POWER SERIES AND THEIR APPLICATIONS

V. V. SIL'VESTROV

The fundamental properties of power series are presented. Specific examples of the power series method as applied to the solution of different type of problems are considered.

Приводятся основные свойства степенных рядов. На конкретных примерах раскрывается суть метода степенных рядов применительно к решению задач разных типов.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В. В. СИЛЬВЕСТРОВ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

Степенные ряды благодаря их простоте и замечательным свойствам нашли применение практически во всех разделах математики, физики и других наук. Рассматриваемые как предел многочленов при стремлении их степеней к бесконечности, они обладают почти всеми свойствами многочленов с той разницей, что для многих рядов эти свойства выполняются не для всех значений аргумента, а лишь для некоторого ограниченного множества значений.

В статье приводятся основные свойства степенных рядов и на конкретных примерах раскрываются возможности и особенности использования степенных рядов для решения тех или иных задач.

СТЕПЕННОЙ РЯД И ЕГО СВОЙСТВА

Степенным рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (1)$$

рассматриваемое как предел последовательности многочленов

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x-x_0)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

где a_0, a_1, ... – постоянные числа, называемые коэффициентами ряда. Числа a_0, a_1, ..., x_0 и переменная x могут быть как действительными, так и комплексными. Заменой $x - x_0 = y$ ряд (1) приводится к ряду чисто по степеням y, поэтому без ограничения общности можно считать $x_0 = 0$, что и будем предполагать в дальнейшем. Кроме того, будем рассматривать только действительные ряды, то есть когда коэффициенты и переменная суть действительные числа, хотя все приводимые ниже свойства справедливы и для комплексных рядов.

Если для некоторого значения переменной x числовая последовательность $P_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеет конечный предел, то значение этого предела называется суммой ряда (1), сам ряд называется сходящимся в точке x, а множество $X = \{x\}$ всех таких x называется областью сходимости ряда. Пусть

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = S(x), \qquad x \in X.$$

Тогда пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = S(x), \qquad x \in X. \tag{3}$$

Для каждого степенного ряда (3) найдется такое число $0 \le R \le +\infty$, что в интервале $(-R, R)$ ряд сходится; на лучах $(-\infty, -R)$, $(R, +\infty)$ ряд расходится (то есть последовательность (2) не имеет конечного предела); в точках $x = R$, $x = -R$ ряд либо сходится, либо расходится, либо в одной точке сходится, а в другой расходится. При этом в случае $R = 0$ надо считать $(-R, R) = \{0\}$, а в случае $R = +\infty$ считать $(-\infty, -R) = \phi$, $(R, +\infty) = \phi$. Таким образом, область сходимости ряда (3) есть интервал $(-R, R)$ с присоединенными концами или нет в зависимости от случая. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ – интервалом сходимости. Имеются разные формулы, позволяющие находить R через коэффициенты ряда.

Степенные ряды складываются, вычитаются, умножаются, в том числе возводятся в квадрат, куб и другие степени так же, как многочлены, путем приведения подобных членов. При этом, как и многочлены, два степенных ряда совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Деление степенных рядов друг на друга также можно выполнять уголком, как деление многочленов. Однако удобнее найти частное

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots} = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

методом неопределенных коэффициентов: умножая ряд в знаменателе на ряд в правой части равенства и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x у полученного ряда и ряда в числителе. В результате получится бесконечное множество уравнений

$$\begin{aligned}
&b_0 c_0 = a_0,\\
&b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_{n-1} c_1 + b_n c_0 = a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

откуда при $b_0 \ne 0$ неизвестные коэффициенты c_0, c_1, ... находятся последовательно друг за другом. Заметим, что частное двух многочленов является, вообще говоря, уже не многочленом, а рядом. Например,

$$\frac{1 + 3x + x^2}{2 - x} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{4}x + \frac{11}{2^3}x^2 + \frac{11}{2^4}x^3 + \ldots + \frac{11}{2^{n+1}}x^n + \ldots \tag{4}$$

При решении некоторых задач в один степенной ряд вместо переменной приходится ставить другой степенной ряд. В результате после возведения внутренних рядов в степени и объединения подобных членов получится новый степенной ряд, коэффициенты которого выражаются через коэффициенты исходных рядов.

В области сходимости сумма $S(x)$ степенного ряда (3) является непрерывной функцией и, более того, имеет производные всех порядков, которые можно найти почленным дифференцированием, то есть

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots,$$

$$S''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \ldots$$

и т.д. Также интеграл от $S(x)$ в области сходимости ряда можно найти почленным интегрированием:

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Все описанные выше операции над степенными рядами имеют место в некоторой окрестности точки $x = 0$, размеры которой зависят от коэффициентов исходных рядов. Например, равенство (4) имеет место при $|x| < 2$.

Рассмотрим комплексный степенной ряд

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

($A_k = a_k + ib_k$ – комплексные числа) на окружности $|z| = 1$. Точки этой окружности имеют вид $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Тогда $z^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$, и ряд имеет вид

$$F(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) +$$

$$+ i\left[b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos k\varphi + a_k \sin k\varphi)\right],$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Следовательно, действительная и мнимая части комплексного степенного ряда на окружности представляют собой тригонометрические ряды Фурье, с которыми читатель уже познакомился по статье [1]. Данное свойство широко используется для решения с помощью степенных рядов (комплексных) многих задач математической физики, например задач распространения тепла в круге, обтекания кругового цилиндра жидкостью, равновесия упругого кругового цилиндра, изгиба круглой пластинки и др.

ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Применение степенных рядов для решения различных задач основано на возможности представления многих функций, в частности всех элементарных функций, в виде сумм степенных рядов, называемых рядами Тейлора. Простейшим примером ряда Тейлора служит разложение функции $1/(1-x)$ при $|x| < 1$ в бесконечно убывающий геометрический ряд:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Ряд в правой части равенства (4) также представляет собой ряд Тейлора соответствующей функции. Для многих функций их разложения в ряд Тейлора можно найти в учебниках и справочниках по математике. С помощью этих разложений можно с любой точностью вычислить значения различных функций, интегралов, чисел e, π и др., найти пределы и т.д. Именно на них основаны все вычисления с элементарными и специальными функциями, производимые компьютерами.

В качестве примера, используя разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

вычислим значение e^x при $x = 1$, то есть число

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \ldots = $$
$$= 2{,}71828\ldots$$

Невыписанные члены ряда $\frac{1}{10!}, \frac{1}{11!}, \frac{1}{12!}, \ldots$ в сумме не превосходят суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{10!}$ и со знаменателем $\frac{1}{10}$, то есть значения

$$\frac{1}{10!} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{1}{9! \cdot 9} < 0{,}0000003.$$

Используя разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad (5)$$

вычислим интегральный синус:

$$\mathrm{Si}\, x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots\right) dt =$$
$$= x - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

В частности, при $x = \pi$ отсюда находим

$$\mathrm{Si}\, \pi = \pi - \frac{1}{18}\pi^3 + \frac{1}{600}\pi^5 - \frac{1}{35\,280}\pi^7 + \ldots \approx 1{,}851.$$

Аналогично путем разложения подынтегральной функции в степенной ряд и его почленного интегрирования находятся и другие интегралы.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Многие уравнения и системы уравнений с двумя и более переменными, некоторые из которых надо найти через остальные, можно решать с помощью степенных рядов. Для этого заданные функции, через которые записано уравнение, надо разложить в степенные ряды и искать неизвестные в виде рядов. После этого для нахождения неизвестных коэффициентов рядов будут получены новые уравнения, решения которых во многих случаях находятся без особых затруднений. Полученные таким образом решения исходного уравнения вполне пригодны как для вычислений, так и для других операций.

Продемонстрируем описанный метод на примере уравнения Кеплера

$$y = a + x\sin y,$$

играющего важную роль в астрономии. Здесь y – эксцентрическая аномалия планеты, a – ее средняя аномалия, x – эксцентриситет орбиты планеты. Считая y неизвестной функцией от x, будем искать ее в виде

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots \qquad (6)$$

Разложив $\sin y$ по формуле (5) в ряд Тейлора по степеням y и подставив вместо y ряд (6), после возведения этого ряда в степени и приведения подобных членов получим

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = a + x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) -$$
$$- \frac{x}{3!}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)^3 + \ldots$$

Из этого равенства, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, найдем последовательно неизвестные

$$c_0 = a,$$
$$c_1 = c_0 - \frac{c_0^3}{3!} + \frac{c_0^5}{5!} - \ldots = \sin c_0 = \sin a,$$
$$c_2 = c_1 - \frac{3}{3!} c_0^2 c_1 + \frac{5}{5!} c_0^4 c_1 - \ldots =$$
$$= c_1 \left(1 - \frac{c_0^2}{2!} + \frac{c_0^4}{4!} - \ldots\right) = \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a, \ldots$$

и саму функцию

$$y = a + (\sin a)x + \frac{1}{2}(\sin 2a)x^2 + \frac{1}{2}(2\sin a - 3\sin^2 a)x^3 + \ldots$$

Доказано, что это разложение верно при $|x| < 0{,}6627\ldots$

Если уравнение Кеплера записать в виде $y = x + b\sin y$ и снова считать y неизвестной функцией от

x, то при $b \neq 1$, выполнив аналогичные действия, получим

$$y = \frac{1}{1-b}x - \frac{b}{3!(1-b)^4}x^3 + \frac{b+9b^2}{5!(1-b)^7}x^5 - \ldots$$

Рекомендуем читателю проделать соответствующие действия.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Особенно часто и эффективно степенные ряды используются для точного и приближенного решения дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными. Не вдаваясь в сложные теоретические обоснования, рассмотрим дифференциальное уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \qquad (7)$$

где n – постоянная (необязательно целая), x – независимая переменная, а $y = y(x)$ – искомая функция. Решения этого уравнения, называемые функциями Бесселя, нашли применение практически во всех областях современного естествознания.

Будем искать y в виде обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p},$$

где p, a_k – неизвестные постоянные, причем $a_0 \neq 0$. Дифференцируя этот ряд дважды под знаком суммы, подставим выражения функции y и ее производных y', y'' в уравнение (7). Затем сделаем приведение подобных членов, и коэффициенты полученного ряда приравняем нулю. После этого получим бесконечную систему уравнений

$$a_0(p^2 - n^2) = 0,$$

$$a_1[(p+1)^2 - n^2] = 0,$$

$$a_k[(p+k)^2 - n^2] + a_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

откуда находим

$$p = \pm n, \qquad a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0,$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

В случае нецелого n функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующие значениям $p = n$ и $p = -n$, являются линейно-независимыми и любое другое решение дифференциального уравнения (7) имеет вид $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, где c_1, c_2 – постоянные. В случае целого n эти функции отличаются друг от друга только постоянным множителем, поэтому определяют лишь одно из двух линейно-независимых решений дифференциального уравнения.

Предлагаем читателю найти методом степенных рядов решения дифференциальных уравнений

1) $y'' = xy$,

2) $xy'' + (3 + x^2)y' + 30y = 6x^4 + 58x^3 - 8x + 30$,

удовлетворяющие условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(Ответы:

1) $y = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 + \ldots$

$$\ldots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \ldots,$$

2) $y = 1 - x^2 + 2x^3$.)

Приведенные в статье примеры отражают лишь малую часть всевозможных типов задач, решения которых выгодно и удобно находить методом степенных рядов. Множество таких задач практически неисчерпаемо.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишик М.И.* Тригонометрические ряды // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 1. С. 122–127.
2. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. М.: Наука, 1986. 408 с.
3. *Маркушевич А.И.* Ряды: Элементарный очерк. М.: Наука, 1979. 191 с.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 2. 800 с.
5. *Эльсгольц Л.И.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

* * *

Василий Васильевич Сильвестров, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова. Область научных интересов – приложения теории функций комплексного переменного в механике. Автор и соавтор более 60 научных статей и двух учебных пособий.