NUMBER SYSTEMS

V. V. SIL'VESTROV

The paper deals with procedures and principles of constructing of number systems generalizing real numbers. The examples are: complex, double and dual numbers, quaternions, octaves, Pauli's numbers. The matrix representation of certain numbers is considered.

Рассказывается о способах и принципах построения систем чисел, обобщающих действительные числа. Приводятся примеры: комплексные, двойные и дуальные числа, кватернионы, октавы, числа Паули. Рассматривается матричная форма представления некоторых чисел.

СИСТЕМЫ ЧИСЕЛ

В. В. СИЛЬВЕСТРОВ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы математики, связанные с решением алгебраических уравнений, в частности простейшего квадратного уравнения $x^2 + 1 = 0$, привели к появлению в XVI веке представлений о мнимых числах, а в XVIII веке – комплексных чисел, которые, обобщая действительные числа, обладают основными свойствами последних. Например, операции сложения и умножения в множестве комплексных чисел обладают всеми важнейшими свойствами сложения и умножения действительных чисел: они коммутативны, ассоциативны, дистрибутивны и обратимы, то есть возможны вычитание и деление. В то же время в множестве комплексных чисел нет естественного упорядочения: для них не определены понятия "больше" и "меньше". В последующем комплексные числа нашли широкое применение не только в самой математике, но и в физике, механике и других областях естествознания. Именно это обстоятельство послужило причиной поиска новых систем чисел, которые, являясь обобщением действительных и комплексных чисел, обладают если не всеми, то хотя бы частью основных свойств последних. Так возникли системы двойных и дуальных чисел, кватернионов, октав, чисел Клиффорда, Грассмана и др. В основе построения указанных и других систем чисел лежат разные методы, среди которых особое место занимают процедуры удвоения. В данной статье рассматриваются две такие процедуры и примеры наиболее часто встречаемых в приложениях систем чисел, получаемых с помощью этих процедур. Однако не все системы чисел можно получить с помощью той или иной процедуры удвоения. Так, система гиперкомплексных чисел ранга n может быть получена таким путем, только если n – степень двойки.

ПРОЦЕДУРА УДВОЕНИЯ ГРАССМАНА–КЛИФФОРДА

1-й шаг. Комплексные, двойные и дуальные числа

Пусть a, b – произвольные действительные числа. Рассмотрим множество чисел вида

$$z = a + bi, \qquad (1)$$

где i – некоторый символ (объект), коммутирующий с действительными числами при умножении, то есть $bi = ib$ для любого $b \in \mathbf{R}$, и удовлетворяющий условию $i^2 = -1$, или $i^2 = 1$, или $i^2 = 0$, то есть

$$i^2 = \varepsilon, \qquad (2)$$

где ε равно -1, или 1, или 0. Числа a, b называются *компонентами* сложного числа z, символ i – *мнимой единицей*. Таким образом, после первого шага процедуры Грассмана–Клиффорда происходит удвоение множества действительных чисел: одно множество $\mathbf{R}$ составляют компоненты a чисел (1), а другое – компоненты b.

Числа (1) в случае $i^2 = -1$ называются *комплексными*, в случае $i^2 = 1$ – *двойными*, а в случае $i^2 = 0$ – *дуальными*. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbf{C}$. Сумма, разность и произведение этих чисел находятся по законам элементарной алгебры с учетом условия (2). Согласно этому условию, произведения комплексных, двойных и дуальных чисел находятся по формулам

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + bd + (ad + bc)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i$$

соответственно. Во всех случаях произведение является как коммутативным, так и ассоциативным, то есть для любых чисел z_1, z_2, z_3 выполняются равенства $z_1z_2 = z_2z_1$ и $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$.

Число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным к числу z, а действительное неотрицательное число $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – *нормой* числа z. Всегда $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$ и произведение $z\bar{z} = a^2 - \varepsilon b^2$ является действительным числом. Для комплексных, и в частности действительных, чисел понятие нормы $\|z\|$ совпадает с понятием модуля $|z|$. Для этих чисел $z\bar{z} = \|z\|^2$ (или $z\bar{z} = |z|^2$) и $\|z_1z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$. Для двойных и дуальных чисел эти равенства, вообще говоря, не выполняются. Например, они не выполняются для двойных чисел $z = z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 1 - i$. Предлагаем читателю проверить это самому.

В множестве чисел вида (1) решим уравнение

$$z_1 z = z_2, \tag{3}$$

где z – искомое, а $z_1 \neq 0$, z_2 – заданные числа одного и того же типа. Умножив обе части уравнения на $\bar{z}_1$, получим

$$\bar{z}_1 z_1 z = \bar{z}_1 z_2, \tag{4}$$

где $\bar{z}_1 z_1$ – действительное число. Если $z_1 \neq 0$ – комплексное число, то $\bar{z}_1 z_1 = |z_1|^2 \neq 0$. Следовательно, в множестве $\mathbf{C}$ комплексных чисел уравнение (3) для любых чисел $z_1 \neq 0$, z_2 разрешимо и имеет единственное решение

$$z = \frac{1}{|z_1|^2}\bar{z}_1 z_2,$$

называемое частным от деления z_1 на z_2. Множества (системы) чисел, обладающие приведенным свойством, называются *системами с делением*. Таким образом, $\mathbf{C}$ – система с делением. Если z_1 – двойное или дуальное число, то из условия $z_1 \neq 0$, вообще говоря, не следует, что $\bar{z}_1 z_1 \neq 0$. Например, для всех двойных чисел вида $z_1 = a \pm ai$, $a \in \mathbf{R}$, и дуальных чисел вида $z_1 = ai$, $a \in \mathbf{R}$, произведение $\bar{z}_1 z_1 = 0$. Для этих чисел уравнение (4) имеет вид $0 \cdot z = \bar{z}_1 z_2$, поэтому оно, а значит, и уравнение (3) не для всех z_1, z_2 разрешимы. Следовательно, множества двойных и дуальных чисел являются системами без деления, и в этих множествах деление на числа $a \pm ai$ и ai, $a \in \mathbf{R}$, и только на них невозможно.

Выясним, для каких чисел $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ произведение $z_1z_2 = 0$. Такие числа называются делителями нуля. В множестве комплексных чисел делителей нуля нет, так как $z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ или $z_2 = 0$. В множестве дуальных чисел $z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = a + ai$, $z_2 = a - ai$, $a \in \mathbf{R}$. Все эти числа при $a \neq 0$ являются делителями нуля. В множестве дуальных чисел делителями нуля являются числа ai, $a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, так как $ai \cdot bi = abi^2 = 0$ для любых действительных a, b.

Из приведенных свойств чисел вида (1) следует, что комплексные числа обладают всеми основными свойствами действительных чисел, связанными с операциями сложения и умножения, в то время как для двойных и дуальных чисел многие из этих свойств не выполняются. По этой причине комплексные числа нашли широкое применение в различных разделах математики и других областях науки. Для них определены и изучены практически все положения действительного анализа: последовательности, ряды, функции, дифференцирование, интегрирование и т.д. [1]. Для двойных и дуальных чисел также можно определить многие понятия действительного анализа и построить соответствующую теорию [2].

2-й шаг процедуры Грассмана–Клиффорда

Пусть z_1, z_2 – произвольные числа вида (1) с мнимой единицей i, удовлетворяющей условию (2), а j – некоторый новый символ (объект), удовлетворяющий условию

$$j^2 = \delta, \tag{5}$$

где δ равно -1, или 1, или 0, коммутирующий с действительными числами при умножении, а при умножении на символ i справа антикоммутирующий с ним ($ji = -ij$), или коммутирующий ($ji = ij$), или вырожденный ($ji = 0$), то есть

$$ji = \alpha ij, \tag{6}$$

где α равно -1, или 1, или 0. Рассмотрим множество чисел вида

$$u = z_1 + z_2 j. \tag{7}$$

Так как $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то $u = a + bi + ci + dij$. Произведение ij представляет собой математический объект с новыми свойствами. Обозначим $ij = k$. Тогда

$$u = a + bi + cj + dk. \tag{8}$$

Для числа u символы i, j, k называются *мнимыми* единицами, причем i, j называются *главными*. В данном случае всевозможные произведения символов i, j, k друг на друга не задаются, а находятся на основании равенств (2), (5), (6). Эти произведения приведены в табл. 1. В этой и последующих таблицах приводятся результаты умножения символов, расположенных в первом столбце, на символы, расположенные в первой строке. Из таблицы видно, что в

Таблица 1

	i	j	k
i	ε	k	εj
j	αk	δ	$\alpha\delta i$
k	$\alpha\varepsilon j$	δi	$\alpha\varepsilon\delta$

случае $\alpha = 1$ произведение любых двух из символов i, j, k является коммутативным, а в случае $\alpha \neq 1$ произведения ij, ik, jk некоммутативны. Следовательно, в случае $\alpha = 1$ произведение чисел вида (6) всегда коммутативно, а в случаях $\alpha = -1$ и $\alpha = 0$ оно некоммутативно, то есть найдутся такие числа u_1, u_2, что $u_1u_2 \neq u_2u_1$. Используя табл. 1 также можно показать, что в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$ произведение любых трех символов i, j, k ассоциативно, то есть $(ii)j = i(ij)$, $(ij)k = i(jk)$ и т.д., а в случае $\alpha = 0$ оно, вообще говоря, неассоциативно. Например, $(ji)k = \alpha k \cdot k = \alpha^2\varepsilon\delta$, $j(ik) = j \cdot \varepsilon j = \varepsilon j^2 = \varepsilon\delta$, то есть $(ji)k \neq j(ik)$ при $\alpha = 0$ и $\varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$. Следовательно, в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$ произведение любых трех чисел вида (8) обладает свойством ассоциативности, что не всегда имеет место в случае $\alpha = 0$.

Задача 1. Пользуясь табл. 1, изучите системы чисел вида (8), когда: 1) $\alpha = \varepsilon = -1$, $\delta = 1$; 2) $\alpha = -1$, $\varepsilon = \delta = 1$; 3) $\alpha = -1$, $\varepsilon = \delta = 0$. Покажите, что в этих системах равенство $\|u_1u_2\| = \|u_1\| \cdot \|u_2\|$ для нормы $\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, вообще говоря, не выполняется. Приведите примеры, когда уравнения $u_1u = u_2$, $uu_1 = u_2$, где $u_1 \neq 0$, в этих системах не имеют решений.

Задача 2. Постройте и изучите систему чисел вида (7), где z_1, z_2 принадлежат разным системам чисел, например z_1 — комплексное, а z_2 — дуальное число. Покажите. что эта система имеет три мнимые единицы и условия (2), (5), (6) недостаточны для нахождения всевозможных произведений мнимых единиц друг на друга.

Кватернионы

Рассмотрим более подробно числа (8), когда в условиях (2), (5), (6) $\varepsilon = \delta = \alpha = -1$, то есть $i^2 = j^2 = -1$ и $ji = -ij$. В этом случае мнимые единицы i, j, k перемножаются согласно табл. 2, а сами числа, впервые изученные Гамильтоном, называются *кватернионами*. Множество кватернионов обозначается **H**.

Таблица 2

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Для любого кватерниона $u = a + bi + cj + dk$ верны равенства

$$u\bar{u} = \bar{u}u = \|u\|^2, \qquad \overline{u_1u_2} = \bar{u}_2\bar{u}_1, \qquad \|u_1u_2\| = \|u_1\| \cdot \|u_2\|, \tag{9}$$

где $\bar{u} = a - bi - cj - dk$ — кватернион, сопряженный к u, а $\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ — норма кватерниона u. Действительно, так как $u = z_1 + z_2j$, где $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ — комплексные числа, $\bar{u} = \bar{z}_1 - z_2j$ и для комплексных чисел $zj = j\bar{z}$, $z\bar{z} = |z|^2$, то

$$u\bar{u} = (z_1 + z_2j)(\bar{z}_1 - z_2j) = z_1\bar{z}_1 - z_2jz_2j - z_1z_2j + z_2j\bar{z}_1 =$$
$$= z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2j^2 - z_1z_2j + z_2z_1j =$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \|u\|^2.$$

Остальные равенства доказываются аналогично.

Используя равенства (9) решим уравнения

$$u_1u = u_2, \qquad \upsilon u_1 = u_2, \tag{10}$$

где u, υ — искомые, а $u_1 \neq 0$, u_2 — заданные кватернионы. Умножив обе части этих уравнений на $\bar{u}_1$ слева и справа соответственно, получим уравнения $\|u_1\|^2u = \bar{u}_1u_2$, $\upsilon\|u_1\|^2 = u_2\bar{u}_1$. Так как $\|u_1\|^2$ — действительное ненулевое число, то уравнения (10) имеют единственные решения $u = \frac{1}{\|u_1\|^2}\bar{u}_1u_2$ и $\upsilon = \frac{1}{\|u_1\|^2}u_2\bar{u}_1$, называемые соответственно левым и правым частными от деления u_2 на u_1. В общем случае, так как произведение кватернионов некоммутативно (например, $ij \neq ji$), то $u \neq \upsilon$. Следовательно, **H** — система с делением.

Таким образом, умножение в множестве кватернионов обладает всеми основными свойствами умножения действительных и комплексных чисел, кроме свойства коммутативности и связанных с ним свойств. По аналогии с действительными и комплексными числами для кватернионов можно определить понятие аргумента и ввести тригонометрическую форму, рассматривать последовательности, ряды и функции, операции дифференцирования, интегрирования и т.д. [3, 4]. Так же, как арифметические действия над комплексными числами соответствуют простейшим геометрическим преобразованиям плоскости (параллельному сдвигу, вращению, преобразованию подобия, центральной и осевой симметрии), действия над кватернионами соответствуют подобным преобразованиям трех- и четырехмерных пространств, а произведение кватернионов друг на друга непосредственно связано со скалярным и векторным произведениями трехмерных векторов.

n-й шаг процедуры Грассмана–Клиффорда

Продолжая описанный процесс по математической индукции, на n-м шаге получим числа вида

$$w = \upsilon_1 + \upsilon_2 l, \tag{11}$$

где υ_1, υ_2 – построенные на $(n-1)$-м шаге числа видов (1), (7) и т.д., а l – новый символ, обладающий свойствами, аналогичными свойствам символов i, j. Очевидно, число w имеет вид

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_m i_m, \tag{12}$$

где $m = 2^n - 1$; $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – действительные числа; $i_1, i_2, \ldots, i_m$ – мнимые единицы, коммутирующие с действительными числами при умножении. Мнимые единицы $i_1 = i$, $i_2 = j$, ..., $i_n = l$ называются главными, а остальные выражаются через них по формуле $i_s = i_p i_q \ldots i_r$, где $1 \le p < q < \ldots < r \le n$. Всевозможные произведения мнимых единиц друг на друга полностью находятся на основании заданных правил умножения главных мнимых единиц друг на друга:

$$\begin{gathered} i_p^2 = \varepsilon_p, \quad i_q i_p = \alpha_{pq} i_p i_q, \\ p < q; \quad p, q = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered} \tag{13}$$

где ε_p, α_{pq} равны –1, или 1, или 0. Например, для мнимой единицы $i_{n+1} = i_1 i_n$ имеем $i_{n+1}^2 = i_1 i_n i_1 i_n = \alpha_{1n} i_1 i_1 i_n i_n = \alpha_{1n} \varepsilon_1 \varepsilon_n$.

При $n = 1$ и $\varepsilon_1 = -1$ числа (11), (12) совпадают с комплексными числами, при $n = 1$, $\varepsilon_1 = 1$ – с двойными, при $n = 1$, $\varepsilon_1 = 0$ – с дуальными, при $n = 2$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $\alpha_{12} = -1$ – с кватернионами. К настоящему времени хорошо изучены числа, когда в (13) все $\alpha_{pq} = -1$ (числа Клиффорда); все $\varepsilon_p = 0$, $\alpha_{pq} = -1$ (числа Грассмана); $n = 3$ и все $\varepsilon_p = 1$, $\alpha_{pq} = -1$ (числа Паули); $n = 4$ и $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$, $\alpha_{pq} = -1$ (числа Дирака); $n = 5$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$, $\alpha_{pq} = -1$ (числа Калуцы) и др. Для этих чисел построена теория, аналогичная теории функций комплексного переменного, благодаря чему они нашли широкое применение в современной математике и различных областях науки: неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, квантовой теории поля, теории упругости и т.д. [5–7].

ЧИСЛА ПАУЛИ

Эти числа имеют вид

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_{12} + a_5 i_{13} + a_6 i_{23} + \alpha_7 i_{123},$$

где i_1, i_2, i_3 – главные и $i_{12} = i_1 i_2$, $i_{13} = i_1 i_3$, $i_{23} = i_2 i_3$, $i_{123} = i_1 i_2 i_3$ – остальные мнимые единицы, всевозможные произведения которых друг на друга находятся на основе равенств

$$\begin{gathered} i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = 1, \\ i_2 i_1 = -i_1 i_2, \qquad i_3 i_1 = -i_1 i_3, \qquad i_3 i_2 = -i_2 i_3. \end{gathered} \tag{14}$$

Таблица 3

	i_1	i_2	i_3	i_{12}	i_{13}	i_{23}	i_{123}
i_1	1	i_{12}	i_{13}	i_2	i_3	i_{123}	i_{23}
i_2	$-i_{12}$	1	i_{23}	$-i_1$	$-i_{123}$	i_3	$-i_{13}$
i_3	$-i_{13}$	$-i_{23}$	1	i_{123}	$-i_1$	$-i_2$	i_{12}
i_{12}	$-i_2$	i_1	i_{123}	-1	$-i_{23}$	i_{13}	$-i_3$
i_{13}	$-i_3$	$-i_{123}$	i_1	i_{23}	-1	$-i_{12}$	i_2
i_{23}	i_{123}	$-i_3$	i_2	$-i_{13}$	i_{12}	-1	$-i_1$
i_{123}	i_{23}	$-i_{13}$	i_{12}	$-i_3$	i_2	$-i_1$	-1

Например, $i_{12}^2 = i_1 i_2 i_1 i_2 = -i_1 i_1 i_2 i_2 = -1$, $i_{12} i_{23} = i_1 i_2 i_2 i_3 = i_1 i_3 = i_{13}$ и т.д. Результаты всевозможных произведений мнимых единиц друг на друга приведены в табл. 3. Используя ее или равенства (14) можно показать, что произведение чисел Паули ассоциативно. Однако оно, вообще говоря, некоммутативно. Этими свойствами обладают и все числа Клиффорда, кроме комплексных чисел.

Задача 3. Докажите, что норма $\|w\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_7^2}$ числа Паули w находится из равенства $4\|w\|^2 = w\tilde{w} + w_1\tilde{w}_1 + w_2\tilde{w}_2 + w_3\tilde{w}_3$, где $w_p = i_p w i_p$, а "сопряжение" $\tilde{w} = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 - a_4 i_{12} - a_5 i_{13} - a_6 i_{23} - a_7 i_{123}$. Покажите, что равенство $\|w_1 w_2\| = \|w_1\| \cdot \|w_2\|$ для чисел Паули, вообще говоря, неверно и уравнения $w_1 w = w_2$, $w w_1 = w_2$ разрешимы не для всех $w_1 \ne 0$, w_2. Приведите примеры.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Все рассмотренные выше числа являются примерами гиперкомплексных чисел. Так называются математические объекты вида

$$u = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n, \tag{15}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа, а $i_0, i_1, \ldots, i_n$ – мнимые единицы, коммутирующие с действительными числами при умножении. Для этих чисел равенство и сумма определяются так же, как для векторов, а произведение их друг на друга находится на основании заданных правил умножения мнимых единиц друг на друга:

$$i_p i_q = \alpha_{pq0} + \alpha_{pq1} i_1 + \alpha_{pq2} i_2 + \ldots + \alpha_{pqn} i_n, \qquad (16)$$

где $\alpha_{pqr} \in \mathbf{R}$; $p, q = 1, 2, \ldots, n$.

Множество чисел (15) с определенными выше операциями сложения, умножения и понятием равенства называется *гиперкомплексной системой размерности* (*ранга*) $n + 1$. Эта система называется *коммутативной*, если произведение коммутативно, то есть $u_1u_2 = u_2u_1$ для любых чисел u_1, u_2 системы; *ассоциативной*, если произведение ассоциативно, то есть $(u_1u_2)u_3 = u_1(u_2u_3)$; *системой с делением*, если уравнения $u_1u = u_2$, $uu_1 = u_2$ для любых $u_1 \neq 0$ и u_2 разрешимы единственным образом. Примерами коммутативной ассоциативной системы с делением являются множества действительных и комплексных чисел. Множество кватернионов является некоммутативной ассоциативной системой с делением, а множество чисел Паули является некоммутативной ассоциативной системой без деления. Примером некоммутативной неассоциативной системы без деления является система чисел вида (8) с табл. 1 умножения мнимых единиц, когда $\alpha = 0$, $\varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$. В соответствии с современной математической терминологией гиперкомплексная система, в том числе и все приведенные примеры систем чисел, является *алгеброй*. Так называется множество, на котором определены три операции (“сложение”, “умножение элементов множества друг на друга” и “умножение на число”), удовлетворяющие определенным условиям.

ПРОЦЕДУРА УДВОЕНИЯ КЭЛИ–ДИКСОНА

Пусть $\mathbf{U}$ – гиперкомплексная система чисел вида (15) с некоторым законом умножения (16). Рассмотрим систему $\mathbf{U}^{(2)}$ чисел вида

$$u = u_1 + u_2 e,$$

где $u_1, u_2 \in \mathbf{U}$, а e – новый символ, коммутирующий с действительными числами при умножении. Определим равенство, сумму и произведение чисел системы $\mathbf{U}^{(2)}$ следующим образом:

$$u_1 + u_2 e = \upsilon_1 + \upsilon_2 e \Leftrightarrow u_1 = \upsilon_1,\ u_2 = \upsilon_2;$$

$$(u_1 + u_2 e) + (\upsilon_1 + \upsilon_2 e) = u_1 + \upsilon_1 + (u_2 + \upsilon_2)e, \qquad (17)$$

$$(u_1 + u_2 e)(\upsilon_1 + \upsilon_2 e) = u_1\upsilon_1 - \bar{\upsilon}_2 u_2 + (\upsilon_2 u_1 + u_2 \bar{\upsilon}_1)e,$$

где $\bar{u} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - \ldots - a_n i_n$. Согласно (17), произведение u на действительное число a равно $(a + 0 \cdot e)(u_1 + u_2 e) = au_1 + au_2 e$.

Множество $\mathbf{U}^{(2)}$, представляющее собой гиперкомплексную систему размерности $2(n + 1)$, называется *удвоением системы* $\mathbf{U}$, а сам процесс построения системы $\mathbf{U}^{(2)}$ называется *процедурой удвоения Кэли–Диксона*. Эта процедура отличается от процедуры Грассмана–Клиффорда правилом умножения (17). Кроме того, исходная система $\mathbf{U}$ может иметь любую размерность и любой закон умножения (16) мнимых единиц.

Рассмотрим системы чисел, получаемые из системы действительных чисел, взятой в качестве первоначальной, при многократном применении процедуры Кэли–Диксона.

1. $\mathbf{U} = \mathbf{R}$. Тогда $\mathbf{U}^{(2)}$ есть множество чисел вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbf{R}$ и $i = e$. Согласно (17), закон умножения имеет вид

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i,$$

то есть совпадает с законом умножения системы $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Следовательно, $\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{C}$.

2. $\mathbf{U} = \mathbf{C}$. Тогда $\mathbf{U}^{(2)}$ – множество чисел вида $z_1 + z_2 j$, где $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ и $j = e$. Так как $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то $u = a + bi + cj + dk$, где $k = ij$. На основании формулы (17) можно показать, что символы i, j, k перемножаются согласно табл. 2 (предоставляем читателю проверить это самому). Следовательно, $\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{H}$ – система кватернионов.

ОКТАВЫ

Пусть $\mathbf{U} = \mathbf{H}$. Тогда $\mathbf{U}^{(2)}$ есть множество чисел вида

$$w = u_1 + u_2 e =$$

$$= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + (a_4 + a_5 i + a_6 j + a_7 k)e =$$

$$= a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7, \qquad (18)$$

где $u_1, u_2 \in \mathbf{H}$, $a_p \in \mathbf{R}$, а $i_1 = i$, $i_2 = j$, $i_3 = k$, $i_4 = e$, $i_5 = ie$, $i_6 = je$, $i_7 = ke$ – мнимые единицы, всевозможные произведения которых друг на друга на основании формулы (17) и табл. 2 определяются табл. 4.

Таблица 4

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	-1	i_3	$-i_2$	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6
i_2	$-i_3$	-1	i_1	i_6	i_7	$-i_4$	$-i_5$
i_3	i_2	$-i_1$	-1	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$
i_4	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	i_1	i_2	i_3
i_5	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_1$	-1	$-i_3$	i_2
i_6	i_7	i_4	$-i_5$	$-i_2$	i_3	-1	$-i_1$
i_7	$-i_6$	i_5	i_4	$-i_3$	$-i_2$	i_1	-1

Числа (18) с приведенной таблицей умножения мнимых единиц называются *октавами*. Из этой таблицы видно, что не все произведения мнимых единиц друг на друга коммутативны и ассоциативны. Например, $i_1 i_2 \neq i_2 i_1$, $(i_3 i_4) i_5 \neq i_3(i_4 i_5)$. Следовательно, произведение октав, вообще говоря, некоммутативно и неассоциативно.

Для октав так же, как для комплексных чисел и кватернионов, справедливы равенства $w\bar{w} = \bar{w}w = \|w\|^2$, $\|w_1 w_2\| = \|w_1\| \cdot \|w_2\|$, где $\bar{w} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - \ldots$

$\dots - a_7 i_7$ — сопряжение к w, $\|w\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_7^2}$ — норма числа w, и уравнения $w_1 w = w_2$, $w w_1 = w_2$ при любых $w_1 \neq 0$, w_2 разрешимы и имеют единственное решение. Эти утверждения следуют из равенства $w = u_1 + u_2 e$, где $u_1, u_2 \in \mathbf{H}$, и равенств (9). Следовательно, множество октав есть некоммутативная неассоциативная система с делением.

Хотя октавы обладают многими свойствами действительных и комплексных чисел, тем не менее они не нашли такого широкого применения, как эти числа. Продолжение процесса удвоения Кэли–Диксона на следующем шаге приведет к гиперкомплексным числам с 15 мнимыми единицами и т.д. Однако получаемые при этом системы чисел являются некоммутативными, неассоциативными и системами без деления, в силу чего они также не нашли особых приложений.

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧИСЕЛ

Имеются разные формы представления рассмотренных выше чисел. Комплексные, двойные и дуальные числа $z = a + bi$ можно представлять, например, в виде упорядоченных пар действительных чисел с покомпонентным сложением и соответствующими правилами умножения:

$$(a; b)(c; d) = (ac - bd; ad + bc),$$

$$(a; b)(c; d) = (ac + bd; ad + bc),$$

$$(a; b)(c; d) = (ac; ad + bc).$$

Именно так представляются комплексные числа при вычислениях на компьютерах.

Для многих целей рассматриваемые числа удобно представлять еще в виде матриц, с которыми читатель уже ознакомился в статье [8].

1. Пусть $z = a + bi$ — комплексное число. Запишем его в виде $z = ai_0 + bi_1$, где $i_0 = 1$, $i_1 = i$. Отойдя от числовой сути символа i_0, будем рассматривать его как некоторый математический объект, обладающий вместе с объектом i_1 всеми свойствами числа 1, то есть

$$i_0^2 = i_0, \qquad i_0 i_1 = i_1 i_0 = i_1, \qquad i_1^2 = -i_0, \qquad (19)$$

$$a i_0 = i_0 a, \qquad a i_1 = i_1 a, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

Возьмем в качестве объектов i_0, i_1 квадратные матрицы второго порядка

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что матрицы i_0, i_1 удовлетворяют всем условиям (19). Например,

$$i_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i_0.$$

Через матрицы i_0, i_1 “число” $z = ai_0 + bi_1$ запишется в виде

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

это *матричное представление* комплексного числа z. Тем самым между множеством комплексных чисел и множеством матриц вида (20) устанавливается взаимно однозначное соответствие, при котором сумме и произведению комплексных чисел соответствуют сумма и произведение матриц вида (20). Такое соответствие между двумя множествами называется изоморфизмом. С этим понятием читатель уже встретился в статье [9]. В силу указанного изоморфизма комплексные числа и матрицы вида (20) обладают одинаковыми свойствами. Например, произведение матриц вида (20) снова является матрицей вида (20), а матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix},$$

где первая матрица ненулевая, всегда разрешимо и имеет единственное решение.

2. Для кватерниона $u = a + bi + cj + dk = ai_0 + bi_1 + ci_2 + di_3$ возьмем

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad i_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad i_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

где $i \in \mathbf{C}$. Матрицы i_0 и i_1, i_2, i_3 обладают всеми свойствами числа 1 и мнимых единиц i, j, k (проверьте это сами). Тогда матричное представление кватерниона u имеет вид

$$u = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

где $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ — комплексные числа. Тем самым между множеством кватернионов и множеством комплексных матриц вида (21) устанавливается изоморфизм.

3. Для матричного представления чисел Паули традиционно используют следующие представления объекта i_0 и главных мнимых единиц:

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad i_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матричные представления остальных мнимых единиц и самого числа получаются на основе равенств $i_{12} = i_1 i_2$, $i_{13} = i_1 i_3$, $i_{23} = i_2 i_3$, $i_{123} = i_1 i_2 i_3$.

Аналогичные матричные представления имеются и для других чисел. Рекомендуем читателю самому попробовать получить матричные представления двойных, дуальных и других чисел.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системы гиперкомплексных чисел, способы их построения и их формы представления разнообразны и практически неисчерпаемы. Особое место среди бесконечного многообразия систем чисел занимают те, которые обладают основными свойствами действительных чисел: коммутативностью и ассоциативностью умножения, возможностью деления, то есть однозначного решения уравнений $ax = b$, $xa = b$ $(a \neq 0)$, и возможностью введения нормы (модуля) так, чтобы норма произведения чисел была равна произведению норм сомножителей. Согласно теоремам Фробениуса и Гурвица, всеми этими свойствами обладает только система **C** комплексных чисел. Если отказаться от свойства коммутативности умножения, то к множеству **C** добавится еще система **H** кватернионов, а если отказаться и от свойства ассоциативности умножения, то к множествам **C**, **H** добавится система октав. Других систем, обладающих указанными свойствами, нет. В частности, невозможно построить и систему чисел вида $a + bi + cj$, в которой можно выполнять хотя бы деление. В то же время отсутствие у других чисел свойств действительных чисел не означает, что они не интересны и неважны. Например, числа Паули, Калуцы и Дирака имеют важные приложения, хотя для них не выполняется свойство коммутативности умножения и невозможно деление их друг на друга.

Автор выражает благодарность эксперту профессору Э.Б. Винбергу за ценные замечания и советы по улучшению содержания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978. 416 с.

2. *Ивлев Д.Д.* О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961. Вып. 6. С. 197–203.

3. *Кантор И.Л.*, *Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.

4. *Понтрягин Л.С.* Обобщения чисел. М.: Наука, 1986. 120 с.

5. *Brackx F.*, *Delanghe R.*, *Sommen F.* Clifford Analysis. Boston; L.; Melbourne: Pitnam, 1982. 302 p.

6. *Бурлаков М.П.* Клиффордовы структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. М.: ВИНИТИ, 1995. Т. 30: Геометрия 3. С. 205–257.

7. *Райдер Л.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987.

8. *Шеврин Л.Н.* Тождества в алгебре // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. №7. С. 111–118.

9. *Шеврин Л.Н.* Что такое полугруппа // Там же. 1997. № 4. С. 99–104.

10. *Ван-дер-Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.

* * *

Василий Васильевич Сильвестров, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова. Область научных интересов – приложения теории функций комплексного переменного в механике. Автор и соавтор более 60 научных статей и двух учебных пособий.