

WHAT CALCULUS OF VARIATIONS IS

A. O. VATULYAN

Initial findings about calculus of variations problems are described. The concept of a functional is given and its connection with the functions of many variables is discussed. The conception of first and second variation of a functional is introduced. On the ground of a concept of a distance between functions the concept of high and low extremum is assigned. The interplay of this branch of mathematics with the other sciences is discussed as well.

Даются первоначальные сведения о задачах вариационного исчисления. Приводится понятие функционала, обсуждается его связь с функцией многих переменных. Вводится понятие первой и второй вариаций функционала. На основе понятия расстояния между функциями определяется понятие сильного и слабого экстремумов. Обсуждается связь вариационного исчисления с другими разделами математики.

© Ватульян А.О., 1998

ЧТО ТАКОЕ
ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

А. О. ВАТУЛЬЯН

Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону

ВВЕДЕНИЕ

Всю историю своего существования мыслящий человек занимается оптимизацией, то есть находит минимальное или максимальное значение какой-то величины: площади земельного участка, прибыли (максимум), энергии, денежных затрат, пути (минимум). В некоторых проблемах такого сорта для решения задачи оптимизации достаточно исследовать на экстремум некоторую функцию. Известно, что в той точке x_0 , где гладкая функция имеет экстремум, ее производная обращается в нуль, то есть $y'|_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$.

Наряду с задачами, в которых требуется определить максимальное или минимальное значение некоторой функции $y = f(x)$, в математике при моделировании разнообразных проблем приходится определять максимальное и минимальное значения более сложных математических объектов, называемых функционалами.

Функционалом является длина плоской кривой, соединяющей две заданные точки на плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ (рис. 1). Если уравнение кривой задано уравнением $y = y(x)$, то функционал длины дуги может быть найден по формуле

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Многие характеристики твердых тел, такие, как моменты инерции, координаты центра тяжести некоторой однородной кривой или поверхности, также являются функционалами, поскольку их значения определяются выбором кривой или поверхности; функционалом является кинетическая энергия материального тела. Многие законы механики, физики

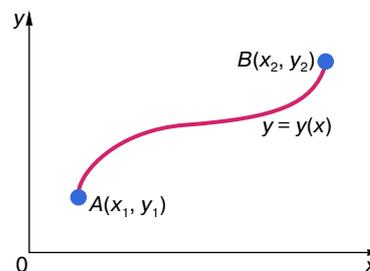


Рис. 1

носят экстремальный характер, то есть, например, среди всех допустимых траекторий истинная траектория доставляет экстремум некоторому функционалу.

Вариационное исчисление разрабатывает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов.

Как часть математики вариационное исчисление начало развиваться с конца XVII века и сформировалось в самостоятельную математическую дисциплину после основополагающих работ действительного члена Петербургской академии наук Л. Эйлера (1707–1783), которого с полным основанием можно считать отцом вариационного исчисления.

На становление и формирование вариационного исчисления большое воздействие оказали следующие математические проблемы.

1. Задача о брахистохроне (кривой скорейшего спуска). Эта задача была поставлена еще Г. Галилеем.

Суть проблемы состоит в определении линии, соединяющей две заданные точки A и B , не лежащие на одной вертикальной прямой, по которой тяжелая материальная точка скатится из A в B за кратчайшее время под действием только силы тяжести (рис. 2). Эта задача сводится к проблеме минимума функционала

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx,$$

где a и b — абсциссы точек A и B . Решение этой задачи было дано И. Бернулли, Г. Лопиталем и И. Ньютоном. Показано, что линией быстрого ската не будет прямая, соединяющая точки A и B , хотя она и есть кратчайшее расстояние между ними. Оказалось, что линией быстрого ската является циклоида, уравнение которой имеет вид

$$\begin{aligned} x &= c(t - \sin t) + d, \\ y &= c(1 - \cos t), \end{aligned}$$

где c, d — постоянные.

2. Задача о геодезических линиях. Суть задачи состоит в определении линии наименьшей длины, со-

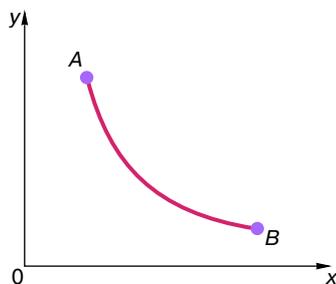


Рис. 2

единяющей две заданные точки некоторой поверхности $f(x, y, z) = 0$. Такие линии называются геодезическими. Так, например, для сферы геодезической является часть дуги окружности большого радиуса.

Задача о геодезических линиях представляет собой типичную вариационную задачу на условный экстремум, а именно требуется найти минимум функционала

$$I[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx,$$

причем функции $y(x)$ и $z(x)$ должны быть подчинены условию $f(x, y(x), z(x)) = 0$, то есть кривая должна находиться на заданной поверхности (рис. 3). Эта задача была решена в конце XVII в. Я. Бернулли, а общий метод решения задач такого типа был дан в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа.

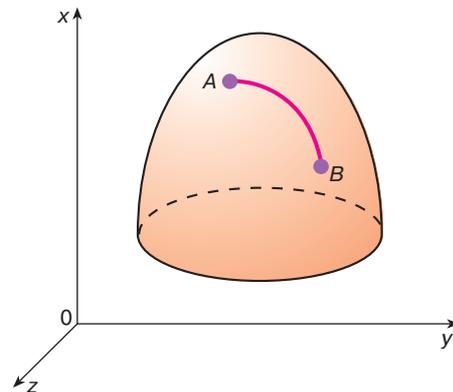


Рис. 3

3. Изопериметрическая задача. Найти замкнутую линию заданной длины l , ограничивающую максимальную площадь S .

В этой задаче требуется определить экстремум функционала S при наличии дополнительного условия — длина кривой l должна быть постоянна, то есть функционал

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

сохраняет постоянное значение. Задачи такого вида называются изопериметрическими.

Современные проблемы науки и техники часто приводят к гораздо более сложным вариационным задачам. Типичной проблемой космонавтики является доставка управляемого аппарата на Луну или Марс. Соответствующая вариационная задача (или задача оптимального управления) состоит в доставке управляемого объекта к небесному телу за

наименьшее время и с наименьшими затратами. Другим примером оптимизации в современных конструкциях является создание композиционных материалов с наперед заданными оптимальными упругими свойствами. Об этих проблемах можно получить информацию в [1, 2], а мы основное внимание уделим классическому вариационному исчислению [3].

ФУНКЦИОНАЛ КАК ОСНОВНОЙ ОБЪЕКТ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Из введения ясно, что функционалы – это более сложные математические объекты, чем функции. Прежде чем изучать их свойства и исследовать их на экстремум, дадим определение.

Функционалом называется отображение некоторого множества функций X во множество действительных чисел R . Записывается это как $J: X \rightarrow R$, а смысл этого понятия состоит в том, что каждой функции $f(x)$ из X ставится в соответствие число $J[f]$ по некоторому правилу, например

$$J[f] = \int_0^1 x^2 f(x) dx,$$

где $f(x)$ – непрерывная функция, определенная на отрезке $[0, 1]$.

Во всех задачах, которые были перечислены выше, а также для многих других задач исследуемые функционалы представимы в виде определенного интеграла

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1)$$

где $F(x, y, y')$ – заданная функция, зависящая от функции $y(x)$ и ее первой производной $y'(x)$.

Для понимания существа и методов вариационного исчисления можно установить связь между задачей об экстремуме функционала с задачей об экстремуме функции нескольких переменных [3].

Отметим, что множество X , из которого берутся функции $y(x)$, называется областью определения функционала. Между функционалами и функциями многих переменных имеется тесная связь. Чтобы ее установить, разобьем $[a, b]$ точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = b$ на $n + 1$ равных частей и рассмотрим вместо кривой $y(x)$ ломаную с вершинами $(x_0, y(a)), (x_1, y(x_1)), \dots, (x_{n+1}, y(b))$, а сам функционал заменим приближенно суммой:

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n+1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) h, \quad (2)$$

$$h = x_i - x_{i-1}.$$

Сумма в правой части (2) представляет собой функцию переменных y_1, y_2, \dots, y_n . Таким образом, вариационную задачу можно приближенно рассматри-

вать как задачу о нахождении экстремума функции $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ от n переменных. Этот подход в вариационном исчислении был использован Л. Эйлером, сводившим исходную задачу об экстремуме функционала к задаче исследования функции n переменных, а затем с помощью предельного перехода $n \rightarrow \infty$ получавшим точное решение.

Таким образом, функционалы можно рассматривать как функцию бесконечного числа переменных.

ЧТО ТАКОЕ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ

При анализе экстремума функции одно из главных понятий – понятие расстояния между числами. Расстояние между двумя числами x_1 и x_2 на числовой прямой – это абсолютная величина их разности

$$\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

Число $\rho(x_1, x_2)$ обладает следующими свойствами, которые легко вытекают из свойств абсолютной величины:

1) $\rho(x_1, x_2) \geq 0, \rho(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;

2) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$; (3)

3) $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_2)$ – неравенство треугольника.

Такими же свойствами обладает обычное расстояние между двумя точками на плоскости и в пространстве.

Для функций также можно ввести в рассмотрение понятие расстояния для того, чтобы оценивать, насколько близки или далеки друг от друга рассматриваемые функции. Понятие близости функции зависит от того, каким образом вводится понятие расстояния или, как говорят математики, как вводится метрика.

В наиболее часто встречающейся ситуации расстояние между двумя непрерывными функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ вводится как

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{x \in [a, b]} |y_1(x) - y_2(x)|$$

и представляет собой наибольшую разницу между ординатами этих двух функций, когда x пробегает отрезок $[a, b]$.

Нетрудно показать, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет тем же свойствам (3) и называется расстоянием в метрике $C[a, b]$ (непрерывных на $[a, b]$ функций). Согласно введенному понятию, для каждой непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ можно найти ее “длину” как расстояние от нуль-функции (в математике принято называть длину функции $y(x)$ нормой)

$$\rho(y, 0) = \|y\|_{C[a, b]} = \max_{y \in [a, b]} |y(x)|.$$

Так, например, для функции

$$y(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad \|y\|_{C[0,2]} = 1.$$

Для непрерывных и имеющих непрерывную первую производную функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ расстояние определяется как

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{x \in [a, b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y_1'(x) - y_2'(x)|.$$

Введенное таким образом расстояние называется расстоянием в метрике $C^1[a, b]$ (непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций). Соответственно введенному понятию расстояния близость функций в метрике $C^1[a, b]$ означает, что малы не только ординаты разности функций, но и ординаты разности их производных. Таким образом, если функции близки в метрике $C^1[a, b]$, то они близки и в метрике $C[a, b]$, но не наоборот.

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

При исследовании функционалов, как и при исследовании функций, наиболее важную роль играют простейшие функционалы – линейные и квадратичные. Их свойства в какой-то степени похожи на свойства линейных и квадратичных функций, и далее подробно остановимся на этих видах функционалов [3].

Функционал $J[u]: X \rightarrow R$ называется линейным, если для любых вещественных чисел λ_1 и λ_2 и любых $u_1, u_2 \in X$ он удовлетворяет условию

$$J[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2] = \lambda_1 J[u_1] + \lambda_2 J[u_2].$$

Таковым, например, является функционал

$$J[u] = \int_0^1 u(t) dt.$$

Функционал $J[x, y]$, зависящий от двух элементов x, y , называется билинейным, если при фиксированном x он представляет собой линейный функционал от y , а при фиксированном y – линейный функционал от x .

Если $J[x, y]$ – билинейный функционал, то выражение $J[x, x]$ называется квадратичным функционалом. В качестве примера квадратичного функционала приведем

$$J[x, x] = \int_0^1 [x^2(t) + x'^2(t)] dt.$$

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА

При исследовании функций на экстремум важное значение имеет исследование ее первой и второй производных. При исследовании функционала вводятся аналогичные понятия. Понятию производной функции соответствует понятие вариации функционала. Определим сначала вариацию функ-

ции $\delta y(x)$ как разность двух любых функций из множества X

$$\delta y(x) = y_1(x) - y_2(x),$$

а вариацией функционала $\delta J[y]$ назовем число

$$\delta J[y] = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha=0}.$$

Аналогично вводится понятие второй вариации

$$\delta^2 J[y] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} J[y + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha=0}.$$

Первая и вторая вариации функционала $J[y]$ играют важнейшую роль при исследованиях на экстремум. Во-первых, оказывается, что для того, чтобы функционал $J[y]$ при $y = y_0$ достигал минимума (максимума), необходимо, чтобы [3]

$$\delta J[y_0] = 0, \quad \delta^2 J[y_0] \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Найдем первую и вторую вариации для функционала (1) в соответствии с определением:

$$\delta J[y] = \int_a^b [F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y'] dx,$$

$$\delta^2 J[y] = \frac{1}{2} \int_a^b [F''_{yy} (\delta y)^2 + 2F''_{y'y} \delta y \delta y' + F''_{y'y'} (\delta y')^2] dx.$$

Нетрудно видеть, что первая вариация есть линейный функционал, а вторая вариация – квадратичный.

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА

Дадим определение экстремума функционала. Прежде всего определим ε -окрестность функции $y_0(x)$ как множество функций $y(x)$, расстояние до которых меньше ε :

$$\|y - y_0\|_{C[a,b]} < \varepsilon \quad \text{либо} \quad \|y - y_0\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon.$$

Будем считать, что функционал $J[y]$ достигает экстремума при $y = y_0$, если $J_1[y] = J[y] - J[y_0]$ сохраняет знак в некоторой окрестности кривой $y_0(x)$. Соответственно экстремум называется минимумом, если эта разность положительна, и максимумом, если отрицательна.

Если выбирается окрестность из множества непрерывных функций, то экстремум называется сильным, а если из множества непрерывно дифференцируемых, то слабым.

Исходя из необходимых условий экстремума ($\delta J = 0$), Эйлер получил дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют те кривые, которые “подозрительны” на экстремум:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0, \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \quad (4)$$

Это уравнение указывает на тесную связь между задачами об экстремуме функционалов и дифференциальными уравнениями. Возникает вопрос: каждое ли

решение уравнения (4) доставляет экстремум функционалу (1)? Ответ на этот вопрос не так прост, как в аналогичных условиях экстремума для функций. Одно из необходимых условий слабого минимума было получено А. Лежандром и состоит в выполнении неравенства $F''_{y,y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0$. Однако оказалось, что это условие не является достаточным, а достаточные условия несколько позднее были сформулированы немецким математиком К. Якоби [3, 4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время вариационные методы являются одним из мощных средств анализа самых разнообразных задач. Наиболее интенсивно вариационные подходы использовались в задачах об упругом поведении конструкций, особенно в задачах оптимального проектирования [2]. Интерес к этим задачам усилился в связи с быстрым развитием авиационной и космической техники, судостроения, где чрезвычайно важно решение проблемы снижения веса конструкции без ущерба для ее прочности и аэродинамических свойств.

Вариационный подход к решению задач об устойчивости, равновесии и колебаниях упругих конструкций позволил сформулировать ряд прикладных теорий, позволяющих с успехом осуществлять расчет самых разнообразных конструкций.

Мы видели, что задача об отыскании экстремума некоторого функционала (например, (1)) сводится к решению дифференциального уравнения (4). Отметим, что некоторые задачи математической физики могут быть сведены к задачам об отыскании минимума некоторого функционала. Так, например, задача Дирихле для уравнения Лапласа в плоской области V , ограниченной кривой L ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_L = f$$

сводится к проблеме минимума функционала

$$J[u] = \int_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dV$$

на множестве функций, имеющих непрерывные первые производные в области V и удовлетворяющих граничному условию $u|_L = f$.

Вариационные постановки задач теории упругости, гидромеханики привели к созданию новых приближенных методов отыскания экстремумов функционалов. Такие методы были разработаны русскими учеными И.Г. Бубновым и Б.Г. Галёркиным, швейцарским физиком В. Ритцем. Эти подходы основаны на выделении из бесконечной области определения функционала некоторого конечномерного подпространства и на сведении исходной задачи к задаче на экстремум функции многих переменных.

Вариационные постановки задач стимулировали развитие численных методов исследования задач

математической физики, среди которых одно из главных мест занимает метод конечных элементов, превратившийся с появлением мощных компьютеров в основной инструмент исследования и проектирования конструкций.

Вариационные постановки задач позволяют строить упрощенные модели в гидромеханике, теории упругости, физике. Так, например, из вариационных постановок получаются уравнения современных моделей тонкостенных конструкций: пластин и оболочек, уравнения теории дисперсных смесей и композиционных материалов. На основе вариационных подходов решаются задачи об оптимизации формы профиля крыла самолета и формы подводной лодки.

К вариационным тесно примыкают задачи оптимального управления, которые интенсивно исследуют в последние 30–40 лет [5, 6]. Задачи оптимального управления — это задачи более общего вида, чем вариационные. Наибольшего успеха в их решении добились советские ученые, кульминацией явилась формулировка принципа максимума Понтрягина [5]. Этот принцип позволяет решать важные с практической точки зрения задачи, такие, как перевод космического корабля с одной орбиты на другую таким образом, чтобы расход топлива был минимален. Принцип максимума позволил решить многие проблемы оптимизации форм конструкций на основе вариационных подходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р.Ф.* Экстремальные задачи в современной науке и приложениях // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 6. С. 115–120.
2. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
4. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
6. *Колмановский В.Б.* Задачи оптимального управления // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 6. С. 121–127.

* * *

Александр Ованесович Ватульян, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости Ростовского государственного университета, профессор кафедры высшей математики Донского государственного технического университета. Область научных интересов: математические вопросы распространения волн в анизотропных средах, обратные граничные и геометрические задачи механики, интегральные уравнения, численные методы. Автор около 100 публикаций.