QUARTERNIONS

A. O. VATULYAN

The essence of one of the models of algebraic systems that generalize the concept of a real number (quarternion) is considered. Basic operations with quarternions and their connection with vectors and complex numbers are discussed.

Излагается суть одной из алгебраических систем, обобщающих понятие действительного числа, – кватернионов. Обсуждаются основные операции над кватернионами, прослежена связь с векторами и комплексными числами.

КВАТЕРНИОНЫ

А. О. ВАТУЛЬЯН

Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону

ВВЕДЕНИЕ

В фундаменте математики лежит понятие числа, которое позволяет описывать количественную сторону отношения изучаемого объекта к некоторому эталону. В процессе развития и совершенствования моделей, описывающих окружающий нас мир, и усложнения математических конструкций появляются новые объекты, обладающие совершенно новыми свойствами по сравнению с действительными числами.

Первое обобщение понятия действительного числа – введение комплексных чисел. Эти числа являются удобным математическим средством, позволяющим описывать количественные соотношения, решать многие математические проблемы [1]. Так, например, квадратное уравнение $x^2 + 1 = 0$ является неразрешимым во множестве действительных чисел, однако имеет два решения во множестве комплексных чисел $x_{1,\,2} = \pm i$.

Вообще говоря, под комплексными числами будем понимать множество упорядоченных пар действительных чисел (a, b) вида $a + ib$, где операции сложения и умножения осуществляются по правилам

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Эти операции подчиняются обычным распределительным законам, известным из школьного курса алгебры, с заменой $i^2 = -1$.

Можно дать векторную интерпретацию комплексных чисел. Комплексному числу $a + ib$ можно поставить в соответствие вектор с координатами (a, b), выходящий из начала координат (рис. 1). При такой интерпретации сложению и вычитанию комплексных чисел соответствуют сложение и вычитание векторов на плоскости.

На множестве комплексных чисел можно ввести два основных элемента или, как говорят в математике, базис 1 и i. Это означает, что любое комплексное число можно представить в виде $a \cdot 1 + b \cdot i$; комплексные числа можно трактовать как упорядоченные пары действительных чисел (a, b).

Второе обобщение действительного числа – векторы в трехмерном пространстве, которые образуют линейное пространство [2]. Для них вводятся операции сложения и умножения на действительное число, две операции умножения – скалярное и векторное (см. ниже), а в качестве базиса взяты

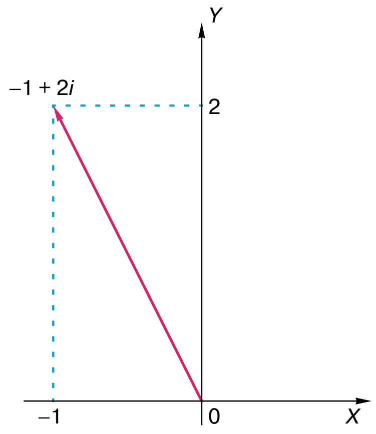

Рис. 1. Изображение комплексного числа

единичные орты **i**, **j**, **k**. Всякий вектор в трехмерном пространстве может быть представлен в виде

$$\mathbf{v} = a\cdot\mathbf{i} + b\cdot\mathbf{j} + c\cdot\mathbf{k};$$

сам вектор может быть интерпретирован как упорядоченная тройка действительных чисел (a, b, c).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ

Попытки обобщить понятие комплексного числа привели к первому примеру гиперкомплексной системы – кватернионам [3, 4]. Создание таких объектов принадлежит ирландскому математику У. Гамильтону, который задался проблемой построить из точек пространства числовую систему, подобную множеству действительных чисел. Оказалось, что такую структуру построить нельзя, однако если отказаться от коммутативности умножения, то из точек четырехмерного пространства можно построить некоторую числовую систему, которая и называется кватернионами.

Итак, кватернион представляет собой упорядоченную четверку действительных чисел s, a, b, c, которые связаны с четырьмя базисными элементами 1, **i**, **j**, **k**, обладающими следующими свойствами:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,$$
$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \qquad (1)$$
$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

Заметим, что базисные элементы **i**, **j**, **k** могут быть интерпретированы как базисные векторы декартовой системы координат в трехмерном пространстве. Таким образом, всякий кватернион **Q** может быть записан в виде

$$\mathbf{Q} = s\cdot 1 + a\cdot\mathbf{i} + b\cdot\mathbf{j} + c\cdot\mathbf{k}.$$

Обычно кватернион **Q** разделяют на скалярную часть s и векторную $\mathbf{v} = a\cdot\mathbf{i} + b\cdot\mathbf{j} + c\cdot\mathbf{k}$, так что $\mathbf{Q} = s + \mathbf{v}$.

Четверка чисел (s, a, b, c) характеризует компоненты кватернионов.

Нетрудно видеть, что если $s = 0$, то кватернион переходит в вектор **v** в трехмерном пространстве. Важная особенность кватернионов состоит в том, что подмножеством кватернионов являются вещественные числа $(s, 0, 0, 0)$; комплексные числа $(s, a, 0, 0)$; векторы в трехмерном пространстве $(0, a, b, c)$ (рис. 2).

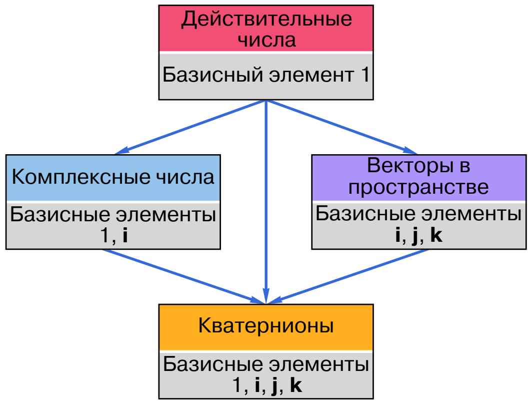

Рис. 2. Числовые системы и базисные элементы

АЛГЕБРА КВАТЕРНИОНОВ

Определим операции над двумя кватернионами $Q_1 = s_1 + \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{Q}_2 = s_2 + \mathbf{v}_2$.

1. Сложение

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = (s_1 + s_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

Сложение двух кватернионов осуществляется путем сложения всех его компонент.

2. Умножение

Вычисление произведения двух кватернионов производится при помощи обычных распределительных законов с учетом соотношений (1) и дает следующую формулу:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 &= s_1s_2 + s_2\mathbf{v}_1 + s_1\mathbf{v}_2 + a_1\mathbf{i}(a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) + \\ &+ b_1\mathbf{j}(a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) + c_1\mathbf{k}(a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) = \\ &= s_1s_2 + s_2\mathbf{v}_1 + s_1\mathbf{v}_2 - a_1a_2 + a_1b_2\mathbf{k} - a_1c_2\mathbf{j} - b_1a_2\mathbf{k} - \\ &- b_1b_2 + b_1c_2\mathbf{i} + c_1a_2\mathbf{j} - c_1b_2\mathbf{i} - c_1c_2 = \\ &= s_1s_2 + s_2\mathbf{v}_1 + s_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2, \qquad (2)\end{aligned}$$

где введены операции скалярного и векторного произведений векторов

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, \qquad (3)$$

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2 = (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}. \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что произведение двух кватернионов есть опять кватернион. Важной особенностью введенной операции умножения (2) является ее некоммутативность, то есть, вообще говоря, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \neq \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$. Для случая $s_1 = s_2 = 0$, то есть когда имеем произведение двух векторов, записанное в форме кватернионов, их произведение уже не есть вектор, а кватернион

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \tag{5}$$

причем скалярная часть кватерниона $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ есть взятое с обратным знаком скалярное произведение векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, а векторная часть кватерниона $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ равна векторному произведению векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Введенная операция умножения векторов как кватернионов (5) объединяет хорошо известные виды умножения векторов – скалярное и векторное (3) и (4). Исходя из формулы (5), найдем $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ и $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$, при этом учтем, что $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ (это легко проверяется исходя из формулы (4)):

$$\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1 = \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2. \tag{6}$$

Исходя из (5) и (6) найдем выражение для скалярного и векторного произведений векторов через введенную нами операцию:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= -\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1), \\ \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1). \end{aligned} \tag{7}$$

3. Сопряжение

Кватернион $\overline{\mathbf{Q}}$ называется сопряженным по отношению к $\mathbf{Q} = s + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, если $\overline{\mathbf{Q}} = s - (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$. В этом случае произведение $\mathbf{Q}\overline{\mathbf{Q}}$ есть число, равное квадрату модуля кватерниона $\mathbf{Q}$: $|\mathbf{Q}|^2 = s^2 + a^2 + b^2 + c^2$.

Нетрудно видеть, что квадрат модуля кватерниона равен сумме квадратов его компонент. Это свойство аналогично такому же свойству для векторов, однако существенное отличие от векторов подчеркивает следующее свойство.

4. Обращение

Для каждого ненулевого кватерниона существует ему обратный. Обратным по отношению к кватерниону $\mathbf{Q}$ называется кватернион $\mathbf{Q}^{-1}$, обладающий свойством

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q} = 1.$$

Очевидно, что обратный находится по следующему правилу, весьма похожему на правило нахождения обратного к комплексному числу:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{Q}}}{|\mathbf{Q}|^2}.$$

ТОЖДЕСТВО ЭЙЛЕРА

Имеет место следующее

Утверждение. *Модуль произведения двух кватернионов равен произведению модулей сомножителей.*

Докажем это утверждение. Пусть $\mathbf{Q}_1 = s_1 + \mathbf{v}_1$, $\mathbf{Q}_2 = s_2 + \mathbf{v}_2$ – два кватерниона, s_1, s_2 – вещественные числа, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ – векторы. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 &= (s_1 + \mathbf{v}_1)(s_2 + \mathbf{v}_2) = s_1s_2 + s_1\mathbf{v}_2 + s_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \\ &= s_1s_2 + s_1\mathbf{v}_2 + s_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{Q}}_2\overline{\mathbf{Q}}_1 &= (s_2 - \mathbf{v}_2)(s_1 - \mathbf{v}_1) = s_1s_2 - s_1\mathbf{v}_2 - s_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 = \\ &= s_1s_2 - s_1\mathbf{v}_2 - s_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2}. \end{aligned}$$

Теперь

$$|\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2|^2 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdot \overline{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdot \overline{\mathbf{Q}}_2\overline{\mathbf{Q}}_1 = |\mathbf{Q}_1|^2|\mathbf{Q}_2|^2,$$

откуда и следует утверждение теоремы. Из этого результата, если положить

$$\mathbf{Q}_1 = s_1 - a_1\mathbf{i} - b_1\mathbf{j} - c_1\mathbf{k},$$

$$\mathbf{Q}_2 = s_2 - a_2\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - c_2\mathbf{k},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 &= s_1s_2 + a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + \\ &+ (s_1a_2 - a_1s_2 - b_1c_2 + c_1b_2)\mathbf{i} + (s_1b_2 + a_1c_2 - b_1s_2 - c_1a_2)\mathbf{j} + \\ &+ (s_1c_2 - a_1b_2 + b_1a_2 - c_1s_2)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

вытекает следующее тождество:

$$\begin{aligned} &(s_1^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(s_2^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = \\ &= (s_1s_2 + a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 + (s_1a_2 - a_1s_2 - b_1c_2 + c_1b_2)^2 + \\ &+ (s_1b_2 + a_1c_2 - b_1s_2 - c_1a_2)^2 + (s_1c_2 - a_1b_2 + b_1a_2 - c_1s_2)^2. \end{aligned}$$

Это тождество позволяет выразить произведение двух сумм четырех квадратов в форме суммы четырех квадратов.

ПРИЛОЖЕНИЯ КВАТЕРНИОНОВ

Наиболее естественным способом, позволяющим описывать повороты в трехмерном пространстве, является использование операторов преобразования и соответствующих им матриц [1]. Однако использование кватернионов позволяет дать более простую форму этого поворота. Представление трехмерных вращений при помощи кватернионов удобно тем, что кватернион определяет непосредственно его геометрические характеристики: ось вращения и угол поворота. При обычном описании вращения при помощи матриц для определения оси вращения и угла поворота необходимо проделать некоторые вычисления, а при использовании кватернионов он находится естественным образом.

Обозначим: $R(\mathbf{v}, \varphi)$ – поворот вокруг оси, сонаправленной с единичным вектором $\mathbf{v}$, на угол φ.

Нетрудно показать, что поворот $R(\mathbf{v}, \varphi)$ можно представить кватернионом

$$R(\mathbf{v}, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{v}\sin\frac{\varphi}{2}$$

с модулем, равным 1.

В качестве примера рассмотрим последовательное применение двух поворотов: 1) поворот на 90° вокруг вектора $\mathbf{k}$, 2) поворот на 90° вокруг вектора $\mathbf{j}$. Это преобразование можно представить в виде произведения двух кватернионов $\mathbf{Q}_1 = \cos45° + \mathbf{j}\sin45°$ и $\mathbf{Q}_2 = \cos45° + \mathbf{k}\sin45°$:

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = (\cos45° + \mathbf{j}\sin45°)(\cos45° + \mathbf{k}\sin45°) =$$

$$= \frac{1}{2} + \mathbf{j}\cdot\frac{1}{2} + \mathbf{k}\cdot\frac{1}{2} + \mathbf{i}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \cos60° + \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}\sin60° = R\left[\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}, 120°\right].$$

В результате этих двух поворотов получим поворот на 120° вокруг оси, равнонаклоненной к ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, причем нетрудно убедиться, что перемена порядка вращений $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ приведет к иному кватерниону.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим все более интенсивное использование алгебры кватернионов в описании движения манипуляторов, робототехнике [5], электродинамике, при описании поворотов в четырехмерном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 302 с.
2. *Ильин В.А.* Базисы в евклидовых пространствах и ряды Фурье // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 4. С. 95–101.
3. *Фадеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.
4. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
5. *Фу К.*, *Гонсалес Р.*, *Ли К.* Робототехника. М.: Мир, 1989. 622 с.

* * *

Александр Ованесович Ватульян, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости Ростовского государственного университета, профессор кафедры высшей математики Донского государственного технического университета. Область научных интересов – математические вопросы распространения волн в анизотропных средах, обратные граничные и геометрические задачи механики, интегральные уравнения, численные методы. Автор более 100 публикаций.