APPLICATIONS OF CONTINUOUS TRANSFORMATION GROUPS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS

K. G. GARAEV

Single-parameter transformation groups are examined and their applications to differential equations are given. The goal of the work is to arise readers' interest in the theory of continuous Sophus Lie groups, which in recent decades gained a wide application in mathematical physics, mechanics, and mathematical control theory.

Рассматриваются однопараметрические группы преобразований и даются их приложения к дифференциальным уравнениям. Цель работы – возбудить интерес читателей к теории непрерывных групп Софуса Ли, получившей в последние десятилетия широкое применение в математической физике, механике и математической теории управления.

ПРИЛОЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

К. Г. ГАРАЕВ

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

ВВЕДЕНИЕ

Создателем теории непрерывных групп преобразований является выдающийся норвежский математик Софус Ли. Одним из импульсов для ее создания явилась работа Эвариста Галуа, который дал полный ответ на вопрос о разрешимости алгебраического уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ в радикалах, то есть когда корни этого уравнения для произвольных значений коэффициентов a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n могут быть найдены при помощи арифметических действий и операции извлечения корня. Эта теория послужила Феликсу Клейну основой для разработки так называемой эрлангенской программы, согласно которой любая достаточно развитая математическая теория может быть изложена на языке инвариантов групп. Программа Клейна получила широкое распространение в механике и математической физике.

Методы теории групп Ли оказались плодотворными для отыскания решений дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующих различные процессы в аэрогазодинамике, теории упругости, теории относительности и других естественнонаучных дисциплинах. Это направление исследований, получившее название современного группового анализа, которое интенсивно было начато после работ Л.В. Овсянникова, позволило не только систематизировать ранее известные и разрозненные факты, но и получить новые результаты.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Определение группы

Рассмотрим однопараметрическое семейство преобразований T_a

$$x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, a), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

при помощи которого точка $x = (x^1, \ldots, x^n)$ евклидова пространства R^n переводится в точку $x' = (x'^1, \ldots, x'^n)$ того же пространства.

Сокращенно равенства (1) записывают в виде

$$x' = f(x, a) \quad \text{или} \quad x' = T_a x. \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) a – вещественный параметр, изменяющийся в некотором промежутке $\Delta \subset R$.

Говорят, что преобразования T_a определяют однопараметрическую группу G_1 непрерывных преобразований пространства R^n в себя, если выполнены три условия:

1) существует тождественное преобразованное T_{a_0}, то есть значение группового параметра $a = a_0$ такое, что для всех $x \in R^n$

$$x = f(x, a_0), \qquad a_0 \in \Delta;$$

2) любому преобразованию T_a ставится в соответствие обратное преобразование T_a^{-1}

$$x = f(x', a^{-1}), \qquad a^{-1} \in \Delta.$$

Это означает, что при любых a уравнения (1) разрешимы относительно x;

3) любые два последовательно выполненных преобразования T_a: $x' = f(x, a)$ и T_b: $x'' = f(x', b)$ равносильны третьему преобразованию T_c: $x'' = f(x, c)$, где $c = \varphi(a, b)$ – закон преобразования параметра. Символически это записывают в виде

$$T_b T_a = T_{\varphi(a,\, b)} \quad \text{(групповое свойство).}$$

Пример. Преобразование $x' = x + a$ образует однопараметрическую группу (переносов), так как:

1) тождественному преобразованию отвечает параметр группы $a = a_0 = 0$;

2) существует обратное преобразование $x = x' - a$ и, следовательно, $a^{-1} = -a$;

3) имеет место групповое свойство

$$x' = x + a, \qquad x'' = x' + b, \qquad x'' = x + (a + b),$$

$$\varphi(a, b) = a + b.$$

Замечание. Можно показать, что в общем случае групповое свойство выполняется не при всех $a, b \in \Delta$, а только для a, b из некоторого интервала $\Delta' \subset \Delta$, поэтому для преобразований (1) употребляется термин “локальная группа Ли”.

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ГРУППЫ

Преобразованиям (1) отвечает так называемый инфинитезимальный оператор (или генератор) группы

$$X = \xi^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2(x)\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + \xi^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}$$

или, короче,

$$X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Здесь и в дальнейшем примем соглашение о суммировании по повторяющимся верхним и нижним индексам.

Функции $\xi^i(x^1, \ldots, x^n)$ называются координатами оператора X и вычисляются по формулам

$$\xi^i(x) = \left.\frac{\partial f^i}{\partial a}\right|_{a = a_0}, \qquad (4)$$

где символ $\left.\right|_{a = a_0}$ означает, что частные производные от функций f^i по параметру a вычисляются при $a = a_0$.

Например, группе переносов $x' = x + a$ отвечает оператор $X = \frac{\partial}{\partial x}$.

Отметим, что по оператору (3) можно восстановить преобразования T_a группы G_1, решая уравнения Ли

$$\begin{aligned} \frac{dx'^1}{da} &= \xi^1(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n), \\ \frac{dx'^2}{da} &= \xi^2(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx'^n}{da} &= \xi^n(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n) \end{aligned} \qquad (5)$$

с начальными условиями

$$x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2,\ \ldots,\ x'^n = x^n \quad \text{при} \quad a = a_0$$

(не уменьшая общности рассуждений можно положить $a_0 = 0$).

Пример. Найти преобразования, порожденные оператором

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (6)$$

Уравнения (5) примут вид

$$\frac{dx'}{da} = y', \qquad \frac{dy'}{da} = -x'.$$

Нетрудно проверить, что решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $x' = x$, $y' = y$ при $a = 0$, имеет вид

$$x' = x\cos a + y\sin a, \qquad (7)$$

$$y' = y\cos a - x\sin a.$$

Преобразования (7) определяют так называемую группу вращений на плоскости.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ГРУППЫ

Говорят, что функция $I(x)$ является алгебраическим инвариантом группы G_1 с оператором X, если для всех допустимых x и a

$$I(x') = I(x). \qquad (8)$$

Для того чтобы функция $I(x)$ была инвариантом группы, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла линейному однородному уравнению в частных производных

$$XI \equiv \xi^1(x)\frac{\partial I}{\partial x^1} + \xi^2(x)\frac{\partial I}{\partial x^2} + \ldots + \xi^n(x)\frac{\partial I}{\partial x^n} = 0. \qquad (9)$$

Пример. Алгебраический инвариант $I(x, y)$ группы вращений с оператором (6) удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial I}{\partial x} - x\frac{\partial I}{\partial y} = 0. \qquad (10)$$

Легко проверить, что одним из его решений является функция $I = x^2 + y^2$; общее же решение дается формулой $I(x, y) = F(x^2 + y^2)$, что нетрудно установить путем подстановки функции F в уравнение (10). Используя непосредственно преобразования (7) можно показать, что $F(x'^2 + y'^2) = F(x^2 + y^2)$.

Продолжение группы

Разобьем все координаты в R^N на два сорта: независимые $x^1, \ldots, x^n$ и зависимые $u^1, \ldots, u^m$ переменные $(m + n = N)$. Преобразования T_a группы G_1 запишем в виде

$$\begin{gathered} x'^i = f^i(x, u, a), \qquad f^i|_{a=0} = x^i, \\ u'^k = g^k(x, u, a), \qquad g^k|_{a=0} = u^k, \\ i = 1, 2, \ldots, n; \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \qquad (11)$$

Введем новые переменные $P_i^k = \dfrac{\partial u^k}{\partial x^i}$ и рассмотрим пространство $R^{\tilde N}$, $\tilde N = N + mn$, в котором координатами точки являются x, u, p. Группе G_1 преобразований пространства R^N соответствует так называемая продолженная группа $\tilde G_1$ преобразований пространства $R^{\tilde N}$ с оператором

$$\tilde X = X + \zeta_i^k \frac{\partial}{\partial p_i^k}. \qquad (12)$$

Здесь

$$\begin{gathered} X = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k(x, u)\frac{\partial}{\partial u^k}, \\ \xi^i(x, u) = \frac{\partial f^i}{\partial a}\bigg|_{a=0}, \qquad \eta^k(x, u) = \frac{\partial g^k}{\partial a}\bigg|_{a=0}, \\ \zeta_i^k = D_i(\eta^k) - P_j^k D_i(\xi^j), \\ D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + P_i^k\frac{\partial}{\partial u^k}. \end{gathered} \qquad (13)$$

Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями

Говорят, что данное дифференциальное уравнение допускает непрерывную группу преобразований G_1 (уравнение инвариантно относительно группы), если под действием этих преобразований оно сохраняет свою форму. При этом оказывается, что под действием преобразований всякое решение уравнения переходит снова в решение этого же уравнения. Это позволяет по найденному частному решению находить новое, другими словами, знание такой группы позволяет размножать решения исследуемого уравнения.

Если дифференциальное уравнение допускает группу Ли, то говорят, что оно обладает групповым свойством.

Рассмотрим для простоты одно дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, u, p) = 0 \qquad (14)$$

относительно искомой функции $u = u(x^1, \ldots, x^n)$. Здесь через p обозначена совокупность частных производных: $p_i = \partial u/\partial x^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что если $i = 1$, то (14) — это обыкновенное дифференциальное уравнение; если $i > 1$, то (14) — это уравнение в частных производных.

Для того чтобы уравнение (14) допускало группу G_1 с оператором (3), необходимо и достаточно выполнение условия

$$\tilde X F|_{(14)} = 0. \qquad (15)$$

Здесь $\tilde X$ — оператор продолженной группы $\tilde G_1$, определяемый равенством (12). Равенство (15) представляет собой так называемое определяющее уравнение относительно координат оператора (3). При этом символ $|_{(14)}$ означает, что уравнение (15) рассматривается на решениях уравнения (14).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$F \equiv \frac{du}{dx} + u^2 - \frac{2}{x^2} = 0. \qquad (16)$$

Покажем, что это уравнение допускает группу преобразований T_a

$$x' = xe^a, \qquad u' = ue^{-a} \qquad (17)$$

с оператором

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (18)$$

Подвергая (16) преобразованиям (17), получим

$$e^{2a}\left(\frac{du'}{dx'} + u'^2 - \frac{2}{x'^2}\right) = 0, \qquad (19)$$

то есть преобразования (17) сохраняют форму уравнения (16).

Проверим теперь выполнение условия (15). Продолжая оператор (18) на производную $\frac{du}{dx} \equiv u_x$, имеем

$$\tilde{X} = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2u_x\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

Действуя этим оператором на левую часть уравнения (16), получим

$$x\frac{4}{x^3} - u \cdot 2u - 2u_x\big|_{(15)} = 0. \qquad (20)$$

В силу уравнения (16) $u_x = \frac{2}{x^2} - u^2$, поэтому равенство (20) превращается в тождество по переменным x и u:

$$\frac{4}{x^2} - 2u^2 - 2\left(\frac{2}{x^2} - u^2\right) = 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Предположим, что мы нашли группу, допускаемую интересующим нас дифференциальным уравнением. Спрашивается: что это дает с точки зрения его интегрирования, то есть отыскания его решения?

Если исходное дифференциальное уравнение обыкновенное, то это дает возможность понизить его порядок или даже проинтегрировать его до конца.

В некоторых случаях это позволяет свести так называемую краевую задачу (когда дополнительные условия к решению уравнения задаются на различных концах области интегрирования) к задаче Коши (когда эти условия задаются только на одном конце).

Если же задано дифференциальное уравнение в частных производных, то знание непрерывной группы преобразований позволяет редуцировать (свести) его к уравнению, содержащему меньшее число независимых переменных, нежели в исходном уравнении.

Кроме того, в некоторых случаях нелинейное уравнение, обладающее групповым свойством, можно линеаризовать, то есть привести к уравнению, в котором новая искомая функция и все ее производные будут содержаться только в первой степени.

Понижение порядка

Пример. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx} + b(x)u = 0. \qquad (21)$$

Легко проверяется, что это уравнение допускает группу G_1: $x' = x$, $u' = ue^a$ с оператором

$$X = u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Оператор продолженной группы G_1 имеет вид

$$\tilde{X} = u\frac{\partial}{\partial u} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

Инвариантом группы G_1 является функция $I_0 = x$, инвариант группы $\tilde{G}_1$ есть решение уравнения

$$u\frac{\partial I_1}{\partial u} + u_x\frac{\partial I_1}{\partial u_x} = 0,$$

откуда $I_1 = \frac{u_x}{u}$.

Будем искать решение уравнения (21) в виде $I_1 = I_1(I_0) = I_1(x)$. Тогда

$$u_x = I_1(x)u, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dI_1}{dx}u + I_1\frac{du}{dx}.$$

Исходное уравнение примет вид

$$\frac{dI_1}{dx} + I_1^2 + a(x)I_1 + b(x) = 0. \qquad (22)$$

Таким образом, порядок исходного уравнения понизился на единицу.

Отыскание интегрирующего множителя

Пример. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение в симметрической форме

$$F \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \qquad (23)$$

Если его левую часть можно представить в виде $d\psi(x, y) = 0$, то равенство $\psi(x, y) = \text{const}$ есть общее решение уравнения (23); если этого не удается сделать, то, домножая уравнение на функцию $\mu(x, y)$ (интегрирующий множитель), можно записать $\mu F = d\psi$ и снова найти общее решение. Проблема в том, чтобы найти эту функцию. Софус Ли показал, что если уравнение (23) инвариантно относительно G_1 с оператором

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

то интегрирующий множитель определяется немедленно:

$$\mu = \frac{1}{\xi P - \eta Q}. \qquad (24)$$

Сведение краевой задачи к задаче Коши

Пример. Уравнение пограничного слоя несжимаемой жидкости на полубесконечной пластине имеет вид

$$\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{1}{2}u\frac{d^2u}{dx^2} = 0. \tag{25}$$

Граничные условия

$$u(0) = 0, \qquad \frac{du(0)}{dx} = 0, \qquad \frac{du(\infty)}{dx} = 1. \tag{26}$$

Видно, что два условия заданы на обтекаемой пластине и одно условие на бесконечности. Решение такой задачи представляет большие трудности. Если бы была известна производная $\frac{d^2u(0)}{dx^2}$, то мы имели бы дело с задачей Коши, для которой существуют стандартные машинные программы.

Покажем, как, используя групповое свойство уравнения (25), можно свести эту краевую задачу к задаче Коши (причем за одну итерацию). Будем искать лиевы преобразования в виде

$$u' = e^{\alpha}u, \qquad x' = e^{\beta}x. \tag{27}$$

Подвергая (25) преобразованиям (27), получим

$$e^{-\alpha+3\beta}\frac{d^3u'}{dx'^3} + \frac{e^{-2\alpha+2\beta}}{2}u'\frac{d^2u'}{dx'^2} = 0. \tag{28}$$

Так как уравнение не должно изменяться в результате применения этих преобразований, то отсюда следует

$$-\alpha + 3\beta = -2\alpha + 2\beta \Rightarrow \alpha = -\beta.$$

Преобразования (27) примут вид

$$u' = e^{-\beta}u, \qquad x' = e^{\beta}x. \tag{29}$$

Пусть $u = u_0(x)$ является решением уравнения (25) и удовлетворяет условиям Коши

$$u_0 = 0, \qquad \frac{du_0}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2u_0}{dx^2} = 1 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{30}$$

Решая эту задачу с помощью ЭВМ, обнаружили, что $u_0(x)$ является монотонно возрастающей при всех $x \geq 0$ функцией, при этом $\frac{du_0}{dx} \longrightarrow c = 2{,}0852$ при $x \longrightarrow \infty$. Согласно Ли, функция $u' = u_0(x')$ также является решением уравнения (25); с учетом (29) имеем $e^{-\beta}u = u_0(e^{\beta}x)$, откуда

$$u(x) = e^{\beta}u_0(e^{\beta}x). \tag{31}$$

Таким образом, зная $u_0(x)$, мы одновременно имеем однопараметрическое семейство решений (31), зависящее от группового параметра β.

Нетрудно проверить, что $u(x)$ удовлетворяет первому и второму условиям из (26); выберем β так, чтобы выполнялось и третье условие:

$$e^{2\beta}\frac{du_0(\infty)}{dx} = 1,$$

откуда

$$\beta = -\frac{1}{2}\ln\frac{du_0(\infty)}{dx}.$$

Тогда производная $\frac{d^2u(0)}{dx^2}$ становится известной величиной:

$$\frac{d^2u(0)}{dx^2} = e^{3\beta}\frac{d^2u_0(0)}{dx^2} = e^{3\beta} = \left(\frac{du_0(\infty)}{dx}\right)^{-3/2}$$

и решение исходной краевой задачи сводится к интегрированию уравнения (25) с начальными условиями

$$u = \frac{du}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = c^{-3/2} = 0{,}3321 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Редукция уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению

Пример. Уравнение распространения тепла в тонком однородном стержне имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{32}$$

где K^2 – коэффициент, характеризующий теплофизические свойства материала стержня.

Нетрудно проверить, что уравнение (32) допускает группу G_1:

$$t' = e^{a}t, \qquad x' = e^{a/2}x, \qquad u' = u$$

с оператором

$$X = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Эта группа имеет два алгебраических инварианта:

$$I_0 = xt^{-1/2}, \qquad I_1 = u.$$

Относительно инвариантов уравнение (32) запишется в виде

$$\frac{d^2I_1}{dI_0^2} + \frac{K^2}{2}I_0\frac{dI_1}{dI_0} = 0. \tag{33}$$

Таким образом, исходное уравнение в частных производных свелось (редуцировалось) к обыкновенному дифференциальному уравнению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Даже простейшие примеры, приведенные в этой статье, демонстрируют богатые возможности, которые открывает перед исследователями теория групповых свойств дифференциальных уравнений. Эти возможности значительно расширяются, если использовать многопараметрические группы Ли, бесконечномерные группы, группы Ли–Беклунда.

Еще более увлекательным представляется автору применение теории групп Ли и тесно связанной с ней теории инвариантных вариационных задач знаменитого немецкого математика Эмми Нётер к математической теории управления. Но об этом в следующий раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических методов (эрлангенская программа). Казань: Изд-во Казан. имп. ун-та, 1896. 44 с.

2. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 240 с.

3. *Полищук Е.М.* Софус Ли. Л.: Наука, 1983. 214 с.

4. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа // Новое в жизни, науке и технике. Математика, кибернетика. М.: Знание, 1989. № 8. 48 с.

5. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.

6. *Гараев К.Г.* Группы Ли и теория Нётер в проблеме управления с приложениями к оптимальным задачам пограничного слоя. Казань: Изд-во КГТУ, 1994. 240 с.

* * *

Кавас Гараевич Гараев, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой специальной математики Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. Области научных интересов – современный групповой анализ, вариационное исчисление и математическая теория управления, механика жидкости и газа. Автор и соавтор 120 учебно-методических и научных работ, среди которых монография и три книги по математике для поступающих в высшие учебные заведения.