

ON DYNAMICS
OF A ROLLING BODY
AND SOME CURIOUS
PROPERTIES
OF A ROTATING TOP

A. P. MARKEEV

Problems of dynamics of bodies being contiguous to a rigid surface are discussed briefly. A theoretical basis is given for curious dynamical effects being observed in experiments, namely the changes in the direction of rotation of the celtic stone about the vertical without any external action, and the origin of rotation in any direction due to oscillations about the horizontal axis.

Кратко обсуждаются проблемы динамики тел, соприкасающихся с твердой поверхностью. Дается теоретическое обоснование курьезных динамических эффектов, наблюдаемых в экспериментах: изменение направления вращения кельтского камня вокруг вертикали без активного внешнего воздействия и возникновение вращения в том или ином направлении за счет колебаний вокруг горизонтальной оси.

**О ДИНАМИКЕ КАТЯЩЕГОСЯ
ТЕЛА И НЕКОТОРЫХ
КУРЬЕЗНЫХ СВОЙСТВАХ
ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОЛЧКА**

А. П. МАРКЕЕВ

Московский авиационный институт

ВВЕДЕНИЕ

Изучение задач динамики тел, катящихся по неподвижной или движущейся поверхности, имеет довольно длительную историю. Одной из первых таких задач, возникшей, по-видимому, из потребностей техники, была задача о движении тяжелого однородного цилиндра (катка) по наклонной плоскости.

Значение исследований по динамике твердого тела, и в частности по динамике тела, соприкасающегося с твердой поверхностью, хорошо сформулировано в начале XX века Дж. Перри: “Если бы обстоятельному изучению вращающегося волчка было уделено больше внимания, то успехи (человечества) в области прикладной механики и во многих отраслях промышленности были бы более значительными”.

При экспериментальном и теоретическом изучении динамики тела, соприкасающегося с поверхностью другого тела, много внимания уделялось анализу динамического поведения различного типа волчков на неподвижной горизонтальной плоскости. При этом обнаружили любопытные явления в поведении волчка.

Например, в литературе широко обсуждались динамические свойства волчка сферической формы или волчка “тип-топ” (иначе “китайского волчка”, или волчка Томсона) на плоскости с трением скольжения. Конструктивно такой волчок состоит из срезанного шарика с ножкой, расположенной в центре среза. В устойчивом состоянии равновесия волчок опирается на плоскость точкой своей сферической поверхности, а его ножка направлена вертикально вверх. За ножку волчок может быть приведен в быстрое вращение. Начав вращаться, волчок теряет устойчивость, его ножка отклоняется от первоначального вертикального положения. В конце концов волчок переворачивается и продолжает устойчиво вращаться, опираясь на плоскость своей ножкой.

Аналогичный эффект наблюдается и в случае волчка эллипсоидальной формы. Движение такого волчка закрученного на шероховатой плоскости волчка происходит так, что он имеет тенденцию вращаться вокруг наибольшей своей оси, которая

стремится занять вертикальное положение, если только вращение волчка достаточно быстрое. Примером может служить твердое тело яйцевидной формы. Вращение вокруг вертикали для такого тела, лежащего на боку, неустойчиво. При достаточно быстром вращении тело поднимается из такого положения и продолжает вращаться на остром кончике.

Упомянутые эффекты довольно подробно описаны во многих учебниках по механике и в научно-популярной литературе [1, 2].

Но особенно удивительно поведение волчка, получившего название кельтского камня. Теоретическому обоснованию некоторых курьезных свойств этого волчка и посвящена данная статья.

КЕЛЬТСКИЙ КАМЕНЬ И ЕГО ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим твердое тело, поверхность которого имеет выпуклый участок без заострений и ребер. Тело движется в однородном поле тяжести, опираясь одной точкой выпуклого участка своей поверхности на неподвижную горизонтальную плоскость. Через G обозначим центр тяжести тела. Пусть выпуклый участок поверхности тела имеет такую точку M_0 , которая удовлетворяет следующим требованиям: плоскость, касательная к поверхности тела в точке M_0 , перпендикулярна отрезку M_0G ; ось, на которой лежит отрезок M_0G , является главной центральной осью инерции; обозначим эту ось $G\eta$, а соответствующий ей момент инерции B . Предположим, что главные радиусы кривизны r_1 и r_2 поверхности в точке M_0 различны по величине, а направления главных осей инерции тела для точки M_0 не совпадают с направлениями линий кривизны поверхности в этой точке. Кроме того, будем считать, что моменты инерции A и C тела относительно главных центральных осей инерции $G\xi$ и $G\zeta$ различны. Тела, поверхности и распределение масс которых обладают указанными свойствами, иногда (в динамике волчка) называют кельтскими камнями.

Такое название упомянутые тела получили, по-видимому, потому, что их необычное динамическое поведение было открыто при археологических исследованиях древних топоров и тесл, имеющих такое название (от лат. celtis — долото). Возможно, это также связано с названием группы племен (Celtae — кельты), населявших многие районы Западной Европы в I тысячелетии до н.э.

Первое научное сообщение о замечательных динамических свойствах кельтского камня появилось в конце прошлого века [3]. Сообщалось о некоторых наблюдаемых в экспериментах курьезных динамических свойствах кельтского камня. Если этот камень поместить на горизонтальную плоскость и закрутить в определенном направлении вокруг вертикальной оси, то он может устойчиво продолжать это вращение. Если же направление начального

вращения изменить на противоположное, то он может скоро перестать вращаться, начнет колебаться вокруг горизонтальной оси, а затем без активного внешнего воздействия начнет вращаться в обратном направлении. В некоторых случаях изменение направления вращения наблюдается при любом направлении начального вращения и даже может повторяться многократно. Кельтский камень обладает еще и таким странным свойством: если покоящийся на плоскости камень привести к колебаниям вокруг горизонтальной оси, то эти колебания с течением времени вызовут его вращение вокруг вертикальной оси, причем направление вращения зависит от ориентации относительно камня той оси, вокруг которой вначале камень колебался.

Многочисленные эксперименты, проведенные с целью исследования динамики кельтских камней, подробно описаны в популярной статье [4], написанной однофамильцем автора научного сообщения [3].

Тело, обладающее свойствами кельтского камня, нетрудно сконструировать даже в домашних условиях. Например, его можно сделать в форме половины яйца (рис. 1), на верхнем горизонтальном срезе которой при помощи винта закреплен стержень, расположенный под некоторым углом к продольной оси среза. Посредством изменения этого угла можно изменять моменты инерции A и C и направления главных осей инерции $G\xi$ и $G\zeta$ и тем самым получать кельтские камни с более или менее резко выраженными динамическими свойствами, характерными для этих камней.

Первое математическое исследование движения твердых тел типа кельтских камней было проведено в конце прошлого века автором первого научного сообщения [3] о курьезных свойствах кельтского камня. Задачу естественно рассматривать с двух сторон, разделяя вопрос об исследовании устойчивости стационарного вращения тела вокруг вертикали и вопросы исследования нелинейных колебаний тела на плоскости.

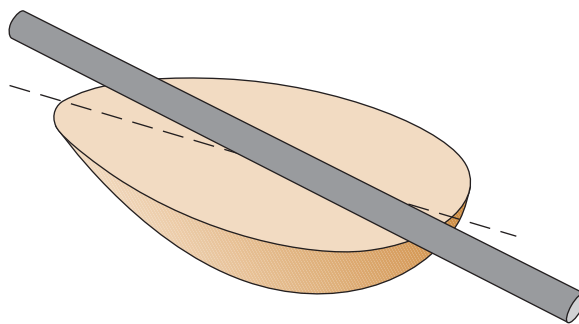


Рис. 1. Модель кельтского камня

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ВЕРТИКАЛИ

Задача об устойчивости стационарного вращения тела вокруг вертикали строго решена в работах В.В. Румянцева, И.С. Астапова и А.В. Карапетяна (см. [5]), где предполагалось, что тело движется по плоскости без скольжения (в таком случае говорят, что плоскость абсолютно шероховатая). Изучался также случай движения со скольжением. Показано, что и при наличии вязкого трения в некоторых случаях существует зависимость устойчивости от направления вращения тела вокруг вертикали.

В статье рассматривается случай абсолютно шероховатой плоскости.

Движение тела отнесем к неподвижной системе координат $Oxyz$ с началом в точке O опорной плоскости $z = 0$ (рис. 2). Ось Oz направлена вертикально вверх. Система координат $G\xi\eta\zeta$, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции тела, жестко связана с телом. Оси еще одной подвижной системы координат $Gx\eta\zeta$ выбираются так, чтобы они были параллельны соответствующим осям неподвижного трехгранника $Oxyz$. Ориентацию тела в пространстве зададим тремя углами Эйлера ψ, θ, φ : ψ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ – угол собственного вращения. Геометрический смысл этих углов ясен из рис. 2. Переход от системы координат $Gx\eta\zeta$ к системе $G\xi\eta\zeta$ осуществляется при помощи трех последовательных поворотов: на угол ψ вокруг оси Gz (после этого поворота ось Gx займет положение, задаваемое прямой GN , которую называют линией узлов), на угол θ вокруг линии узлов и на угол φ вокруг оси $G\xi$.

Твердое тело на неподвижной абсолютно шероховатой плоскости представляет собой так называемую систему Чаплыгина. Дифференциальные уравнения движения в форме, данной С.А. Чаплыгиным, будут описывать изменение углов ψ, θ, φ во времени. Эти уравнения ввиду громоздкости здесь не приводятся. Отметим только, что угол прецессии ψ не входит в уравнения движения (в уравнениях содержатся производные этого угла по времени) и они имеют частное решение

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\psi} = \omega = \text{const}. \quad (1)$$

Это решение отвечает вращению тела с произвольной постоянной по величине угловой скоростью вокруг оси $G\eta$, занимающей вертикальное положение. При этом тело соприкасается с плоскостью точкой M_0 своей поверхности (рис. 3). Величина ω может иметь любой знак. При $\omega > 0$ тело вращается против часовой стрелки, при $\omega < 0$ – по часовой стрелке (если смотреть сверху со стороны положительного направления оси $G\eta$). При $\omega = 0$ тело покоится опираясь на плоскость в точке M_0 своей поверхности. Описанное движение тела в дальнейшем будем называть невозмущенным движением. Движения, близкие к нему, называются возмущенными. При исследовании возмущенных движений полагаем, что

$$\theta = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad \varphi = x_2, \quad \dot{\psi} = \omega + x_3, \quad (2)$$

где $|x_i| \ll 1, i = 1, 2, 3$.

Для исследования устойчивости стационарного вращения (1) и анализа колебаний в его окрестности

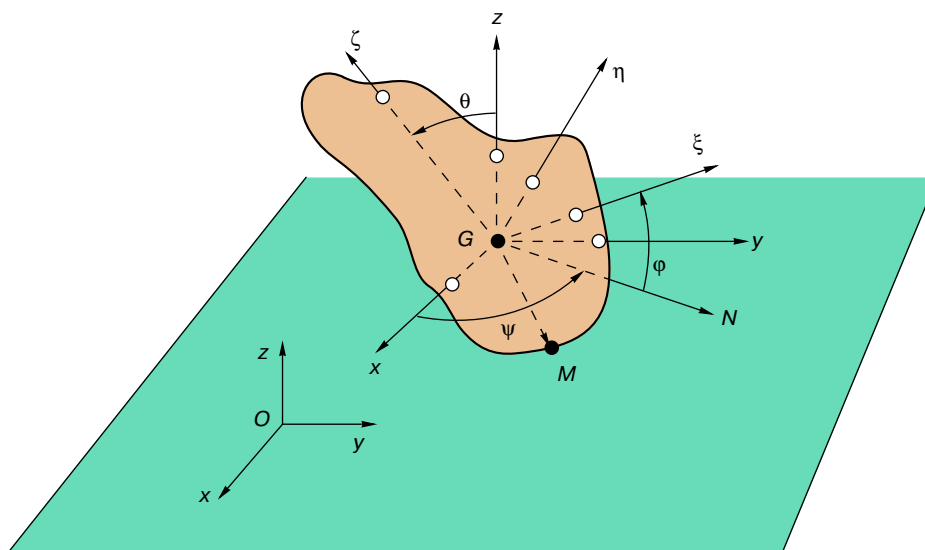


Рис. 2. Основные системы координат. M – точка касания тела и плоскости

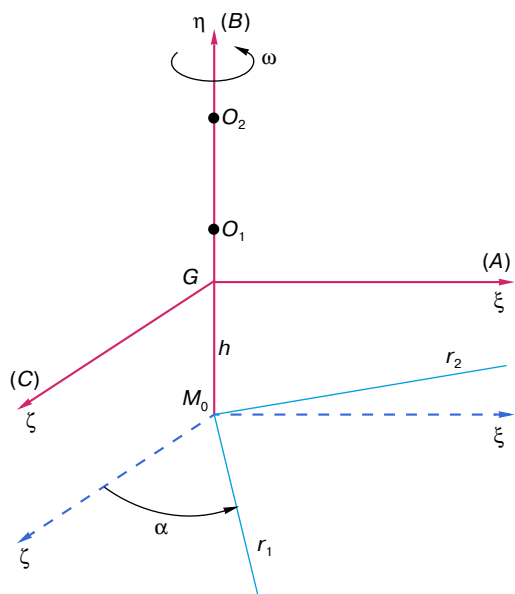


Рис. 3. Геометрия невозмущенного стационарного вращения. M_0 – точка касания тела и плоскости, M_0G_j – линия, соответствующая главному радиусу кривизны r_j , $j = 1, 2$; $M_0O_1 = r_1$, $M_0O_2 = r_2$; оси $G\zeta$ и $G\xi$ горизонтальны и параллельны осям $M_0\zeta$ и $M_0\xi$; A , B и C – моменты инерции относительно осей $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$

подставим выражения (2) в уравнения движения и проведем их линеаризацию относительно величин x_i и их производных. Вычисления показывают, что характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\lambda(P\lambda^4 + Q\omega\lambda^3 + R\lambda^2 + Q\omega^3\lambda + S) = 0, \quad (3)$$

где

$$P = (A + mh^2)(C + mh^2), \quad Q = mlh(A - C),$$

$$R = [(A + C - B + 2mh^2)^2 - (A + C - B + 2mh^2)mh(r_1 + r_2) + m^2h^2r_1r_2]\omega^2 - (A + mh^2)[(A - B)\omega^2 + m(h - l_1)(g + \omega^2h)] - (C + mh^2)[(C - B)\omega^2 + m(h - l_2)(g + \omega^2h)],$$

$$S = (A - B)(C - B)\omega^4 + m(g + \omega^2h)\omega^2[A(h - l_2) + C(h - l_1) - B(2h - r_1 - r_2)] + m^2(g + \omega^2h)^2(h - r_1)(h - r_2),$$

$$l = (r_2 - r_1)\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$l_1 = r_1\sin^2\alpha + r_2\cos^2\alpha, \quad l_2 = r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha.$$

Здесь m – масса тела, g – ускорение свободного падения, A , B , C – уже упоминавшиеся главные центральные моменты инерции, h – расстояние от центра тяжести G до опорной плоскости в невозмущенном движении (длина отрезка M_0G), r_1 и r_2 – главные радиусы кривизны поверхности тела в точке M_0 , α – угол между осью $G\zeta$ и линией кривизны, соответ-

ствующей r_1 (рис. 3), он отсчитывается от оси $G\zeta$ против часовой стрелки, если смотреть навстречу оси $G\eta$, занимающей вертикальное положение в невозмущенном движении (1).

В работах В.В. Румянцева, И.С. Астапова и А.В. Карапетяна показано, что при выполнении условий

$$(R - P\omega^2)\omega^2 - S > 0, \quad S > 0, \quad (4)$$

$$\omega(A - C)(r_2 - r_1)\sin\alpha\cos\alpha > 0 \quad (5)$$

стационарное вращение (1) устойчиво, причем асимптотически по отношению к возмущениям величин θ , $\dot{\theta}$, φ , $\dot{\varphi}$, ψ . При строгом нарушении хотя бы одного из неравенств (4), (5) движение (1) неустойчиво.

Неравенства (4) задают ограничения на распределение масс тела, геометрию его поверхности и величину угловой скорости, а неравенство (5) налагает ограничения и на знак угловой скорости (направление вращения тела). При устойчивом вращении линия наименьшего радиуса кривизны поверхности тела в точке его касания с плоскостью в невозмущенном движении идет впереди горизонтальной оси, соответствующей меньшему из главных центральных моментов инерции. (Если $r_1 < r_2$ и $C < A$, то рис. 3 иллюстрирует случай устойчивого вращения.)

При выполнении условий (4), (5) всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически стремится к вращению с постоянной угловой скоростью, мало отличающейся от ω , вокруг оси $G\eta$, положение которой асимптотически стремится к вертикальному.

Если $Q = 0$, то при достаточно малых $|\omega|$ стационарное вращение (1) неустойчиво независимо от знака ω , так как при малых $|\omega|$ неравенства (4) несоместны.

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим один частный случай малых (линейных) колебаний тела вблизи стационарного вращения (1). Пусть хотя бы одна из величин $A - C$, $r_2 - r_1$, $\sin 2\alpha$ равна нулю. Тогда $Q = 0$ и неравенство (5) не выполняется. Характеристическое уравнение (3) по-прежнему имеет один нулевой корень, а остальные четыре корня удовлетворяют биквадратному уравнению. Пусть биквадратное уравнение имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, $\omega_1 > \omega_2 > 0$. Тогда в линейном приближении стационарное вращение (1) устойчиво, а тело совершает малые колебания вблизи этого вращения с двумя частотами ω_1 и ω_2 .

Рассмотрим корни уравнения (3) при малых $Q\omega$. Вычисления показывают, что в первом приближении

относительно $Q\omega$ у корней $\pm i\omega_j, j = 1, 2$, помимо поправок к их мнимым частям появляются еще и вещественные части $\sigma_j, j = 1, 2$:

$$\sigma_1 = \frac{Q\omega(\omega^2 - \omega_1^2)}{2D}, \quad \sigma_2 = \frac{Q\omega(\omega_2^2 - \omega^2)}{2D}, \quad (6)$$

$$D = (A + mh^2)(C + mh^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2).$$

Пусть, например, $Q\omega > 0$, то есть неравенство (5) удовлетворяется. Из (6) тогда следует, что если $\omega_2^2 < \omega^2 < \omega_1^2$, то $\sigma_j > 0, j = 1, 2$, и малые колебания тела, близкие его стационарному вращению (1), будут экспоненциально затухать; если $0 < \omega^2 < \omega_2^2$, то $\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$ и экспоненциально затухают высокочастотные колебания (с частотой ω_1), а низкочастотные (с частотой ω_2) экспоненциально возрастают; если же $\omega^2 > \omega_1^2$, то, наоборот, затухают низкочастотные колебания, а высокочастотные растут. При $Q\omega < 0$ характер развития малых колебаний будет противоположным.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Пусть в движении (1) $\omega = 0$, то есть тело покоится на плоскости опираясь на нее одной своей точкой M_0 . Необходимым и достаточным условием устойчивости этого положения равновесия будет, согласно В.В. Румянцеву, выполнение неравенств

$$r_1 > h, \quad r_2 > h, \quad (7)$$

то есть равновесие тела на абсолютно шероховатой плоскости устойчиво тогда и только тогда, когда центр тяжести G тела находится ниже обоих главных центров кривизны O_1 и O_2 поверхности тела в точке M_0 его касания с опорной плоскостью (рис. 3).

Считая условия (7) выполненными, рассмотрим движение тела вблизи положения равновесия. Вычисления показывают, что уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} (A + mh^2)\ddot{x}_1 &= mg(h - l_2)x_1 - mglx_2 + X_1, \\ (C + mh^2)\ddot{x}_2 &= -mglx_1 + mg(h - l_1)x_2 + X_2, \\ B\dot{x}_3 &= X_3, \end{aligned} \quad (8)$$

где через $X_i, i = 1, 2, 3$, обозначена совокупность членов выше первой степени относительно $x_j, \dot{x}_j, j = 1, 2, 3$.

В линеаризованной системе (8) первые два уравнения, описывающие изменение во времени углов нутации и собственного вращения, отделяются от третьего уравнения, описывающего вращение тела вокруг вертикали. Изменение углов нутации и собственного вращения во времени имеет колебатель-

ный характер с двумя частотами Ω_1, Ω_2 . Эти частоты ($\Omega_1 > \Omega_2 > 0$) являются корнями биквадратного уравнения

$$(A + mh^2)(C + mh^2)\Omega^4 - mg[(A + mh^2)(l_1 - h) + (C + mh^2)(l_2 - h)]\Omega^2 + m^2g^2(r_1 - h)(r_2 - h) = 0.$$

Уравнения возмущенного движения (8) проще исследовать, если предварительно упростить их линейную часть при помощи замены переменных $x_1, x_2, x_3 \rightarrow y_1, y_2, y_3$, задаваемой формулами

$$x_1 = u_{11}y_1 + u_{12}y_2, \quad x_2 = u_{21}y_1 + u_{22}y_2, \quad x_3 = y_3,$$

$$u_{ij} = k_j mgl, \quad u_{2j} = k_j [(A + mh^2)\Omega_j^2 + mg(h - l_2)], \quad j = 1, 2,$$

$$k_j = \{ (A + mh^2)(mgl)^2 + (C + mh^2)[(A + mh^2)\Omega_j^2 + mg(h - l_2)]^2 \}^{-1/2}.$$

В новых переменных уравнения возмущенного движения (8) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \Omega_1^2 y_1 &= Y_1, \\ \ddot{y}_2 + \Omega_2^2 y_2 &= Y_2, \\ B\dot{y}_3 &= Y_3, \end{aligned} \quad (9)$$

где $Y_i, i = 1, 2, 3$, представляют собой совокупность членов выше первой степени относительно $y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, y_3$.

Если в (9) отбросить функции Y_i , то получим линейные уравнения, общее решение которых может быть записано в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= \rho_1 \sin(\Omega_1 t + \beta_1), \\ y_2 &= \rho_2 \sin(\Omega_2 t + \beta_2), \\ y_3 &= \rho_3, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \beta_1, \beta_2$ — постоянные. Величины ρ_1 и ρ_2 являются амплитудами высокочастотных (с частотой Ω_1) и низкочастотных (с частотой Ω_2) колебаний соответственно. Считаем, что $\rho_j \geq 0, j = 1, 2$.

Если же в уравнениях (9) учесть величины Y_i , то решение снова можно искать в виде (10), считая теперь уже $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \beta_1, \beta_2$ не постоянными величинами, а неизвестными функциями времени. Вычисления показывают, что приближенная система уравнений, которой удовлетворяют эти функции, будет такой:

$$\dot{\beta}_1 = 0, \quad \dot{\beta}_2 = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -\gamma\Omega_1^2 \rho_1 \rho_3, \quad \dot{\rho}_2 = \gamma\Omega_2^2 \rho_2 \rho_3, \\ B\dot{\rho}_3 &= \gamma(\Omega_1^4 \rho_1^2 - \Omega_2^4 \rho_2^2), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{(A - C)mh(r_2 - r_1)\sin\alpha\cos\alpha}{2(A + mh^2)(C + mh^2)(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}.$$

В (11) отброшены члены выше первой, а в (12) – выше второй степени относительно ρ_k , $k = 1, 2, 3$.

Уравнения (11) отделяются от уравнений (12) и сразу интегрируются. Получаем $\beta_j(t) = \beta_j(0) = \text{const}$. Система же (12) описывает эволюцию амплитуд ρ_1 и ρ_2 высоко- и низкочастотных колебаний и угловой скорости ρ_3 вращения тела вокруг вертикали. Она является основной при исследовании нелинейных колебаний тела вблизи его равновесия на плоскости.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система уравнений (12) имеет интегралы

$$\Omega_1^2 \rho_1^2 + \Omega_2^2 \rho_2^2 + B\rho_3^2 = B\mu^2, \quad \mu \geq 0, \quad (13)$$

$$\rho_1^* \rho_2 = \nu, \quad \kappa = \Omega_2^2 \Omega_1^{-2}, \quad (14)$$

где μ и ν – постоянные, определяемые из начальных условий.

Траектории системы (12) представлены на рис. 4 в трехмерном пространстве ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Они расположены в области $\rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$ и представляют собой

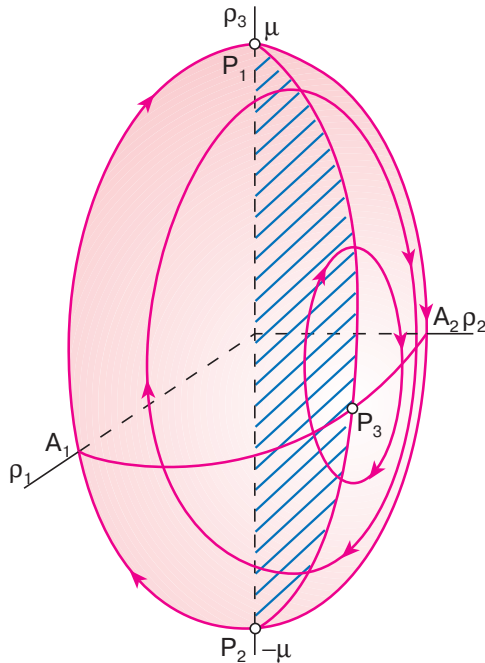


Рис. 4. К анализу нелинейных колебаний. $A_j = \mu\sqrt{B}\Omega_j^{-1}$, $j = 1, 2$; заштрихована плоскость $\rho_1\Omega_1^2 = \rho_2\Omega_2^2$

кривые, являющиеся пересечением поверхности эллипсоида (13) и цилиндрической поверхности (14). При заданном значении постоянной μ величина ν должна удовлетворять неравенствам

$$0 < \nu < \nu_* = \kappa^{-1} \left[\frac{B\mu^2\kappa}{(1+\kappa)\Omega_1^2} \right]^{\frac{1+\kappa}{2}}.$$

При $\nu > \nu_*$ движение невозможно. Штриховкой на рис. 4 показана плоскость $\rho_1\Omega_1^2 = \rho_2\Omega_2^2$, на которой обращается в нуль правая часть третьего уравнения системы (12). Траектории симметричны относительно плоскости $\rho_3 = 0$. Направление движения по траекториям показано стрелками. На рис. 4 представлен случай $\gamma > 0$; при $\gamma < 0$ направление движения изменится на обратное.

Остановимся подробно на свойствах решений системы (12) и их связи с характером движения кельтского камня по плоскости. Точки $P_1 = (0, 0, \mu)$, $P_2 = (0, 0, -\mu)$, $P_3 = (\rho_1^0, \rho_2^0, 0)$ на рис. 4 являются особыми точками системы (12). Точкам P_1 и P_2 отвечают стационарные вращения тела вокруг вертикали соответственно против часовой стрелки с угловой скоростью μ и по часовой стрелке с угловой скоростью $-\mu$. Оба этих вращения неустойчивы, что иллюстрируется рис. 4 и находится в соответствии с отмечавшейся выше неустойчивостью (при $\gamma \neq 0$) стационарного вращения (1) при достаточно малых $|\omega|$.

Точке P_3 отвечают устойчивые колебания тела с двумя частотами Ω_1 и Ω_2 . При этом $\nu = \nu_*$, а

$$\rho_1^0 = \frac{\mu}{\Omega_1} \sqrt{\frac{B\kappa}{1+\kappa}}, \quad \rho_2^0 = \frac{\mu}{\Omega_2} \sqrt{\frac{B}{\kappa(1+\kappa)}}.$$

Для таких колебаний не наблюдаются эффекты, характерные для кельтских камней: колебания вокруг горизонтальных осей не вызывают вращения тела вокруг вертикали ($\rho_3 \equiv 0$).

Система уравнений (12) имеет два следующих частных решения, в которых ρ_1 или ρ_2 тождественно равны нулю:

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2(t) = \frac{\mu\sqrt{B}}{\Omega_2} \text{sch}[\delta_1(t + e_1)], \quad (15)$$

$$\rho_3(t) = \mu \text{th}[\delta_1(t + e_1)],$$

$$\delta_1 = -\gamma\mu\Omega_2^2, \quad e_1 = \frac{1}{\delta_1} \text{Arth} \frac{\rho_3(0)}{\mu};$$

$$\rho_1(t) = \frac{\mu\sqrt{B}}{\Omega_1} \text{sch}[\delta_2(t + e_2)], \quad \rho_2 = 0, \quad (16)$$

$$\rho_3(t) = \mu \text{th}[\delta_2(t + e_2)],$$

$$\delta_2 = \gamma\mu\Omega_1^2, \quad e_2 = \frac{1}{\delta_2} \text{Arth} \frac{\rho_3(0)}{\mu}.$$

Эти решения на рис. 4 представлены асимптотическими траекториями, соединяющими особые точки P_1 и P_2 .

Решение (15) отвечает таким движениям тела, когда оно, вращаясь вокруг вертикали, совершает низкочастотные колебания с частотой Ω_2 . Если $\rho_3(0) \leq 0$, то есть в начальный момент тело либо совсем не закручено вокруг вертикали, либо закручено по часовой стрелке, то с течением времени амплитуда колебаний ρ_2 монотонно убывает (при $\gamma > 0$, как на рис. 4) от ее начального значения $\rho_2(0)$ до нуля, а угловая скорость возрастает по модулю. В пределе тело совершает чистое вращение вокруг вертикали по часовой стрелке с угловой скоростью $-\mu$. Если же $\rho_3(0) > 0$, то есть в начальный момент тело закручено против часовой стрелки, то предельное движение тела будет таким же, как и при $\rho_3(0) \leq 0$, но эволюция движения существенно иная. При $0 < t < t_*$, $t_* = -e_1$ амплитуда колебаний ρ_2 монотонно возрастает, а тело вращается вокруг вертикали против часовой стрелки с уменьшающейся угловой скоростью. В момент $t = t_*$ угловая скорость обращается в нуль, а амплитуда колебаний ρ_2 достигает своего максимального значения A_2 . При $t > t_*$ тело уже вращается по часовой стрелке с возрастающей по модулю угловой скоростью, а амплитуда колебаний монотонно убывает. Таким образом, при $\rho_3(0) > 0$ за время эволюции движения один раз происходит смена направления вращения тела вокруг вертикали.

Решение (16) описывает движения, в которых тело, вращаясь вокруг вертикали, совершает высокочастотные колебания. Анализ эволюции движения аналогичен предыдущему случаю. Предельным движением здесь будет чистое вращение вокруг вертикали против часовой стрелки с угловой скоростью μ . Если в начальный момент времени тело закручено вокруг вертикали по часовой стрелке, то при $t = -e_2$ происходит смена направления вращения. В этот момент амплитуда колебаний ρ_1 достигает своего максимального значения A_1 .

Рассмотрим теперь решения системы (12), отличные от особых точек P_1 , P_2 , P_3 и решений (15), (16). Из интегралов (13), (14) имеем

$$\rho_2 = \nu \rho_1^{-\kappa}, \quad \rho_3 = \pm f(\rho_1), \quad (17)$$

где

$$f(\rho_1) = \frac{\sqrt{-\Omega_2^2 \nu^2 + B \mu^2 \rho_1^{2\kappa} - \Omega_1^2 \rho_1^{2(\kappa+1)}}}{\sqrt{B} \rho_1^\kappa}.$$

Подставив ρ_3 из (17) в первое уравнение системы (12) и разделив переменные, получим

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1 f(\rho_1)} = \mp \gamma \Omega_1^2 dt. \quad (18)$$

Если отсюда найдена функция $\rho_1(t)$, то $\rho_2(t)$ и $\rho_3(t)$ находятся из соотношений (17).

Найти в явном виде аналитическую зависимость $\rho_1(t)$ в общем случае невозможно. Но качественный характер движения можно получить непосредственно из системы уравнений (12). Пусть, например, в начальный момент времени правая часть третьего уравнения системы (12) и величина ρ_3 положительны. Картина движения будет такой (см. рис. 4). При $t > 0$ тело все быстрее вращается вокруг вертикали против часовой стрелки (ρ_3 растет). При этом амплитуда ρ_1 высокочастотных колебаний уменьшается, а амплитуда ρ_2 низкочастотных колебаний увеличивается. Это приведет в конце концов к тому, что правая часть третьего уравнения системы (12) обратится в нуль. На рис. 4 это соответствует моменту, когда траектория пересекает плоскость $\rho_1 \Omega_1^2 = \rho_2 \Omega_2^2$. В этот момент угловая скорость ρ_3 вращения тела вокруг вертикали достигает максимального значения и вслед за этим моментом начинает убывать оставаясь положительной (тело продолжает вращаться вокруг вертикали против часовой стрелки). При этом ρ_1 по-прежнему уменьшается, а ρ_2 растет. Это продолжается до тех пор, пока угловая скорость ρ_3 не обратится в нуль. В этот момент ρ_1 и ρ_2 достигают своих минимального и максимального значений соответственно, а далее ρ_1 начинает возрастать, а ρ_2 — убывать, а тело вращается уже в обратном направлении по часовой стрелке ($\rho_3 < 0$) со всевозрастающей по модулю угловой скоростью. Убывание ρ_2 и возрастание ρ_1 приведут к тому, что правая часть третьего уравнения системы (12) снова обратится в нуль (на рис. 4 траектория снова пересечет плоскость $\rho_1 \Omega_1^2 = \rho_2 \Omega_2^2$, но уже в области отрицательных значений ρ_3). В этот момент достигается наибольшая по модулю угловая скорость вращения тела по часовой стрелке и вслед за этим начнется замедление вращения тела. При этом ρ_1 продолжает возрастать, а ρ_2 — убывать. Так продолжается до тех пор, пока ρ_3 не обратится в нуль, когда ρ_1 и ρ_2 достигают своих максимального и минимального значений соответственно, а тело изменяет вращение с направления по часовой стрелке на обратное. В дальнейшем картина движения будет периодически повторяться. Описанному циклу движения на рис. 4 соответствует замкнутая траектория. Период колебаний может быть найден из уравнения (18).

Полученные результаты находятся в соответствии с отмеченными в экспериментах [3, 4] необычными динамическими свойствами кельтского камня на горизонтальной плоскости и дают им качественное объяснение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи о качении тела по твердой поверхности обычно приводят к необходимости изучения так называемых неголономных систем. Простейшим примером неголономной системы является шар, движущийся без скольжения по плоскости. Исследования динамики катящегося тела во многом определили развитие аналитической механики неголономных систем в конце XIX — начале XX века. Можно сказать, что для развития неголономной механики задача о движении твердого тела по поверхности другого тела имеет такое же (или аналогичное) значение, какое имела и имеет задача трех тел для развития методов небесной механики.

Развитие теории качения твердых тел позволило дать глубокий анализ приложения этой теории в технике. Сюда относится прежде всего рассмотренные вопросы динамики железнодорожного состава, автомобиля, мотоцикла, велосипеда.

Теория движения тела, соприкасающегося с поверхностью другого тела, и сегодня не потеряла своего значения для приложений в машиностроении, приборостроении, транспорте. Она также по-прежнему стимулирует развитие методов аналитической механики, теории устойчивости движения и дифференциальной геометрии.

Более подробно с проблемами динамики тел, соприкасающихся с твердой поверхностью, можно познакомиться по рекомендуемой ниже литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. М.: Наука, 1989. Т. 1: Механика. 576 с.
2. *Перри Дж.* Вращающийся волчок. М.; Л.: Гл. ред. науч.-попул. и юнош. лит., 1935. 92 с.
3. *Walker G.T.* On a Curious Dynamical Property of Celts // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1895. Vol. 8, Pt. 5. P. 305–306.
4. *Walker J.* The Mysterious “Rattleback”: A Stone That Spins in One Direction and Then Reverses // Sci. Amer. 1979. Vol. 241, № 4. P. 144–149.
5. *Карпетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНТИ. 1983. Т. 6. 131 с.
6. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
7. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 335 с.

* * *

Анатолий Павлович Маркеев, доктор физико-математических наук, профессор Московского авиационного института, главный научный сотрудник Института проблем механики РАН. Область научных интересов: аналитическая динамика, теория устойчивости и нелинейных колебаний, небесная механика. Автор более 100 статей и четырех монографий.