

SINGULAR POINTS  
OF THE VECTOR FIELDS  
IN THE PLANE

N. B. MEDVEDEVA

*The universal method of the study of qualitative behaviour of the trajectories of the vector field in the plane near the complicated singular point is described.*

**Описан универсальный метод исследования качественного поведения траекторий векторного поля на плоскости в окрестности как угодно сложной особой точки.**

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ВЕКТОРНЫХ  
ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

Н. Б. МЕДВЕДЕВА

Челябинский государственный университет

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Векторное поле на плоскости с координатами  $(x, y)$  задается парой функций  $v_1(x, y), v_2(x, y)$ . Это означает, что в точке плоскости с координатами  $(x, y)$  приложен вектор  $V(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ .

Траекторией векторного поля  $V$  называется кривая  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t$  – вещественный параметр, такая, что функции  $x(t)$  и  $y(t)$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_1(x, y), \\ \dot{y} &= v_2(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

Траектория векторного поля в каждой точке  $(x, y)$  касается вектора поля  $V(x, y)$ . Мгновенная скорость движения по траектории в точке  $(x, y)$  равна длине вектора  $V(x, y)$ .

О векторных полях, физическом смысле связанных с ними понятий, а также о качественных методах исследования см., например, [1].

А. Пуанкаре принадлежит тезис о том, что для качественного исследования некоторого дифференциального объекта удобно привести его к более простому виду с помощью подходящей замены переменных.

Замена переменных

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{2}$$

в векторном поле  $V$  (или, что то же самое, в системе (1)) производится в соответствии с правилами дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} &= v_1(x(u, v), y(u, v)), \\ \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} &= v_2(x(u, v), y(u, v)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = F_*^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

где

$$F_* = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

есть матрица Якоби замены переменных (2).

Рассмотрим задачу о построении локального фазового портрета векторного поля: требуется исследовать качественное поведение траекторий векторного поля вблизи фиксированной точки плоскости, причем нас будут интересовать только формы траекторий, но не скорость и не направление движения по ним.

Точка плоскости  $(x_0, y_0)$  называется особой точкой векторного поля  $V$  или положением равновесия, если  $V(x_0, y_0) = (0, 0)$ . В противном случае точка  $(x_0, y_0)$  называется неособой точкой векторного поля  $V$ . В некоторой окрестности неособой точки существует замена переменных, переводящая исходное векторное поле в векторное поле  $V_0 = (1, 0)$ . Траектории последнего векторного поля параллельны оси абсцисс. Поэтому и траектории исходного векторного поля вблизи неособой точки ведут себя подобно параллельным прямым. Поведение же траекторий в окрестности особой точки может быть весьма сложным.

**Пример: линейные системы.** Рассмотрим линейную систему на плоскости  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  с невырожденной матрицей  $A$ . Начало координат является единственной особой точкой такой системы. В силу невырожденности системы оба собственных значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы  $A$  отличны от нуля. Поведение траекторий линейных невырожденных систем на плоскости изучают в университетском курсе обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. Все возможные фазовые портреты в окрестности начала координат для такой системы изображены на рис. 1, а–г.

Рассмотрим гладкое векторное поле в окрестности особой точки на плоскости. Далее будем считать, что особая точка расположена в начале координат. Пусть  $A$  – матрица линейной части векторного поля в особой точке:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1(0, 0)}{\partial x} & \frac{\partial V_1(0, 0)}{\partial y} \\ \frac{\partial V_2(0, 0)}{\partial x} & \frac{\partial V_2(0, 0)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

где второе слагаемое стремится к нулю быстрее, чем вектор  $(x, y)$ . Это означает, что векторное поле вблизи особой точки “почти” линейно.

Особая точка векторного поля называется:

– элементарной, если по крайней мере одно из собственных значений матрицы линейной части векторного поля в этой особой точке отлично от нуля;

– невырожденной, если оба собственных значения отличны от нуля. Всякая невырожденная особая точка является элементарной. В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается, что в случае, когда вещественные части собственных значений невырожденной особой точки отличны от нуля, поведение траекторий в ее окрестности такое же, как у линейной части векторного поля, то есть возможны случаи, изображенные на рис. 1, а–в. В случае центра по линейным членам (то есть когда  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$  – чисто мнимые числа) ситуация не столь проста. При одной и той же линейной части возможны и центр и фокус. Алгоритм различения центра и фокуса в случае центра по линейным членам восходит к А. Пуанкаре и А. Ляпунову и является классическим. Мы не будем на нем останавливаться, поскольку основной целью нашего исследования являются более сложные особые точки, не поддающиеся исследованию классическими методами.

Список элементарных особых точек, не являющихся невырожденными, следующий:

- 1) вырожденный узел (пример:  $\dot{x} = x, \dot{y} = y^3$ );
- 2) вырожденное седло (пример:  $\dot{x} = x, \dot{y} = -y^3$ );
- 3) седло-узел (пример:  $\dot{x} = x^2, \dot{y} = y$ ).

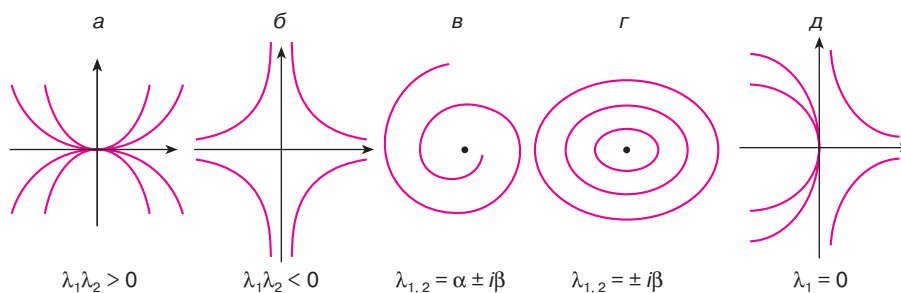


Рис. 1. Элементарные особые точки: а – узел, б – седло, в – фокус, г – центр, д – седло-узел

Поведение траекторий в первых двух случаях качественно такое же, как в случае невырожденного узла и седла. Седло-узел изображен на рис. 1, *д*.

Элементарные особые точки являются как бы кирпичиками, на которые может быть “рассыпана” как угодно сложная особая точка. Точный смысл этого высказывания станет ясен ниже.

## РАЗДУТИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

Для того чтобы исследовать окрестность неэлементарной особой точки, применяют так называемый метод раздутия особенностей. Существуют различные варианты этого метода. Суть его состоит в следующем. Особая точка заменяется некоторой кривой типа окружности с углами. Окрестность особой точки превращается в полукрестность этой кривой с помощью одной или нескольких замен переменных специального вида. Векторные поля, полученные после замен переменных и определенные в различных кусках полукрестности “ломаной окружности”, имеют только элементарные особые точки. В окрестности каждой такой особой точки можно нарисовать фазовый портрет. Затем спроектировать эти картинки в окрестность исходной особой точки и получить фазовый портрет в ней (рис. 2).

Наиболее распространенными вариантами метода раздутия особенностей являются:

- 1) переход к полярным координатам (Ф. Дюмортье);
- 2)  $\sigma$ -процесс [2];
- 3) метод диаграмм Ньютона [3, 4].

Первый вариант использует трансцендентные функции. Во второй картинке после раздутия расположены на двумерных неориентируемых многообразиях в трехмерном пространстве. Третий метод хорош тем, что использует степенные замены переменных, а после раздутия получают плоские картинки, к тому же он является более быстрым, чем первые два.

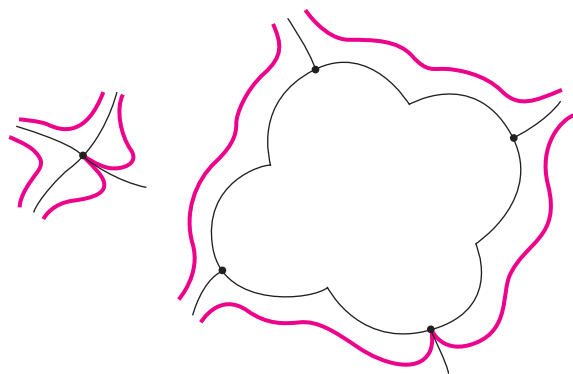


Рис. 2. Раздутие особенностей

Поясним метод диаграмм Ньютона на простом примере.

## ДИАГРАММА НЬЮТОНА

Рассмотрим систему уравнений, зависящую от нескольких параметров:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax^2y + cxy^2 + gy^3, \\ \dot{y} &= bxy^2 + dy^3 + hx^5. \end{aligned} \quad (3)$$

Умножим первое уравнение системы на  $y$ , а второе – на  $x$ :

$$\begin{aligned} y\dot{x} &= ax^2y^2 + cxy^3 + gy^4, \\ x\dot{y} &= bx^2y^2 + dxy^3 + hx^6. \end{aligned}$$

На плоскости переменных  $(i, j)$  отметим показатели всех мономов  $x^i y^j$  правой части:  $(2, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(6, 0)$  (рис. 3, *а*). Полученное множество, состоящее из четырех точек, называется носителем системы (3). Каждой точке носителя системы соответствует набор коэффициентов мономов правой части, который называется векторным коэффициентом. Например, точке  $(2, 2)$  соответствует векторный коэффициент  $(a, b)$ . Ломаная, которая является огибающей полученного множества, называется многоугольником Ньютона системы (3), а та ее часть, которая “смотрит” на начало координат (в нашем случае состоящая из двух ребер), называется диаграммой Ньютона системы (3) (рис. 3, *а*).

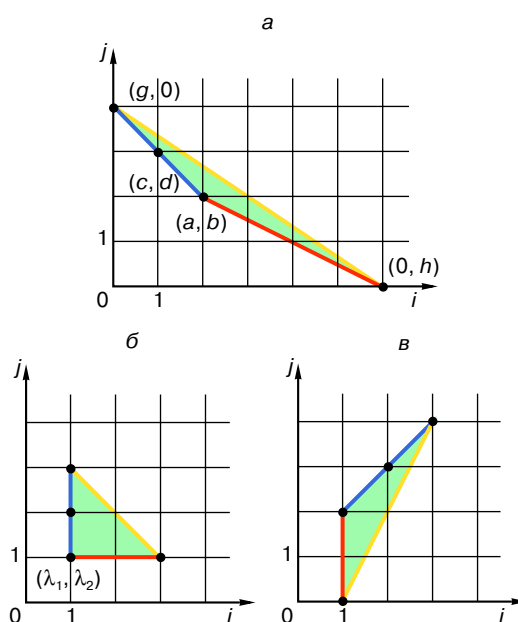
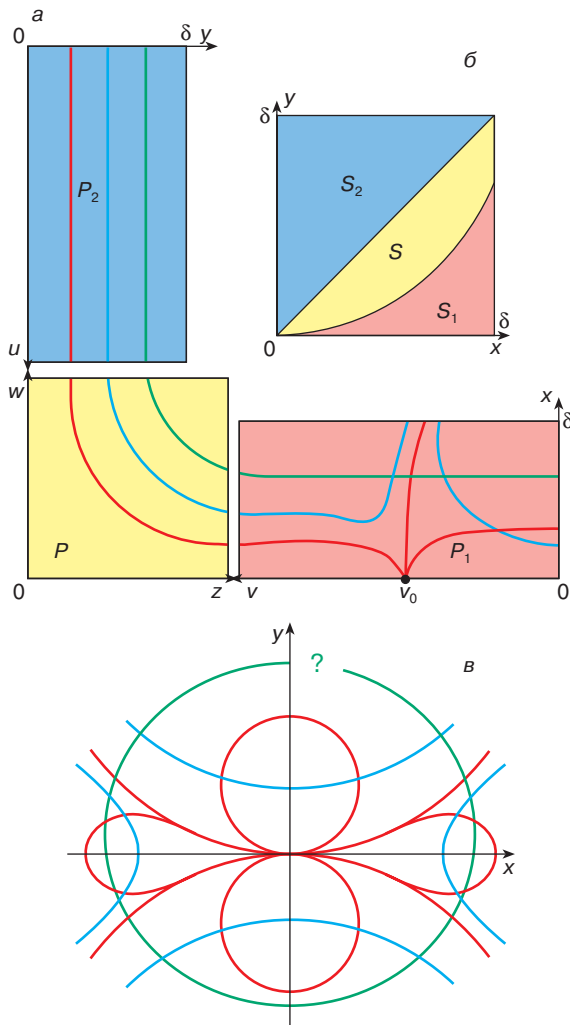


Рис. 3. *а* – носитель и диаграмма Ньютона векторного поля; *б* – диаграмма Ньютона векторного поля с элементарной особой точкой, состоящая из одной вершины; *в* – после степенной замены переменных нижнее ребро становится вертикальным



**Рис. 4.** а – прямоугольники – образы секторов после раздутия; траектории отмечены красным цветом для случая  $a(b - 2a) > 0$ , синим – для случая  $a(b - 2a) < 0$ , зеленым – для монодромного случая; б – секторы, соответствующие вершине и ребрам диаграммы Ньютона; в – фазовый портрет в окрестности особой точки

Диаграмма Ньютона отражает сложность особой точки. Чем “меньше” диаграмма Ньютона, тем “проще” особая точка. Например, компоненты векторного поля, диаграмма Ньютона которого состоит из одной точки и изображена на рис. 3, б, имеют вид

$$V_1(x, y) = x(\lambda_1 + f_1(x, y)), \quad V_2(x, y) = y(\lambda_2 + f_2(x, y)),$$

где  $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$ . Поэтому  $(\lambda_1, \lambda_2)$  – набор собственных значений линейной части этого поля. Так как  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ , то особая точка элементарная.

Как же “уменьшить” диаграмму Ньютона? Попробуем это сделать с помощью степенных замен переменных.

## СТЕПЕННЫЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Замены переменных вида

$$x = z^{c_{11}} w^{c_{12}}, \quad y = z^{c_{21}} w^{c_{22}} \quad (4)$$

замечательны тем, что при таких заменах показатели степеней мономов в правой части системы преобразуются линейным образом и, значит, диаграмма Ньютона претерпевает линейные преобразования. Поэтому мы можем подобрать линейное преобразование так, чтобы новая особая точка имела “меньшую” диаграмму Ньютона, а значит, стала бы проще исходной.

**Предложение 1.** Если  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  – матрица показателей замены (4), то в результате замены (4) точка носителя  $(i, j)$  переходит в точку носителя новой системы с координатами  $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$ , где  $C^T$  – транспонированная матрица, а  $(I, J)$  – целочисленный вектор. Векторные коэффициенты точек носителя претерпевают линейное преобразование с матрицей  $C^{-1}$ .

**Пример.** Степенные замены переменных применяются для интегрирования уравнений специального вида. Например, в однородной системе переменные разделяются с помощью замены  $y = vx$ . Система называется квазиоднородной с весами  $n$  и  $m$  переменных  $x$  и  $y$ , если ее носитель лежит на прямой  $ni + mj = d$ ,  $d > 0$ . Если  $m = n = 1$ , то квазиоднородная система является однородной. Замена переменных

$$x = z^n, \quad y = z^m w \quad (5)$$

превращает квазиоднородную систему в систему, носитель которой – вертикальный отрезок. Такой системе соответствует уравнение с разделяющимися переменными.

Проверим утверждение предложения 1 для случая замены  $y = xv$ , которой соответствует матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Действительно, рассмотрим моно-$$

миальную систему  $\dot{x} = ax^i y^{j-1}, \quad \dot{y} = bx^{i-1} y^j$  и сделаем в ней замену  $y = xv$ . После замены получаем

$$C \begin{pmatrix} v\dot{x} \\ x\dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x^{i+j-1} v^j.$$

Применяя к обеим частям преобразование  $C^{-1}$ , получаем

$$\begin{pmatrix} v\dot{x} \\ x\dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x^k v^l,$$

где

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

**ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ВЕРШИНЕ ДИАГРАММЫ НЬЮТОНА**

Рассмотрим вершину диаграммы Ньютона системы (3), имеющую координаты (2, 2). С помощью линейного преобразования и сдвига поместим ее в точку (1, 1) так, чтобы примыкающие к ней два ребра превратились в вертикальный и горизонтальный отрезки (см. рис. 3, б). Например, линейное преобразование с матрицей  $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  подходит для этой цели. Соответствующая замена переменных  $x = zw, y = zw^2$ , имеющая матрицу показателей  $C = C^T$ , превращает систему (3) в систему, имеющую в начале координат  $(z, w) = (0, 0)$  элементарную особую точку. Соответствующие собственные значения можно сосчитать пользуясь предложением 1:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ b - a \end{pmatrix}.$$

Предположим, что  $\lambda_1 \lambda_2 = (2a - b)(b - a) \neq 0$ , то есть особая точка  $(z, w) = (0, 0)$  не вырождена. В зависимости от знака произведения  $\lambda_1 \lambda_2$  эта особая точка будет либо седлом, либо узлом (см. рис. 1).

На каком же множестве допустимо использовать степенную замену с матрицей показателей  $C$  для того, чтобы сделать исходную особую точку элементарной?

Степенные замены переменных с невырожденной матрицей показателей определены и обратимы, вообще говоря, только во внутренности первого квадранта. Полученное после замены векторное поле может иметь на положительных координатных полуосях  $z$  и  $w$  некоторое количество особых точек помимо точки  $(z, w) = (0, 0)$ , про которые мы ничего не знаем.

Вырежем квадрат  $P = \{0 \leq z \leq \varepsilon, 0 \leq w \leq \varepsilon\}$ , не содержащий других особых точек, кроме начала координат. Поскольку  $z = x^2/y, w = y/x$ , то в координатах  $(z, y)$  это множество представляет собой сектор

$$S = \left\{ \frac{1}{\varepsilon} x^2 \leq y \leq \varepsilon x \right\} \quad (\text{см. рис. 4}).$$

Таким образом, замена переменных  $x = zw, y = zw^2$ , рассматриваемая в секторе  $S$ , соответствующем вершине диаграммы Ньютона, превращает исходное векторное поле в векторное поле с единственной элементарной особой точкой.

Как же исследовать исходное векторное поле в секторах  $S_1$  и  $S_2$ , которые являются дополнением сектора  $S$  до первого квадранта?

Поставим сектор  $S_1$  в соответствие нижнему ребру диаграммы Ньютона и сделаем в нем замену переменных

$$y = x^2 v \quad (6)$$

с матрицей  $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Тогда в результате пре-

образования  $C_1^T$  нижнее ребро становится вертикальным (см. рис. 3, в). Пересечение сектора  $S_1$  с некоторой окрестностью нуля превратится в прямоугольник  $P_1 = \left\{ (x, v): 0 \leq x \leq \delta, 0 \leq v \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}$ , где

$\delta$  – некоторое положительное число. В правой части системы, полученной из системы (3) после замены (6), выделим члены, соответствующие вертикальному отрезку – образу нижнего ребра (см. рис. 3, в). Тогда эта система запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xX_1(v) + \dots, \\ \dot{v} &= vF_1(v) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

При замене переменных (6) векторные коэффициенты точек носителя преобразуются с помощью

матрицы  $C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  следующим образом:

$$C_1^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b - 2a \end{pmatrix}, \quad C_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

Отсюда  $X_1(v) = av, F_1(v) = (b - 2a)v^2 + h$ . Координаты особых точек векторного поля (7) на границе  $z = 0, 0 \leq v \leq \frac{1}{\varepsilon}$  прямоугольника  $P_1$  определяются из уравнения  $F_1(v) = 0$ . Предположим, что  $(b - 2a)h < 0$ . Тогда последнее уравнение имеет един-

ственный положительный корень  $v_0 = \sqrt{\frac{h}{2a - b}}$ . Матрица Якоби правой части (7) в точке  $(x, v) = (0, v_0)$

имеет вид  $\begin{pmatrix} X(v_0) & 0 \\ * & F'(v_0) \end{pmatrix}$ . Ее собственные значения равны  $\mu_1 = av_0$  и  $\mu_2 = 2(b - 2a)v_0$ . Поэтому если

$a(b - 2a) > 0$ , то рассматриваемая особая точка – узел, а если  $a(b - 2a) < 0$ , то седло.

Аналогично исследуется сектор  $S_2$ , в нем делается замена  $x = uv$ . В результате верхнее ребро диаграммы Ньютона становится горизонтальным, сектор  $S_2$  превращается в прямоугольник

$$P_2 = \left\{ (u, y): 0 \leq u \leq \frac{1}{\varepsilon}, 0 \leq y \leq \delta \right\},$$

а система, полученная после замены переменных, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y(d + bu) + y^2(\dots), \\ \dot{u} &= g + (1 - d)u + (a - b)u^2 + y(\dots). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть  $D = (c - d)^2 - 4g(a - b) < 0$ , тогда система (8) не имеет в прямоугольнике  $P_2$  особых точек.

Делая в прямоугольниках, соответствующих ребрам и вершинам диаграммы Ньютона, обратные замены переменных, получим фазовый портрет в



первом квадранте окрестности исходной особой точки. Для того чтобы построить фазовый портрет в любом другом квадранте, отражаем определенное в нем векторное поле  $V$  в первый квадрант и проделываем ту же процедуру. Нетрудно проверить, что в нашем примере для всех отраженных векторных полей получается та же картинка, что и для самого векторного поля  $V$  (см. рис. 4, в).

### МОНОДРОМНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Предположим теперь, что в нашем примере  $(b - 2a)h > 0$  и  $\lambda_1\lambda_2 < 0$ . Это означает, что особая точка в прямоугольнике  $P$  является седлом, а в прямоугольнике  $P_1$  нет особых точек. В этом случае траектории ведут себя так, как показано на рис. 4 зеленым цветом: они входят в каждый сектор через одну границу, а выходят через другую. Следовательно, если мы рассмотрим все траектории, начинающиеся, скажем, в точках оси  $OY$  вблизи нуля, то каждая из этих траекторий, сделав полный обход вокруг особой точки, возвращается опять на ось  $OY$ . Особые точки, в окрестности которых траектории ведут себя подобным образом, получили название монодромных особых точек. Описанный выше метод не позволяет судить о том, как поведет себя траектория в момент возвращения на ось  $OY$ : вернется ли она в ту же точку, из которой вышла, или в какую-нибудь другую.

В настоящее время доказано (Ю.С. Ильяшенко), что монодромная особая точка полиномиального векторного поля на плоскости может быть либо центром (все траектории замкнутые), либо фокусом (все траектории – спирали). Описанная выше схема не дает ответа на вопрос: является ли особая точка центром или фокусом?

Алгоритм, который позволил получить достаточные условия фокуса в случае монодромной особой точки с диаграммой Ньютона, содержащей более одного ребра, был впервые предложен Ю.С. Ильяшенко на основе методов, изложенных в мемуаре А. Дюлака “О предельных циклах”. В настоящее время реализован лишь первый шаг этого алгоритма. Он состоит в следующем.

Рассмотрим гладкую кривую с началом в особой точке (трансверсаль),  $\rho$  – параметр на этой кривой. Преобразование  $\Delta$ , переводящее точку  $\rho$  трансверсали в точку  $\Delta(\rho)$  первого возвращения на трансверсаль траектории с началом в точке  $\rho$ , называется преобразованием монодромии монодромной особой точки. Доказано, что при подходящем выборе трансверсали преобразование монодромии имеет при  $x \rightarrow 0$  асимптотику  $\Delta: x \rightarrow cx + o(x)$ . Если особая точка – центр, то  $\Delta(\rho) \equiv \rho$ . Поэтому если  $c \neq 1$  или, что то же самое,  $\ln c \neq 0$ , то особая точка является фокусом.

Для того чтобы получить формулу для  $\ln c$ , применяют метод А. Дюлака, который в случае раздутья по диаграмме Ньютона состоит в следующем.

Преобразование монодромии разбивается в композицию отображений соответствия в прямоугольниках, соответствующих ребрам и вершинам диаграммы Ньютона. Отображение соответствия отображает одну сторону прямоугольника в другую вдоль траекторий определенного в нем векторного поля. На рис. 5 изображены прямоугольники, полученные после раздутья для всех четырех квадрантов. Стрелочками показаны отображения соответствия в них:  $f_1$  и  $f_2$  – отображения соответствия для прямоугольников  $P_1$  и  $P_2$ ;  $\delta$  – отображение соответствия для прямоугольника  $P$ . Отображения соответствия для отраженных векторных полей обозначены теми же буквами с соответствующими верхними индексами. Преобразование монодромии  $\Delta$  представляет собой следующую суперпозицию:

$$\Delta = f_2 \circ \delta \circ f_1 \circ f_1^x \circ \delta^x \circ f_2^x \circ f_2^{xy} \circ \delta^{xy} \circ f_1^{xy} \circ f_1^y \circ \delta^y \circ f_2^y. \quad (9)$$

Главный член отображения соответствия  $\delta$  в прямоугольнике  $P$  совпадает с отображением соответствия  $\delta_1$  для линейной системы

$$\dot{z} = \lambda_1 z, \quad \dot{w} = \lambda_2 w. \quad (10)$$

Вычислим это последнее отображение. Время, за которое фазовая кривая системы (10) переходит из точки  $(\epsilon, w)$  в точку  $(z, \epsilon)$ , где  $z = \delta_1(w)$ , составляет

$$\frac{1}{\lambda_1} \int_{\epsilon}^z \frac{dz}{z} = t = \frac{1}{\lambda_2} \int_w^{\epsilon} \frac{dw}{w}.$$

Интегрируя, получим, что

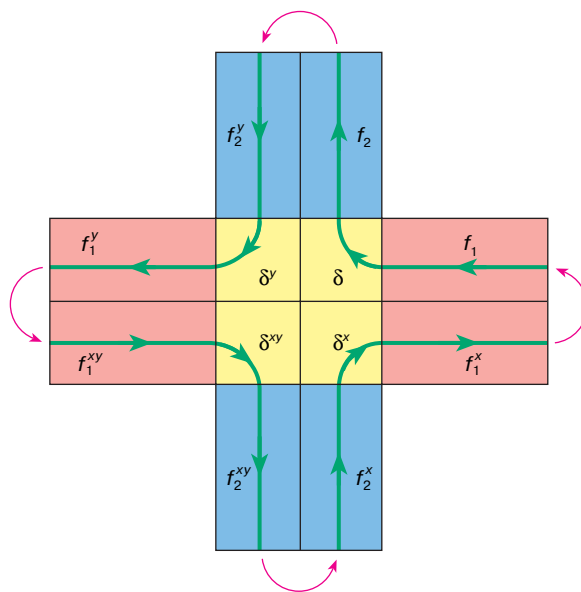


Рис. 5. Суперпозиция отображений соответствия

$$z = \varepsilon^* w^{\frac{1}{\lambda}}, \quad (11)$$

где  $\varepsilon^*$  – некоторая степень  $\varepsilon$ ,

$$\lambda = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{b-a}{b-2a} > 0.$$

Главный член отображения соответствия  $f_1$  в прямоугольнике  $P_1$  для системы (7) такой же, как у укороченной системы, которая получается из системы (7) отбрасыванием слагаемых с многоточием. Интегрируя уравнение

$$\frac{dx}{dv} = \frac{X_1(v)}{F_1(v)} x,$$

соответствующее укороченной системе, получаем, что главный член отображения  $f_1(x)$  равен  $x \rightarrow c_1 x$ , где

$$\ln c_1 = \int_0^{1/\varepsilon} \frac{av dv}{(b-2a)v^2 + h}.$$

Делая аналогичные вычисления для отраженных векторных полей, получаем, что главный член отображения  $\delta^{xy}$  равен (10), а главные члены отображений  $\delta^x$  и  $\delta^y$  являются обратными к отображению (11). Далее главные члены отображений  $f_1^x$ ,  $f_1^y$  и  $f_1^{xy}$  линейны с коэффициентами  $c_1^x$ ,  $c_1^y$  и  $c_1^{xy}$ , причем

$$v_1 = \ln(c_1^x c_1^y c_1^{xy}) = 2 \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{av dv}{(b-2a)v^2 + h}. \quad (12)$$

Аналогично для второго ребра

$$v_2 = \ln(c_2^x c_2^y c_2^{xy}) = 2 \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{(d+bu)du}{g+(c-d)u+(a-b)u^2}.$$

Вычисляя главный член суперпозиции (9), получаем, что он линеен за счет сокращения взаимно-обратных степеней, а логарифм его коэффициента

$$\ln c = v_2 + \lambda v_1. \quad (13)$$

Учитывая, что коэффициент  $c$  на самом деле не зависит от  $\varepsilon$ , перейдем в (13) к пределу по  $\varepsilon$  при

$\varepsilon \rightarrow 0$  и в силу нечетности подынтегральной функции в (12) получим, что

$$\begin{aligned} \ln c &= 2 \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d+bu)du}{g+(c-d)u+(a-b)u^2} = \\ &= \frac{4\pi}{(a-b)\sqrt{-D}} \left( d - \frac{b(c-d)}{2(a-b)} \right). \end{aligned}$$

Итак, если в нашем примере при всех наложенных ранее условиях  $2d(a-b) - b(c-d) \neq 0$ , то особая точка системы (3) является фокусом.

Метод Дюлака и теория нормальных форм позволяют вычислить следующие члены асимптотики преобразования монодромии, а значит, получить достаточные условия фокуса и в случае, если  $\ln c = 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкин А.Д. Вращение плоского векторного поля // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 11. С. 107–113.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 272 с.
3. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 256 с.
4. Березовская Ф.С., Медведева Н.Б. Асимптотика преобразования монодромии особой точки с фиксированной диаграммой Ньютона // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1991. Вып. 15. С. 156–177.
5. Вишик М.И. Поля направлений и соответствующие им траектории // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 2. С. 111–117.
6. Бельх В.Н. Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Там же. 1997. № 1. С. 115–121.

\* \* \*

Наталья Борисовна Медведева, кандидат физико-математических наук, доцент Челябинского государственного университета. Область научных интересов – обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. Автор 17 научных статей.