = 2 - 2p \qquad (3)$$

и поверхность Σ гомеоморфна сфере с p ручками.

Полное доказательство теоремы можно найти, например, в [2]. Вычисление величины $Э(\Sigma)$ для сферы с p ручками приведем в следующем разделе, используя наглядный геометрический подход. А сейчас обсудим, что дает теорема для многогранников. Рассмотрим многогранник Σ с p непересекающимися "дырками" – полостями, каждая из которых обладает следующими свойствами:

а) имеет ровно два "входа",

б) каждый вход может быть закрыт поверхностью, гомеоморфной кругу;

в) фигура, образуемая закрывающими поверхностями и граничной поверхностью полости, гомеоморфна простому многограннику.

Грубо говоря, мы рассматриваем многогранник с такими "дырками", что если заполнить дырку быстротвердеющим составом, закрыв после этого оба "входа" в полость "дырки" поверхностями, а потом разбить исходный многогранник и извлечь полученную фигуру, то получим или простой многогранник, или гомеоморфное ему тело. Найдем $Э(\Sigma)$. Заклеим все p дырок "гранями" F_{i1} и F_{i2}, $i = 1, 2, ..., p$, и обозначим поверхность, полученную из Σ после заклейки дырок, через Σ_0, а многогранные поверхности заклеенных дырок-полостей через σ_i, $i = 1, 2, ..., p$. Так как и Σ_0 и σ_i гомеоморфны сферам, то $Э(\Sigma_0) = Э(\sigma_i) = 2$, $i = 1, 2, ..., p$. Поэтому величина $T = Э(\Sigma_0) + \sum_{i=1}^{p} Э(\sigma_i)$ равна $2p + 2$. По сравнению с $Э(\Sigma)$ в выражении T лишний раз считаются ребра каждой из новых граней F_{i1}, F_{i2}: один раз в $Э(\Sigma_0)$, второй в $Э(\sigma_i)$, $i = 1, 2, ..., p$. Но одновременно мы лишний раз считаем и вершины этих граней, число которых в точности равно числу ребер. Поэтому разность $T - Э(\Sigma)$ обусловлена только числом граней, считаемых в T. А именно: в T считается $2p$ лишних граней F_{i1}, F_{i2}, $i = 1, 2, ..., p$, и, кроме того, каждая из них считается дважды – в Σ_0 и в σ_i. Следовательно, $T - Э(\Sigma) = 4p$, и, значит,

$$Э(\Sigma) = T - 4p = 2 - 2p.$$

Таким образом, для многогранника с p дырками эйлерова характеристика равна $2 - 2p$ и, согласно обсуждаемой теореме, такой многогранник гомеоморфен сфере с p ручками.

Приведенные рассуждения применимы и к многогранникам, у которых имеются дырки с k входами при $k \geq 3$, при выполнении тех же условий б), в), что и для $k = 2$. Поэтому, например, многогранник Σ,

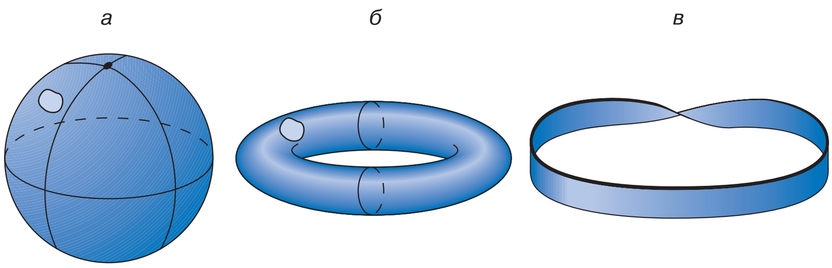

Рис. 4. *а* – сфера с краем, *б* – тор с краем (ручка), *в* – лента Мёбиуса

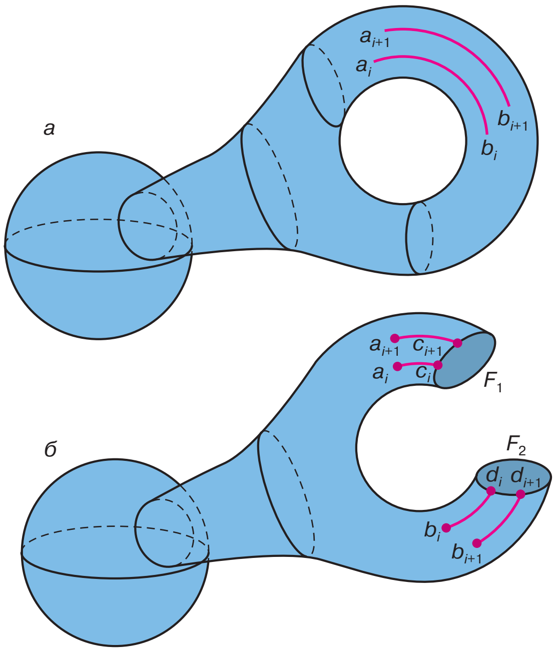

Рис. 5. *а* – сфера с ручкой, *б* – сфера с ручкой *а* после разрезания ручки и заклеивания полученных дырок

имеющий одну дырку с $p + 1$ входами, гомеоморфен сфере с p ручками, то есть $\text{Э}(\Sigma) = 2 - 2p$.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА ДЛЯ СФЕРЫ С РУЧКОЙ. РОД ПОВЕРХНОСТИ

Обозначим через S_p сферу с p ручками и вычислим величину $\text{Э}(S_p)$. Для простоты ограничиваемся сферой S_1 с одной ручкой, ибо обобщение на сферу с p ручками будет очевидным. Разобьем поверхность S_1 криволинейной сеткой L_1 на области, гомеоморфные кругу, а затем рассечем ручку плоскостью, отогнем один конец разрезанной ручки от другого и заклеим дырки плоскими гранями F_1 и F_2 (рис. 5, *б*). Обозначим полученную поверхность Σ_0. Очевидно, что Σ_0 может быть гомеоморфно деформирована в сферу и поэтому $\text{Э}(\Sigma_0) = 2$. Установим связь величин $\text{Э}(S_1)$ и $\text{Э}(\Sigma_0)$. Не ограничивая общности, можно считать, что секущая плоскость F не проходит через вершины сетки L_1. Мы всегда можем этого добиться с помощью сколь угодно малого изгиба некоторых ребер сетки L_1, не меняющего $\text{Э}(S_1)$. Пусть плоскость F пересекает k ребер (a_ib_i), $i = 1, 2, ..., k$, сетки L_1. Обозначим точки пересечения секущей плоскости F с ребрами (a_ib_i) через c_i. При разгибании разрезанной ручки на два "отростка" каждая точка c_i "раздваивается", порождая точку d_i на F_2 (считаем, что c_i остается на F_1). Поверхность Σ_0 по сравнению с S_1 имеет $2k$ новых ребер на новых гранях F_1 и F_2: (c_ic_{i+1}),(d_id_{i+1}), $i = 1, 2, ..., k$ (здесь $d_{k+1} = d_1$, $c_{k+1} = c_1$), и, кроме того, вместо каждого ребра (a_ib_i) сетки L_1 появляются два ребра в сетке для Σ_0: (a_ic_i) и (d_ib_i). Поэтому

$$P(\Sigma_0) = P(S_1) + 3k.$$

Далее

$$B(\Sigma_0) = B(S_1) + 2k,$$

ибо в сетке для Σ_0 присутствуют вершины c_i, d_i, $i = 1, 2, ..., k$, которых не было в L_1. Наконец,

$$\Gamma(\Sigma_0) = \Gamma(S_1) + 2 + k.$$

Действительно, две новые грани на Σ_0 – это F_1 и F_2. Но, кроме того, появляется еще k граней за счет того, что грань, содержавшая в сетке L_1 ребра (a_ib_i) и $(a_{i+1}b_{i+1})$, порождает две грани в сетке на Σ_0: одну, содержащую ребра (a_ic_i), (c_ic_{i+1}), $(c_{i+1}a_{i+1})$ и другую с ребрами (b_id_i), (d_id_{i+1}), $(d_{i+1}b_{i+1})$ (см. рис. 5, *б*). В силу наших выкладок

$$\text{Э}(\Sigma_0) = \text{Э}(S_1) + 2k + (2 + k) - 3k = \text{Э}(S_1) + 2,$$

но $\text{Э}(\Sigma_0) = 2$ и, значит, $\text{Э}(S_1) = 0$.

Если бы ручка была не одна, а p штук, то, проведя подобные рассуждения для каждой из них, мы получили бы, что

$$\text{Э}(\Sigma_0) = \text{Э}(S_p) + 2p,$$

и поэтому верна общая формула

$$\text{Э}(S_p) = 2 - 2p,$$

приведенная в теореме.

Таким образом, присутствующее в формуле Эйлера (3) число p можно рассматривать как число ручек на сфере, которая гомеоморфна поверхности Σ. Но это же число характеризует и важное топологическое свойство замкнутых поверхностей, называемое родом поверхности. Для определения рода поверхности нам необходимо одно новое понятие. Пусть γ – замкнутая непрерывная кривая, лежащая на поверхности Σ. Мы говорим, что γ делит (или разбивает) поверхность Σ, если в Σ найдутся две такие точки, не принадлежащие γ, что любая непрерывная кривая, соединяющая эти точки и лежащая на Σ, обязательно пересечет γ. Если же для каждой пары точек на Σ, не лежащих на γ, найдется соединяющая их кривая, лежащая на Σ и не пересекающая γ, то мы говорим, что кривая γ не делит (не разбивает) поверхность Σ.

На сфере, например, любая замкнутая кривая разбивает поверхность сферы. На торе провести замкнутую кривую, не разбивающую тор, можно: достаточно взять в качестве γ поясок. Однако наши попытки провести на торе еще одну замкнутую кривую, не пересекающую γ, так, чтобы ни она, ни γ не делили поверхность тора, закончатся безрезультатно. Аналогична ситуация для сферы с ручкой, так как эта поверхность гомеоморфна тору. На сфере с двумя ручками можно провести две замкнутые, непересекающиеся кривые γ_1 и γ_2, не разбивающие поверхность (например, пояски на "ручках"). Но если мы проведем любую третью замкнутую кривую γ_3, не пересекающую γ_1 и γ_2, то одна из кривых γ_1, γ_2,

γ_3 обязательно будет разбивать поверхность сферы с двумя ручками. Таким образом, для каждой из рассмотренных поверхностей существует максимальное число замкнутых не пересекающихся друг с другом кривых, не разбивающих поверхность. Это число называется родом поверхности. Мы видели, что для сферы род равен нулю, для тора – единице, для сферы с двумя ручками – двойке. Рассуждая так же, как в рассмотренных примерах, можно убедиться, что для сферы с p ручками род равен p. Род поверхности, так же как и эйлерова характеристика, не меняется при гомеоморфных преобразованиях и, следовательно, является топологическим инвариантом. Это, конечно, следует и из равенства (3), поскольку эйлерова характеристика есть топологический инвариант. Однако мы могли бы убедиться в этом и непосредственно, так как свойство непрерывной замкнутой кривой, лежащей на поверхности Σ, разбивать или не разбивать эту поверхность сохраняется при гомеоморфизмах. Отметим, что, согласно сказанному, род многогранника с p дырками равен p.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА И ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В настоящем разделе мы с помощью теоремы Эйлера отвечаем на вопрос: какие правильные многогранники могут существовать? Напомним, что простой многогранник называется правильным, если все его грани суть конгруэнтные между собой правильные многоугольники и все телесные углы при вершинах равны между собой (по определению, телесный угол в вершине A многогранника – это площадь сферического сегмента, высекаемого в единичной сфере с центром в точке A плоскостями многоугольников, сходящихся в A). Из равенства телесных углов легко следует, что количество ребер правильного многогранника, пересекающихся в одной вершине, не зависит от выбора вершины и для данного многогранника Σ является постоянной величиной. Пусть она равна m и пусть гранями многогранника Σ являются правильные n-угольники. Выразим входящие в формулу Эйлера величины $B(\Sigma)$ и $\Gamma(\Sigma)$ через $P(\Sigma)$ и величины n и m. Так как каждое ребро соединяет ровно две вершины и к каждой вершине сходится m ребер, то, очевидно,

$$2P(\Sigma) = B(\Sigma)m, \qquad B(\Sigma) = \frac{2P(\Sigma)}{m}.$$

Далее поскольку каждое ребро многогранника содержится ровно в двух гранях и каждая грань имеет ровно m ребер, то

$$2P(\Sigma) = \Gamma(\Sigma)n, \qquad \Gamma(\Sigma) = \frac{2P(\Sigma)}{n}.$$

Подставляя выражения $B(\Sigma)$ и $\Gamma(\Sigma)$ через $P(\Sigma)$ в формулу Эйлера и деля обе части полученного равенства на $2P(\Sigma)$, получим

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{P(\Sigma)}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что величины m и n не могут быть одновременно больше трех. В то же время по смыслу этих величин ни одна из них не может быть меньше трех. Поэтому для нахождения целочисленных решений m и n уравнения (4) достаточно положить там $m = 3$ и найти все допустимые значения n, а потом учесть, что m и n входят в (4) симметрично, и, значит, наряду с решением $(m, n) = (3, l)$ решением будет и пара $(m, n) = (l, 3)$. Полагая $m = 3$, имеем

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{P(\Sigma)}. \tag{5}$$

Так как $P(\Sigma) > 0$, то $n \le 5$. Поэтому из уравнения (4) и равенства (5) получаем

$n = 3 \qquad \{P(\Sigma) = 6,\ \Gamma(\Sigma) = 4\},$

$n = 4 \qquad \{P(\Sigma) = 12,\ \Gamma(\Sigma) = 6\},$

$n = 5 \qquad \{P(\Sigma) = 30,\ \Gamma(\Sigma) = 12\}.$

Таким образом, если в каждой вершине многогранника пересекаются ровно три ребра ($m = 3$), то теорема Эйлера разрешает существование правильных многогранников с гранями из четырех треугольников ($n = 3$, тетраэдр), из шести квадратов ($n = 4$, куб) и из 12 пятиугольников ($n = 5$, додекаэдр).

Меняя местами m и n, получаем при $n = 3$

$m = 3 \qquad \{P(\Sigma) = 6,\ \Gamma(\Sigma) = 4\},$

$m = 4 \qquad \{P(\Sigma) = 12,\ \Gamma(\Sigma) = 8\},$

$m = 5 \qquad \{P(\Sigma) = 30,\ \Gamma(\Sigma) = 20\}.$

Случай $m = 3$ уже учтен (тетраэдр). При $m = 4$ получаем октаэдр с поверхностью из восьми правильных треугольников. Наконец, значение $m = 5$ соответствует икосаэдру: его поверхность образована двадцатью правильными треугольниками. Итак, из теоремы Эйлера вытекает невозможность существования иных правильных многогранников, кроме тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Однако существование этих правильных многогранников теоремой Эйлера не доказывается, оно следует из обычных стереометрических вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: ОГИЗ, 1947. 664 с.
2. *Болтянский В.Г., Ефремович В.А.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982. 149 с.
3. *Борисович Ю.Г. и др.* Введение в топологию. М.: Высш. шк., 1980. 296 с.
4. *Шашкин Ю.А.* Эйлерова характеристика. М.: Наука, 1984. 96 с.

* * *

Григорий Моисеевич Жислин, доктор физико-математических наук, профессор Нижегородского государственного университета, главный научный сотрудник Научно-исследовательского радиофизического института Минобразования РФ. Область научных интересов – спектральная теория многочастичных квантовых систем. Автор более 100 научных работ.