INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE METHOD OF COMPARISON

E. V. VOSKRESENSKII

The method of comparison, one of the methods of integration of ordinary differential equations, is presented. The problem of stability of solutions is solved on the basis of this method. The presentation is elementary and accessible.

Излагается один из методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений – метод сравнения. На его основе решается задача об устойчивости решений. Изложение элементарно и доступно.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СРАВНЕНИЯ

Е. В. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассказано о некоторых методах решения дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где функция f определена и непрерывна в некоторой области D плоскости R^2. Пусть решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным (t_0, x_0) единственно, и его будем обозначать так: $x(t: t_0, x_0)$. Итальянский математик Дж. Пеано в 1890 году доказал, что при любых t_0 и x_0, таких, что точка $(t_0, x_0) \in \in D$, всегда существует решение $x(t: t_0, x_0)$ уравнения (1). Как найти его? Оказалось, найти решение в виде аналитических формул, как это удается сделать для уравнений с разделяющимися переменными и некоторых других, в общем случае невозможно. Ж. Лиувилль в 1841 году впервые указал уравнение, которое не интегрируется в квадратурах. Более того, большинство уравнений в этом смысле решению принципиально не поддается. Так, решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t \tag{2}$$

нельзя выразить через элементарные функции и интегралы от них. Другими словами, уравнение (2) является нерешаемым в классе элементарных функций. И это несмотря на то, что на основании теоремы Пеано решения этого уравнения существуют. Вскоре обнаружилось, что этот факт не является трагическим. Оказалось, что более важное значение имеет знание свойств решений, чем его задание формулой, а свойства можно узнать без использования формулы, если даже она имеется. Поэтому в современной математике термин “интегрирование” дифференциального уравнения обращен к изучению свойств решений и в зависимости от методов изучения свойств имеются различные методы интегрирования: численные, качественные, асимптотические и т.д.

Важное значение имеет знание оценок вида

$$|x(t: t_0, x_0)| \le \psi(t), \tag{3}$$

где ψ – известная функция. Если она определена на полуоси $[T, +\infty)$, то из неравенства (3) можно получить важные асимптотические свойства решений. Основным методом получения оценок вида (3) в настоящее время является метод сравнения, суть которого заключается в следующем.

Рассматриваются два уравнения вида (1)

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x), \tag{4}$$

$$\frac{dx}{dt} = f_2(t, x), \tag{5}$$

причем свойства решений уравнения (5) известны и функция

$$R(t, x) = |f_1(t, x) - f_2(t, x)|$$

в каком-нибудь смысле является малой в области D. Например:

1) $R(t, x) \le m$, где m – достаточно малое положительное число, или

2) $R(t, x) = \psi(t)|x|$, $\int\limits_T^{+\infty} \psi(t)dt$ сходится и т.д.

Малость в каждой конкретной задаче индивидуальна: в некоторых случаях она вида 1), в других – вида 2). Могут быть и другие виды малости. Оказалось, что при подходящей малости R многие важные свойства решений уравнения (4) наследуются от свойств решений уравнения (5). В этом суть метода сравнения. Уравнение (5) называется уравнением сравнения, а уравнение (4) – исследуемым уравнением, сам процесс определения характера малости R и нахождения списка наследуемых свойств решениями называется интегрированием дифференциальных уравнений методом сравнения.

НЕРАВЕНСТВО ВАЖЕВСКОГО

Уравнения сравнения подбираются так, чтобы они не были слишком сложными. Малость R часто задается при помощи скалярной функции, которая определяется на множестве, когда переменная t меняется в пределах полуоси, а вторая переменная $z \ge 0$. Пусть уравнение (5) имеет простейший вид

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

и

$$|f(t, x)| = R(t, x) \le \lambda(t, |x|)$$

при всех x и $t > T$, а λ – непрерывная неотрицательная функция, такая, что произвольные начальные данные (t_0, z_0), $t_0 \ge 0$, $z_0 \ge 0$ определяют единственное решение уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t, z), \qquad \lambda(t, 0) \equiv 0. \tag{6}$$

Тогда

$$|f(t, x)| \le \lambda(t, |x|) \tag{7}$$

и малость R определяется свойствами функции λ.

В основе метода сравнения находится простая теорема [1], доказанная Г. Важевским в 1950 году.

Теорема (Важевский). *Пусть функция V такая, что*:

1) *она определена и непрерывна на множестве* $I_0 = [t_0, \beta]$, $V(t_0) \le z_0$;

2) $\dot V(t) \le \lambda(t, V(t))$ *на множестве* I_0.

Тогда если $z(t$: $t_0, z_0)$ определено на I_0, то $V(t) \le z(t$: $t_0, z_0)$ при всех t из I_0.

В дальнейшем будем считать, что D состоит из точек плоскости R^2, когда $t > T$, а x – произвольное число и любые начальные данные однозначно определяют решение $x(t$: $t_0, x_0)$. С учетом неравенства (7) для решения $x(t$: $t_0, x_0)$ уравнения (1) получим

$$\frac{d|x(t\colon t_0, x_0)|}{dt} \le |\dot x(t\colon t_0, x_0)| \le \lambda(t, |x(t\colon t_0, x_0)|).$$

Тогда на основании теоремы Важевского имеем

$$|x(t\colon t_0, x_0)| \le z(t\colon t_0, z_0) \tag{8}$$

для всех $|x_0| \le z_0$ и $t \in I_0$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x\sin(tx)}{t^2}, \qquad t > 1. \tag{9}$$

Тогда

$$\frac{|x\sin(tx)|}{t^2} \le \frac{|x|}{t^2}$$

и уравнение (6) здесь имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z}{t^2}.$$

Поэтому

$$|x(t\colon t_0, x_0)| \le z_0 k, \qquad k = \exp\left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right), \qquad t \ge t_0.$$

Заметим, что при любых z_0 и любом $t_0 > 1$ решение уравнения (9) принимает малые значения при всех $t \ge t_0$. Это свойство решения $x = 0$ уравнения (9) называется устойчивостью решения $x = 0$.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ

Перейдем к точной формулировке понятия устойчивости решения. Пусть $x = 0$ есть решение уравнения (1).

Определение. Решение $x = 0$ называется *устойчивым*, если для любой окрестности U точки $x = 0$ существует такая меньшая окрестность $U_0 \subseteq U$, что любое решение, проходящее в момент времени t_0 через точку $x_0 \in U_0$, остается в U при всех $t \geq t_0$.

Понятие устойчивости отнесено здесь лишь к решению $x = 0$. Однако оно легко переносится и на другие решения. Пусть $x(t: t_0, x_0)$ – исследуемое решение. Выполним для уравнения (1) замену

$$y = x - x(t: t_0, x_0), \tag{10}$$

тогда уравнение (1) перейдет в новое уравнение

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \tag{11}$$

для которого $y = 0$ является решением. Если это решение устойчиво, то решение $x(t: t_0, x_0)$ называется устойчивым, если $y = 0$ неустойчиво, то $x(t: t_0, x_0)$ – неустойчивым. Поэтому впредь считаем, что замена (10) выполнена, и поэтому всегда задача об устойчивости решения $x(t: t_0, x_0)$ сводится к изучению устойчивости решения $y = 0$ уравнения (11), а это уравнение такого же типа, что и уравнение (1). По этой причине исследование всегда ведется лишь относительно решения $y = 0$ уравнения (1). Не будем отступать здесь от традиций.

Неравенство (8) и пример 1 показывают, что свойство устойчивости решения $x = 0$ уравнения сравнения $\frac{dx}{dt} = 0$ наследуется уравнением (1) для решения $x = 0$. Таким образом, эта задача для уравнения (9) получила очень простое решение, тогда как оно не интегрируется в квадратурах.

ЛЯПУНОВСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Прежде чем решать задачу об устойчивости решения $x = 0$ уравнения (1), полезно уравнение (1) преобразовать так, чтобы полученное уравнение было простым. Если преобразование имеет вид

$$x = \varphi(t, y) \tag{12}$$

и $|x| \leq k_1|y|$, $|y| \leq k_2|x|$, где $k_1, k_2 > 0$, то оно переводит уравнение (1) в уравнение, для которого решение $y = 0$ имеет тот же характер, что и решение $x = 0$ уравнения (1). Другими словами, эти решения либо одновременно устойчивы, либо одновременно неустойчивы. Такие преобразования называются ляпуновскими [2].

Предположим, что f непрерывно дифференцируема по x и

$$|f(t, x)| \leq \psi(t)|x|,$$

где ψ – непрерывная функция, $\int_0^{+\infty} \psi(t)dt$ сходится.

Пусть $\int_0^{+\infty} \psi(t)dt = k$. Тогда $\lambda(t, |x|) = \psi(t)|x|$ и на основании теоремы Важевского имеем

$$|x(t: t_0, x_0)| \leq k_1|x_0|, \qquad k_1 = e^k, \qquad t \geq t_0.$$

Рассмотрим замену

$$x = y + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s: t_0, y))ds. \tag{13}$$

Тогда $|x| \leq c_1|y|$, $c_1 = kk_1$. Легко проверяется неравенство $|y| \leq c_2|x|$, $c_2 > 0$. Следовательно, преобразование (13) ляпуновское и переводит уравнение (1) в уравнение

$$\frac{dy}{dt} = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) является простейшим, и все его решения являются устойчивыми. Заметим, что и уравнение (9) ляпуновским преобразованием переводится в уравнение (14).

ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теперь рассмотрим уравнения более общего вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + f_0(t, x), \tag{15}$$

которые получаются из уравнения (1) путем добавления к правой части непрерывной функции f_0. Такие уравнения называются возмущенными.

Предположим, что для уравнения (1) существует ляпуновское преобразование φ, переводящее уравнение (1) в уравнение (14). Тогда этим же преобразованием φ уравнение (15) преобразуется в уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1} f_0(t, \varphi(t, y)). \tag{16}$$

Еще предположим

$$\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1} f_0(t, \varphi(t, y))\right| \leq \lambda(t, |y|), \tag{17}$$

а функция λ обладает такими же свойствами, что и λ из уравнения (6). Тогда если решение уравнения (6) $z = 0$ устойчиво, то и решение уравнения (15) $x = 0$ также устойчиво.

Пример 2. Исследовать характер решения $x = 0$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x\sin(tx)}{t^2} + f_0(t, x), \qquad t > 1, \tag{18}$$

где функция f_0 удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Так как ляпуновским преобразованием уравнение (9) переводится в уравнение (14), то характеры решений $x = 0$ уравнения (18) и $y = 0$ уравнения (16) совпадают. Из неравенства (17) следует устойчивость решения $x = 0$ уравнения (18), если решение $z = 0$ уравнения (6) устойчиво.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сделана попытка изложить один из важнейших современных методов интегрирования дифференциальных уравнений [3, 4]. При помощи этого метода решены важнейшие прикладные задачи, относящиеся к исследованию космоса, небесной механики, экологии и многих других областей знаний. Более подробное изложение требует привлечения серьезного аппарата. Однако изначальные идеи метода требуют лишь некоторого минимального запаса знаний из математики. Его дальнейшее уменьшение не позволило бы изложить суть дела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н.*, *Абетс П.*, *Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

2. *Воскресенский Е.В.* Ляпуновские группы преобразований // Изв. вузов. Математика. 1994. № 7. С. 1–7.

3. *Матросов В.М.* Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1374–1386.

4. *Воскресенский Е.В.* Методы сравнения в нелинейном анализе. Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 224 с.

* * *

Евгений Викторович Воскресенский, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики Мордовского государственного университета, заслуженный деятель науки Республики Мордовия, президент Средневолжского математического общества. Область научных интересов – обыкновенные дифференциальные уравнения, математическая теория управления, численные методы. Автор более 150 работ, в том числе трех монографий.