

THE ARITHMETIC  
OF RATIONAL NUMBERS  
AND COMPUTER-  
ASSISTED STUDY  
OF INTEGRAL  
EQUATIONS

V. P. MAKSIMOV

*Many applied problems can be reduced to an investigation of integral equations. This paper introduces the principal statements forming the theoretical basis for a computational experiment directed to the study of the solvability of the Fredholm integral equation.*

**Многие прикладные задачи сводятся к исследованию интегральных уравнений. В статье дается представление об основных положениях, лежащих в основе вычислительного эксперимента, направленного на исследование разрешимости линейного интегрального уравнения Фредгольма.**

## АРИФМЕТИКА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. П. МАКСИМОВ

Пермский государственный университет

### ВВЕДЕНИЕ

В математике принято считать задачу решенной, если ее удалось свести к задаче, решение которой уже известно. Конечно, множество известных решенных задач у каждого исследователя свое, оно зависит от образования, специализации, опыта и личных научных пристрастий. Цель этой статьи — проследить вместе с читателем за тем, как одна из довольно трудных задач исследования интегральных уравнений сводится к задаче, требующей минимального уровня знаний: умения производить арифметические действия с рациональными числами. На наш взгляд, такое сведение не только должно представлять познавательный интерес, но и поможет дать представление о возможности и “технологии” использования компьютера для эффективного исследования конкретных интегральных уравнений, возникающих при изучении самых разнообразных прикладных задач.

План статьи таков. Сначала на примере системы линейных алгебраических уравнений мы обсудим вопрос, можно ли (и если можно, то как) с помощью арифметических вычислений ответить на вопрос о существовании решения. Заметим сразу, что традиционное и наиболее распространенное применение компьютера направлено на вычисление некоторого приближения к “решению” — без скрупулезного анализа ситуации, без попыток ответить сначала на вопрос: а существует ли то, приближение к чему мы хотим найти, и без оценки точности результата, когда он осмыслен? Как это ни парадоксально, даже для систем линейных алгебраических уравнений вопрос о гарантированных оценках точности решения стал систематически изучаться относительно недавно (см., например, [1]). Обычного пользователя-вычислителя в лучшем случае настаивают неприятности, возникающие в процессе вычислений, или экзотичность результата, например очень большое число.

Затем мы расскажем о задачах, которые сводятся к исследованию интегральных уравнений; покажем, как исследование одного класса интегральных уравнений сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений и, наконец, как можно



(3), коэффициенты которой удовлетворяют неравенствам (5), имеет единственное решение.

**Замечание 1.** В условиях теоремы 1 для разности решения  $x$  системы  $Ax = c$  и решения  $\tilde{x}$  системы  $\tilde{A}\tilde{x} = c$  имеет место оценка

$$|x - \tilde{x}| \leq \frac{\|\Delta\|}{1 - \|\Delta\| \cdot \|B\|} \cdot \|B\|^2 \cdot |c|.$$

**Замечание 2.** Подчеркнем, что в условиях теоремы 1 любая система, коэффициенты которой удовлетворяют условию (5), имеет единственное решение. Таким образом, на множестве коэффициентов линейных систем (на множестве матриц  $A$ ) существует “окрестность” матрицы  $\tilde{A}$ , вся заполненная обратимыми матрицами (матрицами коэффициентов однозначно разрешимых систем  $Ax = c$ ). “Радиус”  $\rho$  этой окрестности зависит только от матрицы  $\tilde{A}$ :

$$\rho = \frac{1}{\|\tilde{A}^{-1}\|}.$$

Например, для системы с матрицей  $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  (см. пример 1) в предположении, что элемент 1 известен точно ( $\delta_{22} = 0$ ), такая окрестность представляет собой прямоугольный параллелепипед, изображенный на рис. 1. В разделе 4 мы воспользуемся аналогом теоремы 1 для линейных интегральных уравнений.

**2. ЗАДАЧИ, СВОДИМЫЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

Можно считать общеизвестным, что обыкновенные дифференциальные уравнения играют исключительно важную роль как математические мо-

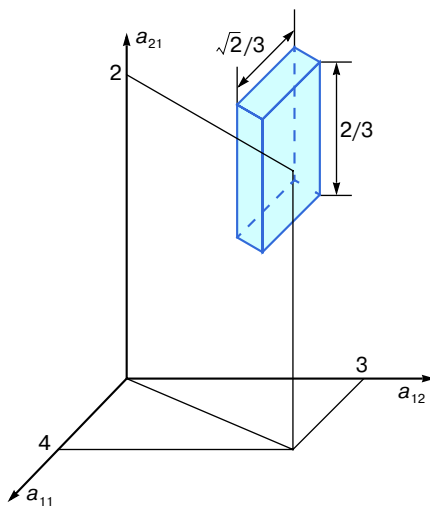


Рис. 1

дели многих реальных явлений и процессов. Для дифференциального уравнения

$$(Lx)(t) \equiv \dot{x}(t) + P(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

часто возникает так называемая начальная задача, или задача Коши,

$$(Lx)(t) = f(t), \quad x(0) = \alpha,$$

где требуется найти функцию  $x(t)$ , удовлетворяющую уравнению (6) и дополнительному начальному условию  $x(0) = \alpha$ . Используя подстановку

$$x(t) = \alpha + \int_0^t z(s)ds \quad (7)$$

( $z(t) = \dot{x}(t)$ ), для  $z(t)$  получаем уравнение

$$z(t) = \int_0^t P(s)z(s)ds + P(t)\alpha + f(t), \quad t \in [0, T],$$

которому можно придать вид

$$z(t) = \int_0^t K(t, s)z(s)ds + g(t), \quad (8)$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} P(t) & \text{при } 0 \leq s \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < s \leq T, \end{cases}$$

$$g(t) = P(t)\alpha + f(t).$$

Уравнение (8) называется линейным интегральным уравнением Фредгольма, а функция двух переменных  $K(t, s)$  – ядром этого уравнения.

Для широкого круга прикладных задач возникает необходимость рассматривать краевую задачу [3, 4], представляющую собой систему

$$(Lx)(t) = f(t), \quad lx \equiv \Psi x(0) + \int_0^T \varphi(s)\dot{x}(s)ds = \alpha, \quad (9)$$

в которой второе уравнение принято называть краевым условием. В виде  $lx = \alpha$  могут быть записаны самые разнообразные случаи краевых условий. В частности, при соответствующем выборе  $\Psi$  и  $\varphi$  в таком виде могут быть записаны: начальное условие

$$x(0) = \alpha \quad (\Psi = 1, \varphi(s) \equiv 0);$$

периодическое условие

$$x(T) = x(0) \quad (\Psi = 0, \varphi(s) \equiv 1, \alpha = 0);$$

многоточечное условие

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i x(\tau_i) = \alpha, \quad \tau_i \in [0, T], \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

в этом случае

$$\Psi = \sum_{i=1}^m \gamma_i, \quad \varphi(s) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \begin{cases} 1 & \text{при } s \in [0, \tau_i], \\ 0 & \text{при } s \notin [0, \tau_i]; \end{cases}$$

интегральное условие

$$\int_0^T x(s) ds = \alpha \quad (\Psi = T, \varphi(s) = T - s).$$

Свести задачу (9) к интегральному уравнению можно воспользовавшись следующим утверждением современной теории краевых задач [3, с. 52]: по числу  $\Psi$  и функции  $\varphi$  можно найти такую функцию  $u(t)$ , что  $u(0) \neq 0$ ,  $lu = 1$  и система уравнений

$$\dot{x}(t) + B(t)x(0) = z(t), \quad lx = \alpha,$$

где  $B(t) = -u(t)/u(0)$ , однозначно разрешима и ее решение имеет представление

$$x(t) = u(t)\alpha + \int_0^T W(t, s)z(s) ds. \quad (10)$$

Здесь

$$W(t, s) = \begin{cases} 1 - u(t)\varphi(s) & \text{при } 0 \leq s \leq t \leq T, \\ -u(t)\varphi(s) & \text{при } 0 \leq t < s \leq T. \end{cases}$$

Воспользуемся  $W$ -подстановкой (10) применительно к уравнению (6):

$$\dot{x}(t) + B(t)x(0) = -P(t)x(t) + B(t)x(0) + f(t).$$

Получаем уравнение

$$z(t) = -P(t)u(t)\alpha - \int_0^T P(t)W(t, s)z(s) ds + B(t)u(0)\alpha + \int_0^T B(t)W(t, s)z(s) ds + f(t),$$

которое принимает вид (8), если положить

$$K(t, s) = B(t)W(t, s) - P(t)W(t, s), \\ g(t) = f(t) + B(t)u(0)\alpha - P(t)u(t)\alpha.$$

Краевая задача (9) для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

$$(Lx)(t) \equiv \dot{x}(t) + P(t)x[h(t)] = f(t), \quad t \in [0, T], \\ x(\xi) = v(\xi) \quad \text{при } \xi \notin [0, T], \quad (11)$$

для интегродифференциального уравнения

$$(Lx)(t) \equiv \dot{x}(t) + \int_0^T F(t, s)x(s) ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

и многих других классов уравнений тоже сводятся к интегральному уравнению (8) с помощью  $W$ -подстановки (10). При этом ядро  $K(t, s)$  и функция  $g(t)$  находятся в результате элементарных преобразований. Подробности можно найти в книге [3].

### 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ: СВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе рассмотрим класс интегральных уравнений, исследование которых сводится к исследованию системы (3). Этот класс будет играть в

исследовании интегральных уравнений с произвольным ядром ту же роль, что система  $\tilde{A}\tilde{x} = c$  при исследовании системы  $Ax = c$  в разделе 1.

Уравнение

$$z(t) = \int_0^T \tilde{K}(t, s)z(s) dt + g(t) \quad (13)$$

называется уравнением с вырожденным ядром  $\tilde{K}(t, s)$ , если это ядро имеет вид

$$\tilde{K}(t, s) = \sum_{j=1}^m u_j(t)v_j(s).$$

Мы не будем сейчас оговаривать свойства функций  $u_j, v_j$ ; здесь от них требуется только существование интегралов (см. ниже).

Будем умножать обе части уравнения (13) на функции  $v_j(t)$  и интегрировать почленно от 0 до  $T$ . Проделав это последовательно для всех индексов  $i = 1, 2, \dots, m$ , получим систему равенств

$$\int_0^T v_i(t)z(t) dt = \sum_{j=1}^m \int_0^T v_i(t)u_j(t) dt \cdot \int_0^T v_j(s)z(s) ds + \int_0^T v_i(t)g(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

Обозначая

$$\int_0^T v_i(t)z(t) dt = x_i, \quad \int_0^T v_i(t)u_j(t) dt = \alpha_{ij}, \\ \int_0^T v_i(t)g(t) dt = c_i$$

и записывая в новых обозначениях систему (14), приходим к выводу, что уравнение (13) имеет решение тогда и только тогда, когда разрешима система

$$x_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}x_j + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

В случае, если матрица

$$A = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} = e_{ij} - \alpha_{ij}, \quad e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (16)$$

имеет обратную матрицу  $A^{-1} = B = \{b_{ij}\}$ , уравнение (13) имеет единственное решение  $\tilde{z}(t)$ :

$$\tilde{z}(t) = \sum_{j=1}^m u_j(t)x_j + g(t) = \sum_{j=1}^m u_j(t) \left( \sum_{i=1}^m b_{ji}c_i \right) + g(t)$$

или

$$\tilde{z}(t) = \int_0^T R(t, s)g(s) ds + g(t), \quad (17)$$

где

$$R(t, s) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m u_j(t) b_{ji} v_i(s). \quad (18)$$

Заметим, что в случае, когда функции  $u_j, v_i$  являются многочленами с рациональными коэффициентами и число  $T$  рационально, коэффициенты системы (15) вычисляются точно, и в случае обратимости матрицы  $A$  числа  $b_{ij}$  тоже рациональные.

**Пример 2.** Для уравнения

$$z(t) = \int_0^1 (1 + ts)z(s)ds + 1, \quad t \in [0, 1],$$

имеем

$$\begin{aligned} u_1(t) &\equiv 1, & v_1(s) &\equiv 1, & u_2(t) &= t, & v_2(s) &= s; \\ \alpha_{11} &= 1, & \alpha_{12} &= \frac{1}{2}, & \alpha_{21} &= \frac{1}{2}, & \alpha_{22} &= \frac{1}{3}; \\ & & c_1 &= 1, & c_2 &= \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(t, s) = -\frac{8}{3} - 2(t + s).$$

Таким образом, в силу (17)

$$\tilde{z}(t) = -\frac{8}{3} - 2t.$$

#### 4. КАК УЗНАТЬ, СУЩЕСТВУЕТ ЛИ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Самые простые на вид интегральные уравнения Фредгольма могут не иметь решений (примером является уравнение  $z(t) = \int_0^1 z(s)ds + 1$ ). Понятно, что в

таких случаях бессмысленно пытаться применять многочисленные приближенные методы. Как узнать, разрешимо ли интегральное уравнение

$$z(t) = \int_0^T K(t, s)z(s)ds + g(t) \quad (19)$$

в общем случае. Напомним, что в уравнении (19), возникающем при исследовании краевой или вариационной задачи, ядро строится по параметрам исходной задачи с помощью преобразований, которые в большинстве случаев приводят к довольно громоздким выражениям. Для ответа на этот вопрос воспользуемся той же идеей, что и в разделе 1. Заменим уравнение (19) уравнением

$$\tilde{z}(t) = \int_0^T \tilde{K}(t, s)\tilde{z}(s)ds + g(t) \quad (20)$$

с вырожденным ядром

$$\tilde{K}(t, s) = \sum_{j=1}^m u_j(t)v_j(s), \quad (21)$$

в котором функции  $u_j$  и  $v_j$  являются многочленами с рациональными коэффициентами или, что иногда удобнее, кусочно-полиномиальными функциями с рациональными коэффициентами и рациональными точками разрыва. Известно (см., например, [5]), что при естественных предположениях относительно ядра  $K(t, s)$  для любого заданного  $\varepsilon > 0$  ядро  $\tilde{K}(t, s)$  можно определить так, чтобы выполнялось неравенство

$$\iint_{00}^{TT} [K(t, s) - \tilde{K}(t, s)]^2 dt ds \leq \varepsilon^2 \quad (22)$$

(так же как для каждого вещественного числа  $a$  и любого  $\varepsilon > 0$  можно найти рациональное число  $\tilde{a}$  так, что  $|a - \tilde{a}| < \varepsilon$ ).

Задав  $\varepsilon$  и построив соответствующее ядро  $\tilde{K}(t, s)$ , исследуем уравнение (20), как это было описано в разделе 3. Это можно сделать оперируя только с рациональными числами (все интегралы с формулами для  $a_{ij}$  вычисляются как интегралы от многочленов с рациональными коэффициентами:

$$\int_p^q \sum_{i=0}^N r_i t^i dt = \sum_{i=0}^N \frac{r_i}{i+1} [q^{i+1} - p^{i+1}]$$

и представляют собой рациональные числа).

Сформулируем теперь для интегральных уравнений аналог теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $(m \times m)$ -матрица (16), построенная по функциям  $u_j, v_j, j = 1, 2, \dots, m$ , обратима и  $A^{-1} = B = \{b_{ij}\}$ . Если

$$\varepsilon < \frac{1}{r}, \quad (23)$$

где

$$r = 1 + \left\{ \iint_{00}^{TT} [R(t, s)]^2 dt ds \right\}^{1/2}, \quad (24)$$

$a$  функция  $R(t, s)$  определена равенством (18), то уравнение (19) с ядром  $K(t, s)$ , удовлетворяющим неравенству (22), имеет единственное решение.

**Замечание 3.** Если неравенство (23) не выполняется, мы ничего не можем сказать о разрешимости уравнения (19). В таком случае есть смысл, уменьшив  $\varepsilon$ , повторить снова всю процедуру исследования. Установлено, что для однозначно разрешимого уравнения (19) всегда найдется такое ядро  $\tilde{K}(t, s)$ , что неравенство (23) будет выполнено. Таким образом,

исследование конкретного уравнения (19) представляет собой многократный вычислительный эксперимент, в результате которого может быть установлена однозначная разрешимость уравнения.

**Замечание 4.** В условиях теоремы 2 для разности решения  $z$  уравнения (19) и решения  $\tilde{z}$  уравнения (20) имеет место оценка

$$\int_0^T [z(t) - \tilde{z}(t)]^2 dt \leq \frac{\varepsilon^2 r^4}{(1 - \varepsilon \cdot r)^2} \int_0^T [g(t)]^2 dt.$$

**Замечание 5.** Формула (24) – единственное выражение, где придется извлекать квадратный корень из рационального числа.

**Пример 3** (подготовлен А.Н. Румянцевым). Задача Коши для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] = t^2, \quad t \in [0, 1], \quad (25)$$

$$x(0) = 0,$$

где

$$p(t) = \begin{cases} 2t & \text{при } t \in [0; 0,3), \\ \frac{t}{4} & \text{при } t \in [0,3; 0,7], \\ 2t & \text{при } t \in (0,7; 1], \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0,65 & \text{при } t \in [0; 0,3), \\ 1 - t & \text{при } t \in [0,3; 0,7), \\ 0,8 & \text{при } t \in [0,7; 1], \end{cases}$$

с помощью W-подстановки (7) сводится к интегральному уравнению Фредгольма (8) с правой частью  $f(t) = t^2$  и ядром  $K(t, s) = P(t)\chi_h(t, s)$ , где функция  $\chi_h(t, s)$  принимает значение 1 на множестве, выделенном розовым цветом на рис. 2, и значение 0 в остальных точках квадрата  $[0; 1] \times [0; 1]$ . В качестве ядра  $\tilde{K}(t, s)$  возьмем кусочно-постоянную аппроксимацию ядра  $K(t, s)$ , соответствующую равномерному разбиению квадрата  $[0; 1] \times [0; 1]$  на квадраты со стороной 0,02. При этом оказывается

$$\varepsilon = 0,01148; \quad r = 1,84028.$$

Таким образом, полученное уравнение (8), а с ним и задача (25) однозначно разрешимы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы надеемся, что эта статья даст читателю представление об основных утверждениях, лежащих в основе вычислительного эксперимента по исследованию разрешимости линейных интегральных уравнений. Подчеркнем еще раз, что справедливость неравенства (23) не может быть установлена стандартными вычислениями с помощью компьютера. Получение гарантированного результата здесь требует вычислительных и программных средств, точно оперирующих с рациональными числами (альтернативный вариант, при котором осуществляется

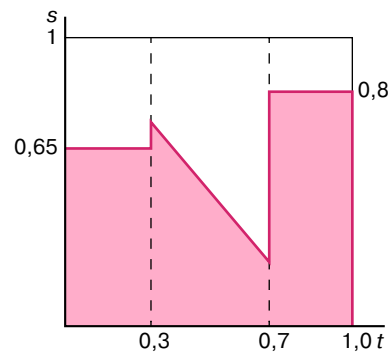


Рис. 2

скрупулезный пооперационный контроль точности вычислений, мы здесь не обсуждаем, это выходит за рамки настоящей статьи). По этой причине реализация описанной схемы исследований требует значительных усилий и соответствующей квалификации. Как замечено в [6], существует “контраст между простотой описания метода... и сложностями грамотной его программной реализации”. Одна из таких реализаций выполнена в Пермском государственном университете под руководством А.Н. Румянцева.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К., Антонов А.Г., Костин В.И., Кирилук О.П. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1992.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
4. Максимов В.П., Румянцев А.Н. Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике: Конструктивное исследование // Изв. вузов. Математика. 1993. № 5. С. 56–71.
5. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959.
6. Икрамов Х.Д. Численные методы линейной алгебры. М.: Знание, 1987. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. “Математика, кибернетика”; № 4).

\* \* \*

Владимир Петрович Максимов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономической кибернетики Пермского государственного университета, руководитель лаборатории конструктивных методов исследования динамических моделей. Член редколлегии журнала “Известия вузов. Математика”. Область научных интересов – дифференциальные уравнения, математическое моделирование, доказательный вычислительный эксперимент. Автор 90 научных публикаций, в том числе двух монографий (в соавторстве).