GRASSMANN ALGEBRA

A. N. VASIL'EV

Basic information about the functions of anticommuting variables and the rules concerning them are discussed.

В статье излагаются основные сведения о функциях антикоммутирующих переменных и правилах работы с ними.

ГРАССМАНОВА АЛГЕБРА

А. Н. ВАСИЛЬЕВ

Санкт-Петербургский государственный университет

1. ВВЕДЕНИЕ

Каждому школьнику хорошо знакомо понятие функции $f(x)$ нескольких числовых переменных $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Будучи обычными числами, эти переменные коммутируют, то есть удовлетворяют коммутационному соотношению $x_i x_k = x_k x_i \;\forall i, k$.

Допустим теперь, что величины $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ не обычные числа, а некоторые абстрактные объекты (конкретная их природа для дальнейшего значения не имеет), удовлетворяющие “антикоммутационным соотношениям”

$$x_i x_k = -x_k x_i \;\forall i, k. \tag{1}$$

Величины с такими свойствами называют грассмановыми переменными или образующими грассмановой алгебры, а сама грассманова алгебра есть множество всех функций $f(x)$ от таких антикоммутирующих переменных.

Оказывается, что пространство таких функций $f(x)$ с антикоммутирующими аргументами x в некоторых отношениях даже проще, чем пространство обычных функций числовых аргументов, и что на таких функциях, как и на обычных, можно определить аналоги стандартных операций математического анализа: дифференцирование и интегрирование. Соответствующие правила действий достаточно просты и доступны любому старшекласснику, знакомому с понятиями дифференцирования и интегрирования для обычных функций нескольких переменных. Этот материал, способствующий расширению кругозора и развитию навыков абстрактного мышления, может быть использован на факультативных занятиях по математике для старшеклассников.

2. ЗАЧЕМ НУЖНЫ ФУНКЦИИ АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Прежде чем переходить к подробному описанию грассмановой алгебры и операций на ней, поясним, зачем нужны такие математические конструкции. Как это часто бывает, необходимость разработки данного раздела математики порождена потребностями теоретической физики, в данном конкретном случае физики элементарных частиц и ее технического аппарата – квантовой теории поля. Это один из самых сложных разделов современной теоретической физики, выходящий за рамки школьной программы. Но это не должно пугать читателя, так как для нашей цели – объяснения происхождения антикоммутирующих переменных – знания этого сложного аппарата не требуется. Достаточно всего лишь нескольких простых идей, которые мы сейчас изложим.

Существует множество различных элементарных частиц, наиболее известные из них – электрон, ядерные частицы протон и нейтрон, различные мезоны (π, μ и др.), фотоны – кванты света. Каждая частица обладает определенными внутренними характеристиками: массой покоя (обычно вместо массы m приводится соответствующая энергия mc^2), спином, электрическим зарядом и т.п. Сейчас для нас важен только спин – собственный момент количества движения частицы (для наглядности ее можно представлять себе в виде волчка с определенным и неизменным по абсолютной величине моментом количества движения). В подходящих единицах спин S любой элементарной частицы является либо целым, либо полуцелым числом; частицы с целым спином называются бозонами, а с полуцелым – фермионами (например, у π-мезона $S = 0$, у фотона $S = 1$, так что эти частицы – бозоны; электрон, протон и нейтрон имеют $S = 1/2$ и являются фермионами).

В аппарате квантовой теории поля каждой элементарной частице сопоставляется свое квантованное поле, являющееся некоторой линейной комбинацией операторов рождения a_i^+ и операторов уничтожения a_i частицы в состоянии i (индекс типа i, который для простоты будем считать дискретным, нумерует различные состояния, в которых может находиться частица). Точный смысл всех этих понятий для понимания дальнейшего не имеет значения: важно лишь иметь в виду, что символы a_i и a_i^+ не обычные числа, а некоторые более сложные объекты (для любознательного читателя можно уточнить, что это линейные операторы в некотором гильбертовом пространстве). Фактически сейчас важно только то, что эти символы удовлетворяют вполне определенным коммутационным соотношениям, причем (и это главное) различным для бозонов и фермионов. Для бозонов

$$a_i a_k - a_k a_i = 0, \quad a_i^+ a_k^+ - a_k^+ a_i^+ = 0, \\ a_i a_k^+ - a_k^+ a_i = \hbar\delta_{ik}, \tag{2}$$

а для фермионов

$$a_i a_k + a_k a_i = 0, \quad a_i^+ a_k^+ + a_k^+ a_i^+ = 0, \\ a_i a_k^+ + a_k^+ a_i = \hbar\delta_{ik}, \tag{3}$$

где $\hbar$ – известная постоянная Планка, а δ_{ik} – символ Кронекера,

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Конкретные расчеты в квантовой теории поля очень сложны и всегда выполняются какими-нибудь приближенными методами. Одним из таких методов является квазиклассическое приближение, соответствующее переходу к пределу $\hbar \longrightarrow 0$ в различных точных соотношениях. По смыслу это соответствует переходу от квантовой к классической физике. (Конечно, классический предел квантовой теории поля не очень простая классическая физика, так как речь идет о системах с бесконечным числом степеней свободы. Типичным примером такой физики является классическая механика упругой сплошной среды, описывающая, например, распространение звука в воздухе или твердом теле.)

Сейчас для нас важно лишь принципиальное различие между бозонными и фермионными полями в квазиклассическом пределе $\hbar \longrightarrow 0$. Из соотношений (2), (3) видно, что при $\hbar = 0$ все операторы рождения и уничтожения бозонных частиц (а поэтому и строящиеся из них поля) становятся коммутирующими между собой объектами, а для фермионных полей – антикоммутирующими. Коммутирующие между собой величины всегда можно понимать как обычные числовые переменные (точнее, их всегда можно реализовать таким образом без потери информации). Поэтому квазиклассический предел для бозонных квантовых систем соответствует некоторым классическим системам с обычными числовыми переменными.

Но для квантовых систем с фермионными полями такой предел естественно приводит к некоторой абстрактной классической физике с антикоммутирующими переменными. Именно для исследования таких необычных классических систем нужна математика, оперирующая с функциями антикоммутирующих переменных.

Необходимо подчеркнуть, что в нормальной классической физике задачи такого типа естественным путем не возникают; они появляются, как пояснялось выше, только как квазиклассический предел для квантовых задач с фермионными полями. Но уже это оправдывает их изучение, поскольку исследование квазиклассического приближения для различных квантовых систем – очень важная для физиков-теоретиков задача.

Первый вопрос, который при этом возникает: что такое функции антикоммутирующих переменных и как с ними обращаться? Об этом и пойдет речь в следующем разделе.

3. СТРУКТУРА ГРАССМАНОВОЙ АЛГЕБРЫ

Для простоты будем рассматривать грассманову алгебру с конечным числом n независимых антикоммутирующих переменных (“образующих”) $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Эти переменные являются аналогами операторов a_i и a_i^+ в соотношениях (2), (3). Половина переменных x соответствует символам a_i, а вторая половина – символам a_i^+, так что полное число n переменных x естественно считать четным числом. Сопоставляемые элементарным частицам квантованные поля, о которых говорилось в предыдущем разделе, на языке классической механики представляют обобщенные координаты системы с бесконечным числом степеней свободы, поэтому индекс i у операторов a_i и a_i^+ принимает бесконечное число значений (строго говоря, обычно он является даже не дискретным, а непрерывным). Но все это чисто технические усложнения, а для уяснения сути дела достаточно ограничиться простейшим случаем грассмановой алгебры с конечным числом образующих.

Итак, рассмотрим конечный набор попарно антикоммутирующих между собой по правилу (1) символов $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и попробуем понять, как можно построить функции $f(x)$ от таких необычных переменных. Будем считать, что для этих величин определены все операции, необходимые для построения полиномов, то есть имеют смысл произведения друг на друга любого числа сомножителей x_i и любые линейные комбинации таких произведений с произвольными числовыми коэффициентами, при этом операция умножения переменных x, по условию, удовлетворяет правилу антикоммутативности (1). Еще раз скажем, что конкретная природа этих объектов значения не имеет, важно лишь то, что с ними можно выполнять указанные выше действия.

Простейшими функциями переменных x являются элементарные мономы

$$1, x_i, x_ix_k, x_ix_kx_l, ..., \tag{4}$$

а их линейными комбинациями исчерпываются все полиномы. Нетрудно убедиться, что полное число отличных от нуля мономов (4) конечно и равно 2^n, где n – число образующих. Действительно, из соотношения (1) с $i = k$ вытекает равенство $x_ix_i = -x_ix_i$, из которого следует

$$(x_i)^2 = 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

Далее с помощью соотношения (1) сомножители в мономах (4) можно как угодно переставлять, что ведет лишь к возможному изменению знака (при нечетном числе перестановок). Поэтому ни один из мономов (4) не может содержать дважды (или более) какой-нибудь сомножитель x_i: перестановками эти два x_i всегда можно подвести друг к другу и затем воспользоваться соотношением (5), то есть данный моном оказывается равным нулю (в этом принципиальное отличие от случая обычных числовых переменных).

Таким образом, отличны от нуля только те мономы (4), у которых все сомножители различны и любая переменная x_i может входить в такие мономы не более чем однократно (то есть либо вообще не входить, либо входить один раз, но не более). Ясно, что полное число таких мономов конечно и что самым "старшим" из них является произведение всех образующих

$$x_1x_2...x_n. \tag{6}$$

Поскольку перестановки сомножителей в мономах (4) могут приводить только к изменению знака, независимыми в системе (4) можно считать мономы x_ix_k с $i < k$, $x_ix_kx_l$ с $i < k < l$ и т.д. Поэтому общий вид построенного из мономов (4) полинома следующий:

$$f(x) = f_0 + \sum_i f_1(i)x_i + \sum_{i<k} f_2(i, k)x_ix_k + ..., \tag{7}$$

где $f_s(i_1, i_2, ..., i_s)$ с $i_1 < i_2 < ... < i_s$ – произвольные независимые числовые коэффициенты. Последним слагаемым в (7) является вклад старшего монома (6), в обозначениях (7) сумма по n индексам $i_1 < i_2 < ...$ $... < i_n$ содержит лишь одно слагаемое с $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $..., i_n = n$, то есть коэффициент $f_n(1, 2, ..., n)$ при старшем мономе в (7) есть вполне определенное число. Суммирование по каждому из индексов в (7) производится по всем значениям от 1 до n с учетом указанных в (7) неравенств на индексы. Отсюда ясно, что полное число независимых слагаемых в (7)

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n \tag{8}$$

согласно формуле бинома Ньютона (C_n^k – число сочетаний из n элементов по k).

Таким образом, совокупность всех построенных из n образующих $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ полиномов (7) есть конечномерное линейное пространство с размерностью (8).

Представление (7) есть общий вид функции антикоммутирующих переменных, конкретная функция задается набором всех своих числовых коэффициентов $f_s(i_1, i_2, ..., i_s)$ с $i_1 < i_2 < ... < i_s$. Ясно, что совокупность всех полиномов (7) образует алгебру, то есть их можно умножать друг на друга и складывать с произвольными числовыми коэффициентами, получая в итоге объекты того же вида (7). Для выполнения всех этих операций достаточно пользоваться простым правилом коммутации (1) и его следствием (5). Поэтому множество всех полиномов (7) с произвольными числовыми коэффициентами называют грассмановой алгеброй.

Формально можно рассматривать не только полиномы, но и обычные функции типа $\exp x$ или $\ln(1 + x)$ от антикоммутирующих переменных, понимая их в виде соответствующих рядов по x, которые всегда будут обрываться вследствие соотношения (5). Например, по известному для обычных функций разложению $\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ...$ в случае грассманова аргумента x_i получаем $\exp x_i = 1 + x_i$, так как все старшие степени x_i не дают вклада в силу равенства (5). Приведем еще несколько примеров: по известным для обычных функций разложениям $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ...$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + ...$, $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + ...$ в случае грассманова аргумента x получаем $\sin x = x$, $\cos x = 1$, $\ln(1 + x) = x$. Разумеется, данное определение пригодно лишь для таких функций, которые разлагаются в ряды по целым степеням аргумента x; функции типа $\ln x$ или $x^{1/2}$ с грассмановым аргументом x смысла не имеют.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ГРАССМАНОВОЙ АЛГЕБРЕ

Обычные функции $f(x)$ от нескольких числовых переменных $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ представляют собой закон соответствия: каждой точке x в n-мерном пространстве переменных $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (его принято обозначать $\mathbf{R}_n$) ставится в соответствие определенное число $f(x)$. Такая функция может быть задана не на всем пространстве $\mathbf{R}_n$, а лишь на некоторой области $D \subset \mathbf{R}_n$ этого пространства; тогда D называют областью определения функции $f(x)$, а множество чисел $f(x)$ с $x \in D$ – областью значений данной функции.

В случае грассмановых (антикоммутирующих) переменных x определение $f(x)$ как закона соответствия теряет смысл: аргумент x в этом случае уже нельзя рассматривать как нечто пробегающее заданную область определения, а выражение $f(x)$ вида (7) не есть простое число. Тем не менее и для таких объектов можно ввести аналоги обычных операций дифференцирования, а именно определить понятие частной производной функции $f(x)$ по любой из переменных x_i (напомним, что для обычных функций нескольких переменных частная производная $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ определяется как обычная производная по переменной x_i при фиксированных прочих переменных $x_k \neq x_i$). Сейчас мы уточним определение производных на грассмановой алгебре.

Дифференцирование – линейная операция, поэтому для определения действия операции дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ на любой из полиномов (7) достаточно определить ее действие на любой из входящих в (7) элементарных мономов (4). Как уже говорилось (раздел 3), любой отличный от нуля моном может содержать конкретный множитель x_i не более чем один раз. Если в данном мономе нет x_i, то результат действия на него операции $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ считается, естественно, равным нулю. Если же в рассматриваемом мономе присутствует один (и только один) множитель x_i, то для обычных функций результат действия операции $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ сводился бы к простому вычеркиванию данного множителя x_i.

Перенести дословно эти простые правила на грассманову алгебру нельзя, это привело бы к совершенно неприемлемым соотношениям типа "производная нуля неравна нулю". Действительно, рассмотрим вытекающее из (1) равенство $0 = x_1x_2 + x_2x_1$ и подействуем на обе его части операцией $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, понимая ее как простое вычеркивание множителей x_l в слагаемых правой части. Тогда справа после дифференцирования получим выражение $2x_2$, а слева имеем производную нуля.

Поэтому правила дифференцирования для грассмановой алгебры модифицируются: для нее вводятся понятия левых и правых производных, которые обозначаются соответственно через $\dfrac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i}$ (левые) и $\dfrac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i}$ (правые). Действие левой производной $\dfrac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i}$ на любой содержащий один множитель x_i моном определяется следующим образом: данный множитель x_i нужно сначала вывести перестановками в крайнее левое положение, пользуясь правилом (1), и уже только после этого вычеркнуть. Действие правой производной $\dfrac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i}$ определяется аналогично, но теперь данный множитель x_i нужно переводить перестановками в крайнее правое положение. При перестановках появляются знаковые множители ± 1 (а именно, "минус единица в степени число перестановок" согласно правилу (1)). Поскольку четность числа перестановок данного множителя x_i налево и направо может быть различной, левые и правые производные в общем случае различаются. Но каждая из них является "хорошей" линейной операцией на грассмановой алгебре, то есть парадоксы типа "производная нуля неравна нулю" для них отсутствуют.

Поясним эти определения производных несколькими конкретными примерами:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{\partial}(x_1x_2)}{\partial x_1} &= -\frac{\overleftarrow{\partial}(x_1x_2)}{\partial x_1} = x_2, \\
\frac{\overrightarrow{\partial}(x_1x_2x_3)}{\partial x_1} &= \frac{\overleftarrow{\partial}(x_1x_2x_3)}{\partial x_1} = x_2x_3, \\
\frac{\overrightarrow{\partial}(x_1x_2x_3)}{\partial x_2} &= \frac{\overleftarrow{\partial}(x_1x_2x_3)}{\partial x_2} = -x_1x_3.
\end{aligned} \tag{9}$$

Соотношения (9) достаточно ясно иллюстрируют правила действия левых и правых производных.

Будем называть мономы типа (4) четными или нечетными в зависимости от числа содержащихся в них множителей x_i; линейные комбинации только четных (нечетных) мономов будем называть соответственно четными (нечетными) элементами грассмановой алгебры. Подсчитывая число перестановок любого из множителей x_i налево или направо, нетрудно убедиться, что на нечетных элементах алгебры левые и правые производные совпадают, а на четных различаются знаком. Учитывая это, легко показать, что для вторых производных любых функций (7) справедливы соотношения

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_k}f(x) = -\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_k}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i}f(x),$$
$$\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_k}f(x) = -\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_k}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i}f(x), \qquad (10)$$
$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_k}f(x) = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_k}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i}f(x).$$

Из формул (10) следует, что разноименные производные коммутируют друг с другом, а одноименные (обе левые или обе правые) антикоммутируют.

В качестве простого и полезного упражнения можно предложить читателю самостоятельно вывести следующие правила дифференцирования произведения двух функций A и B типа (7): если A – элемент с определенной четностью (то есть либо четный, либо нечетный), а B – произвольный элемент грассмановой алгебры, то тогда

$$\frac{\overrightarrow{\partial}[AB]}{\partial x_i} = \left[\frac{\overrightarrow{\partial}A}{\partial x_i}\right]B \pm A\left[\frac{\overrightarrow{\partial}B}{\partial x_i}\right],$$
$$\frac{\overleftarrow{\partial}[BA]}{\partial x_i} = \pm\left[\frac{\overleftarrow{\partial}B}{\partial x_i}\right]A + B\left[\frac{\overleftarrow{\partial}A}{\partial x_i}\right], \qquad (11)$$

где знак “плюс” соответствует четному множителю A, а знак “минус” – нечетному. Для доказательства соотношений (11) достаточно проверить их справедливость для любых двух простых мономов A и B. Отметим, что если оба вклада в правой части (11) для простых мономов отличны от нуля, то это означает, что в каждом из них есть множитель x_i, следовательно, $AB = 0$ (раздел 3). В этом случае сумма двух вкладов в правой части (11) должна быть равной нулю (как производная нуля).

Добавим в заключение несколько слов об интегрировании на грассмановой алгебре. Задачу о нахождении первообразной (неопределенного интеграла) можно сформулировать следующим образом: пусть дана некоторая система из n функций $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$. Вопросы: 1) каким условиям должны удовлетворять эти функции для того, чтобы их можно было представить в виде $f_i(x) = \frac{\overrightarrow{\partial}f(x)}{\partial x_i}$ (или $\frac{\overleftarrow{\partial}f(x)}{\partial x_i}$) с некоторой функцией $f(x)$, 2) как найти эту функцию, если нужные условия выполнены, 3) с какой степенью точности она находится? Предлагаем читателю попробовать найти самостоятельно ответы на эти вопросы (ответ на последний вопрос, конечно, тривиален: с точностью до аддитивной константы, как обычно).

В конкретных приложениях к нужным для теоретической физики задачам обычно приходится иметь дело не с первообразной, а с “определенным интегралом” $I = \int dx f(x)$ по всем переменным $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, который можно считать аналогом интеграла по всему пространству $\mathbf{R}_n$ для обычных (и хорошо убывающих на бесконечности) функций $f(x)$. Формально такой многократный интеграл $\int dx...$ определяется как повторный интеграл $\int dx_n \int dx_{n-1} ... \int dx_1 ... \equiv \int ... \int dx_n dx_{n-1} ... dx_1 ...$, причем символы dx_i считаются антикоммутирующими как между собой, так и со всеми множителями x_k. Однократный интеграл по любой из грассмановых переменных x_i однозначно определяется следующими двумя правилами:

$$\int dx_i = 0, \qquad \int dx_i\, x_i = 1 \qquad \forall i = 1, 2, ..., n \qquad (12)$$

(вместо единицы в правую часть второго равенства (12) можно поставить любую константу, что приведет лишь к несущественному “изменению нормировки” интеграла). Из определений (12) следует, что полный интеграл $I = \int dx M(x)$ от любого конкретного монома $M(x)$ из системы (4) отличен от нуля тогда и только тогда, когда $M(x)$ – самый старший моном (6) (поскольку только для него на каждый символ dx_i в многократном интеграле находится соответствующий множитель x_i). Для старшего монома (6) такой интеграл равен единице в силу принятого в (12) условия нормировки. Из сказанного следует, что вклад в интеграл $I = \int dx f(x)$ для произвольного полинома (7) дает только самый старший моном (6), то есть

$$\int dx f(x) = f_n(1, 2, ..., n), \qquad (13)$$

где $f_n(1, 2, ..., n)$ – однозначно определенный (см. текст после формулы (7) в разделе 3) коэффициент при старшем мономе в выражении (7).

На первый взгляд интеграл (13) на грассмановой алгебре не имеет ничего общего с определенным интегралом по всему пространству $\mathbf{R}_n$ для обычных функций, в котором переменная x пробегает область интегрирования, а интеграл набирается как сумма вкладов от всех малых кусочков этой области. В интеграле (13) все эти идеи, очевидно, отсутствуют. Тем не менее оказывается, что многие свойства интеграла (13) подобны свойствам обычного определенного интеграла, хотя часто с некоторой модификацией. Мы не будем останавливаться на этих вопросах подробнее, отсылая читателя за соответствующей информацией к книгам [1, 2].

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В короткой статье мы изложили лишь основные сведения о функциях антикоммутирующих переменных и правилах работы с ними, вполне доступные по уровню любому овладевшему школьной программой старшекласснику. Приведенные сведения можно было бы дополнить, например, правилами дифференцирования сложной функции $f(x(y))$ с грассмановыми переменными x и y, правилами замены переменных в интеграле (13) (которые даже в случае простейшей линейной замены типа $x = 2y$ отличаются от аналогичных правил для обычных интегралов), формулами интегрирования по частям в (13) и т.п. Заинтересованный читатель может найти эти дополнительные сведения, например, в книгах [1, 2], но интереснее попытаться найти ответы на поставленные вопросы самостоятельно. Более подробное и математически строгое изложение теории функций антикоммутирующих переменных содержится в книге [3].

Еще один круг вопросов, над которыми можно предложить задуматься читателю: как сформулировать классическую механику простых систем с конечным числом степеней свободы, обобщенные координаты и импульсы которых являются не обычными, а грассмановыми переменными (естественно, зависящими от времени)? С точки зрения самой классической механики такая постановка задачи может показаться академической, но она вполне оправдывается в действительности, как пояснялось в разделе 2, практическими потребностями квантовой теории. Поэтому исследованию таких необычных классических систем посвящено довольно много работ физиков-теоретиков. С этой тематикой можно ознакомиться, например, по статье [4], родственные проблемы теории “суперсимметричных” квантовых систем обсуждаются в обзоре [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965. 235 с.

2. *Васильев А.Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 294 с.

3. *Березин Ф.А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983. 208 с.

4. *Борисов Н.В., Иоффе М.В., Эйдес М.И.* // Теорет. и мат. физика. 1976. Т. 29, № 1. С. 25–42.

5. *Генденштейн Л.Э., Криве И.В.* // Успехи физ. наук. 1985. Т. 146, вып. 4. С. 553–590.

* * *

Александр Николаевич Васильев, доктор физико-математических наук, профессор физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Автор более 100 научных публикаций по различным проблемам теоретической и математической физики.