BOUNDARIES OF WAVE MECHANICS

E. M. GROMOV

The boundaries of a wave mechanics, determining wave packet propagation in an nonhomogeneous medium with particle motion in a potential field, are analyzed. Disruption of the mechanical analogy for sufficiently short intense wave packets is shown.

Анализируются границы волновой механики, устанавливающей аналогию распространения волнового пакета в неоднородной среде с движением частицы в потенциальном поле. Показано нарушение механической аналогии для достаточно коротких и интенсивных импульсов.

ГРАНИЦЫ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ

Е. М. ГРОМОВ

Нижегородский государственный технический университет

ВВЕДЕНИЕ

Волновая механика устанавливает аналогию распространения волнового импульса в неоднородной среде с движением частицы в потенциальном поле. Впервые подобная аналогия была открыта для света в оптически неоднородной среде [1] и получила название оптико-механической [2]. В дальнейшем аналогия распространения волн в неоднородной среде с движением частиц в потенциальном поле была подтверждена для волн различной (не только электромагнитной) природы, что послужило основанием возникновения термина “волновая механика”. Здесь можно привести примеры распространения и волн на поверхности воды в присутствии неоднородного течения, и волн электронной плотности (ленгмюровских волн) в плазме с переменной плотностью и т.д. При разработке основ квантовой механики и квантовой теории поля принцип соответствия волн и частиц был одним из фундаментальных – он известен как корпускулярно-волновой дуализм.

В настоящее время волновая механика играет существенную роль в технике при разработке и создании многочисленных приборов, использующих как частицеподобные свойства волн, так и волновые свойства частиц.

И если в соответствии с данным принципом всякой частице (будь то электрон, нейтрон или фотон) можно поставить в соответствие некоторое волновое поле, то обратное соответствие удается провести далеко не во всех случаях. Учитывая фундаментальную роль, которую играет волновая механика в нашей жизни, выяснение условий, при которых возможно сопоставление волнового поля с эффективной частицей, является важной задачей. Этому вопросу и посвящена данная статья.

Начнем же мы с выяснения простого вопроса: что же такое волновое движение?

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Волновые процессы окружают нас всюду. Можно сказать, что мы сами погружены в них и порой являемся частью этих процессов. Что же такое волновое движение? Обратимся к ансамблю частиц, связанных между собой некоторыми силами, например электрическими, как это имеет место в ионизованном газе (плазме) и твердых телах, или силами упругости, как это имеет место в воздухе.

Вызвав колебания частиц внешним полем в одной точке среды, эти силы приведут в движение, но с некоторым запаздыванием частицы в соседних с ней точках. Перенос колебаний из одной точки в другую называют волновым движением (волной). Если мы в некоторой точке несильно качнем частицы, так что можно пренебречь изменением средних параметров среды (в плазме это концентрация заряженных частиц, в жидкости это средние течения), то колебания частиц в соседних точках повторят колебания в исходной точке. В случае одномерных сред, параметры которых зависят лишь от одной координаты (например, для цепочки маятников, соединенных пружинками), распространение волнового возмущения к соседним точкам без искажения своей формы можно представить в виде $f(x - Vt)$, где V – скорость его распространения. Для сред, имеющих границу, длительное раскачивание ее крайних частиц с некоторой частотой ω_0 может вызвать волновое возмущение в виде гармонической волны $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$, где k_0 – так называемое волновое число, связанное с расстоянием между двумя соседними максимумами λ_0 (называемым длиной волны) соотношением $k_0 = 2\pi/\lambda_0$. Скорость перемещения в пространстве максимумов гармонической волны $V = \omega_0/k_0$ называется ее фазовой скоростью.

Если гармонические волны различной частоты обладают в среде различными фазовыми скоростями (то есть $V'_\omega \neq 0$ или, что то же самое, $V'_k \neq 0$), говорят, что среда обладает дисперсией (диспергирующая среда). Штрих здесь и далее по всей статье обозначает производную по переменной, стоящей в нижнем индексе.

При значительных амплитудах волновых полей меняются и средние характеристики среды. В этом случае мы имеем дело с нелинейной средой. Изменение параметров среды под действием гармонического поля $\psi\exp(i\omega_0 t - ik_0 x)$ приводит к изменению скорости самой волны и в большинстве случаев зависит от ее интенсивности $I = |\psi|^2$: $V = V(|\psi|^2)$.

Если равновесные значения параметров среды меняются от точки к точке $U = U(x)$, то такие среды естественно назвать неоднородными. Скорость распространения гармонических волн в таких средах также будет зависеть от координаты через этот параметр $V = V(U(x))$.

В большинстве случаев мы имеем дело со средами, в которых проявляются одновременно все три перечисленных выше качества (дисперсия, нелинейность и неоднородность), скорость волны в которых, равно как и частота, будет зависеть от всех трех параметров:

$$\omega = \omega(k, |\psi|^2, U(x)). \qquad (1)$$

Записанное в явном виде для конкретной системы соотношение вида (1) называют нелинейным дисперсионным соотношением, и оно играет ключевую роль в анализе гармонических волновых процессов. Однако в окружающем нас мире мы имеем дело далеко не с бесконечными гармониками, а с ограниченными во времени и пространстве волновыми пакетами (цугами волн).

ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ

Волновой пакет может быть сформирован набором гармонических волн с частотами, близкими к некоторой средней частоте. Аналитически волновой пакет может быть описан функцией $\psi(x, t) \times \exp(i\omega_0 t - ik_0 x)$, содержащей медленно меняющуюся на масштабе длины волны и на временном периоде огибающую пакета $\psi(x, t)$ и быстро осциллирующее во времени и пространстве высокочастотное заполнение (рис. 1). Это значит, что при распространении такого цуга в нелинейной диспергирующей неоднородной среде мы обязаны анализировать поведение сразу многих гармонических волн, взаимодействующих еще и между собой. И чем короче цуг, тем все большее число гармонических волн, все дальше отстоящих от центральной частоты, необходимо учитывать. Эта сложная математическая проблема занимает умы физиков и математиков вот уже несколько десятилетий, что вызвано не только абстрактным интересом, но и многочисленными и разнообразными приложениями, выходящими на решение этой проблемы: это и распространение электромагнитных и ленгмюровских волн в плазме, применяемой в качестве элемента антенн; и распространение оптических импульсов в волоконно-оптических линиях связи, которые приходят на смену традиционным телефонным линиям; и

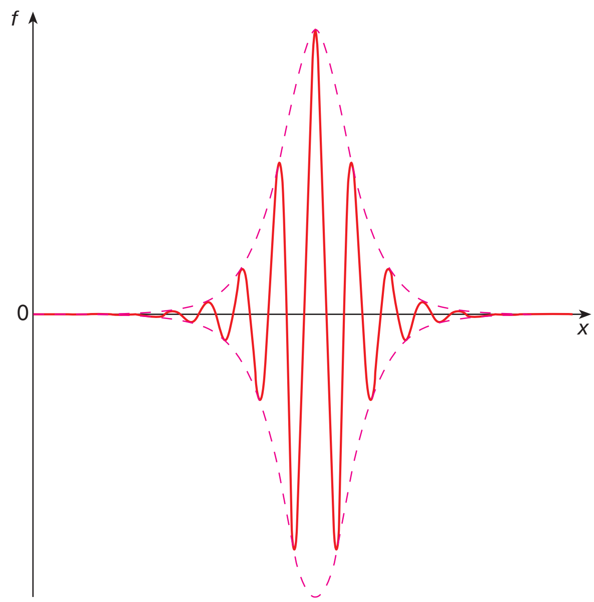

Рис. 1. Волновой пакет. Штриховая линия – его огибающая

распространение импульсов по нейроволокнам; и древняя как мир, однако до конца не решенная задача распространения волн на поверхностности воды и т.д.

Если протяженность цуга волн велика, так что в нем укладывается большое число периодов гармонических волн (это соответствует достаточно узкому временному и пространственному спектрам пакета: $\Delta\omega \ll \omega_0$, $\Delta k \ll k_0$), а интенсивность пакета $|\psi|^2$ и неоднородный потенциал U являются малыми величинами, то в нелинейном дисперсионном соотношении (1) есть несколько малых параметров: один отвечает относительно малой ширине спектра пакета $\nu_1 \sim \Delta k/k_0 \ll 1$, второй – малой интенсивности пакета $\nu_2 \sim |\psi|^2$, третий – малой величине неоднородного потенциала $\nu_3 \sim U \ll 1$. Очевидно, что в зависимости от их соотношения разложение нелинейного дисперсионного соотношения (1) по этим параметрам может принимать различный вид и описывать соответственно различные режимы распространения нелинейного пакета волн в неоднородной диспергирующей среде. Здесь мы ограничимся рассмотрением пакетов волн, для которых квадрат относительной ширины пространственного спектра ν_1^2, интенсивность пакета ν_2 и неоднородный потенциал ν_3 являются малыми величинами одного порядка:

$$\nu^2 \sim \left(\frac{\Delta k}{k_0}\right)^2 \sim |\psi|^2 \sim U \ll 1.$$

ПРОТЯЖЕННЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ (ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА)

Для достаточно протяженных пакетов волн и при их малой амплитуде в нелинейном дисперсионном соотношении (1) обычно ограничиваются разложением в ряд в окрестности центральной частоты до членов второго порядка малости по параметру ν, отвечающим разложению до $(k - k_0)^2$, $|\psi|^2$ и $U(x)$:

$$\omega - \omega_0 = \\ = \omega'_k(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''_{kk}(k - k_0)^2 + \omega'_I|\psi|^2 + \omega'_U U(x). \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части является членом первого порядка по ν. Величину ω'_k в этом соотношении, отвечающую скорости распространения пакета волн, называют линейной групповой скоростью. Остальные слагаемые в правой части (2) – члены второго порядка малости по ν. Величину ω''_{kk}, отвечающую зависимости скорости распространения волн от волнового числа, называют параметром линейной дисперсии, величину ω'_I – параметром нелинейности, а ω'_U – параметром неоднородности. Такое приближение называют параболическим, так как оно отвечает параболической зависимости частоты гармонических волн от волнового числа (рис. 2). Непосредственно из параболического разложения (2) с помощью несложных операторных преобразований получают уравнение для медленной огибающей пакета ψ, широко известное у физиков и математиков как нелинейное уравнение Шрёдингера:

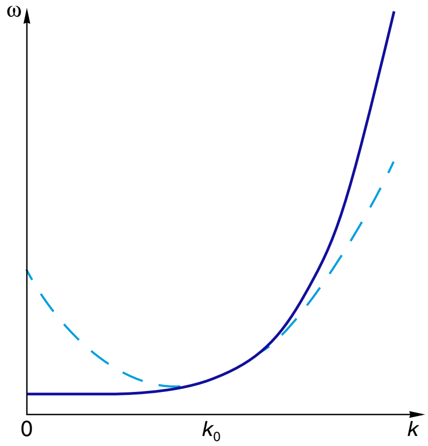

Рис. 2. Традиционная аппроксимация линейного дисперсионного соотношения квадратичной параболой (штриховая линия) в окрестности центральной частоты для протяженных цугов волн

$$2i(\psi'_t + \omega'_k\psi'_x) - \omega''_{kk}\psi''_{xx} + 2\omega'_I|\psi|^2\psi + 2\omega'_U U\psi = 0. \quad (3)$$

Это уравнение к настоящему времени изучено довольно подробно с помощью как точных аналитических, так и приближенных асимптотических методов. Мы ограничимся анализом эволюции центра масс пакета, определяемого традиционно первым моментом:

$$\bar{x} = \frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi|^2 dx, \qquad N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx.$$

Уравнение движения центра масс волнового пакета из уравнения (3) описывается соотношением

$$\ddot{\bar{x}} = -\frac{\omega''_{kk}\omega'_U}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty} U'_x|\psi|^2 dx, \quad (4)$$

где две точки обозначают вторую производную по времени. Уравнение движения пакета волн (4) напоминает уравнение движения материальной точки в потенциальном поле. Действительно, при достаточно плавном изменении потенциала на масштабе волнового пакета функцию производной потенциала в (4) можно вынести из-под знака интеграла со значением в точке центра масс. В этом случае мы приходим к удивительному результату: уравнение движения нелинейного пакета волн в плавно неоднородной диспергирующей среде аналогично уравнению движения материальной частицы в потенциальном поле:

$$\ddot{\bar{x}} = -\omega''_{kk}\omega'_U(U'_x)_{\overline{x(t)}}.$$

Если принять, что величина U играет роль потенциала силы $F = -(U'_x)_{\overline{x(t)}}$, действующей на некоторую эффективную частицу, то "массой" этой частицы в данном соотношении будет величина, обратная произведению линейной дисперсии гармонических волн и параметра неоднородности $m = 1/(\omega''_{kk}\omega'_U)$. Подобная аналогия позволяет нам перенести хорошо известные результаты механики на движение протяженных волновых пакетов: ускорение таких пакетов не зависит от их протяженности, интенсивности и фазовой модуляции, а определяется лишь неоднородностью среды. Отсюда с очевидностью следует, что в однородной среде протяженные волновые импульсы движутся без ускорения.

Все эти результаты по протяженным волновым пакетам широко известны и стали уже классическими. Однако в некоторых прикладных задачах существует необходимость работы не с протяженными, а с короткими волновыми цугами, составляющими несколько длин волн. В первую очередь это относится к распространению импульсов в волоконно-оптических линиях связи. Для данных линий существует проблема увеличения их информационной емкости, непосредственно связанная с длительностью базовых оптических импульсов, используемых для передачи информации: чем короче базовый импульс, тем бóльшее число этих импульсов можно передать за единицу времени без опасения их перекрытия, и, значит, тем бóльший объем информации можно передать без ее искажения за единицу времени.

КОРОТКИЕ ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ

Для достаточно коротких волновых пакетов ширина временного и пространственного спектров не мала и параболическое приближение (2) уже несправедливо. В разложении нелинейного дисперсионного соотношения (1) необходимо учитывать члены более высокого порядка малости (третьего и выше) по параметру ν. Так, ограничиваясь членами третьего порядка по ν, для однородной среды ($U = 0$) получим из (1)

$$\omega - \omega_0 - \omega'_k(k-k_0) - \frac{1}{2}\omega''_{kk}(k-k_0)^2 - \omega'_I|\psi|^2 =$$
$$= \omega''_{kI}|\psi|^2(k-k_0) + \frac{1}{6}\omega'''_{kkk}(k-k_0)^3. \quad (5)$$

В правой части собраны члены третьего порядка малости по ν. Первое слагаемое отвечает зависимости скорости распространения гармонических волн от их интенсивности (нелинейная дисперсия). Второе слагаемое обусловлено отклонением дисперсионной кривой (1) в окрестности центральной частоты от параболы, и его называют аберрационным (отклоняющим). Для линейных однородных сред данное разложение отвечает аппроксимации дисперсионной кривой в окрестности центральной частоты кубичной параболой (рис. 3). В этом случае уравнение движения центра масс волнового пакета малой протяженности в однородной среде следующее:

$$\ddot{\bar{x}} = -\frac{(\omega'_I\omega'''_{kkk} - \omega''_{kk}\beta)}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi''_{xx}|\psi|^4 dx, \quad (6)$$

где φ — фаза огибающей пакета $\psi = |\psi|\exp(i\varphi)$, β — параметр нелинейной дисперсии, зависящий от величины ω''_{kI}. Видно, что ускорение пакета волн зависит от его интенсивности и может быть отлично от нуля при ненулевом коэффициенте в круглых скобках перед интегралом и при отклонении фазовой модуляции от линейной. Здесь придирчивый читатель может заметить, что если фазовую модуляцию пакета, во всяком случае в начальный момент времени, можно задать любой по нашему желанию, то величина коэффициента перед интегралом определяется свойствами среды. Ответить на это замечание можно только рассмотрев конкретную среду, в которой распространяется волновой импульс.

КОРОТКИЕ ПАКЕТЫ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Таким примером для нас будут высокочастотные (электромагнитные и ленгмюровские) волны в изотропной однородной неизотермической плазме с нелокальной и нестационарной нелинейностью звукового (стрикционного) типа. Напомним, что изотропными называют среды, свойства которых не зависят от направления. Плазму называют неизотермической, если температуры электронов и ионов

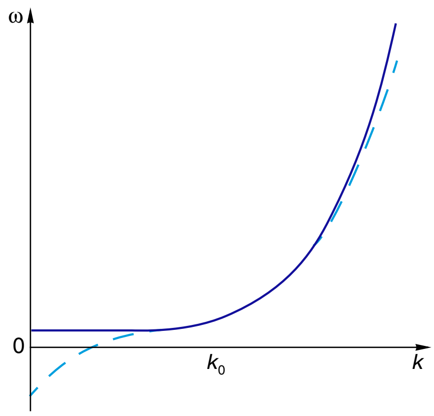

Рис. 3. Аппроксимация линейного дисперсионного соотношения кубичной параболой (штриховая кривая) в окрестности центральной частоты для коротких цугов волн

не совпадают. Ускорение для коротких цугов высокочастотных волн в однородной плазме составит

$$\ddot{x} \sim k_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi''_{xx} |\psi|^4 dx.$$

Как видим, при фазовой модуляции, более сложной, чем линейная, возникает ускорение волнового пакета. Так, при параболической фазовой модуляции пакета в начальный момент времени $\varphi \sim \varepsilon x^2$ ускорение пакета в этот момент описывается довольно простым соотношением $\ddot{x} \sim \varepsilon k_0 \psi_0^2$.

В статье мы попытались проанализировать нелинейную динамику нестационарных коротких волновых импульсов в нелинейных средах. Более подробно этот вопрос рассмотрен в [3]. Однако не меньший, а возможно, и больший интерес представляют стационарные нелинейные волны, и в частности короткие солитоны волнового поля. Об этом пойдет речь в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гамильтон У.* Избранные труды. М.: Наука, 1994. 560 с. (Классики науки).

2. *Трифонов Е.Д.* Оптико-механическая аналогия в изложении для школьников // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 10. С. 133–137.

3. *Громов Е.М., Таланов В.И.* Нелинейная динамика коротких цугов волн в диспергирующих средах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1996. Т. 110, вып. 1(7). С. 137–149.

* * *

Евгений Михайлович Громов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета, ведущий научный сотрудник Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – теория нелинейных волн в средах различной природы: плазме, волоконно-оптических линиях связи, на поверхности воды. Автор около 70 научных статей.