INTRODUCING SUPERMATHEMATICS

I. L. BUCHBINDER

The basic ideas and elementary construction of algebra and analysis with anticommuting variables are discussed. The notion of algebra is considered as one of the fundamental notions of modern mathematics, with references to its special types. The notion of Grassman algebra is introduced and elements of analysis with anticommuting variables are discussed.

Представлены основные идеи и элементарные конструкции алгебры и анализа с антикоммутирующими числами. Рассматривается одно из фундаментальных понятий современной математики – понятие алгебры. Приводятся конкретные примеры и определяются специальные виды алгебр. Вводится понятие грассмановой алгебры и обобщаются элементы анализа с антикоммутирующими переменными.

ЗНАКОМСТВО С СУПЕРМАТЕМАТИКОЙ

И. Л. БУХБИНДЕР

Томский государственный педагогический университет

1. Понятие числа является одним из основных, первичных понятий математики, одной из фундаментальных математических абстракций. В процессе развития математики и расширения сферы ее приложений термин “число” каждый раз наполнялся новым, порой далеко не очевидным смыслом. Хорошо известны такие понятия, как натуральные числа, рациональные и иррациональные числа, положительные и отрицательные числа, трансцендентные числа. Все эти виды чисел объединяются одним понятием вещественного числа. Однако термин “число” в математике не исчерпывается вещественными числами. Школьникам старших классов знакомы комплексные числа, существует также обобщение понятия комплексного числа, называемое кватернионом (см., например, [1, 2, 8]), которое характеризуется тремя мнимыми единицами. В математике используются обобщения понятия числа с еще большим количеством мнимых единиц. Важно отметить, что конкретное числовое множество определяется аксиоматически путем задания определенного комплекса условий, касающихся правил действия с этими числами (см., например, книгу [3]).

Развитие современной квантовой физики, в первую очередь квантовой теории поля, привело к необходимости рассматривать числа, обладающие фантастическими с точки зрения обычных числовых множеств свойствами: произведение двух чисел меняет знак при перестановке сомножителей, в частности произведение числа на себя равно нулю. Очевидно, что ни вещественные, ни комплексные числа такими свойствами обладать не могут. Это касается и кватернионов. Чтобы отличать эти необычные числа от обычно используемых, был введен новый термин – антикоммутирующие числа. Мало того, что появились антикоммутирующие числа, физикам потребовались функции, зависящие от переменных, в качестве которых использовались антикоммутирующие числа, и возникла необходимость дифференцировать и интегрировать эти функции. Таким образом, перед математикой была поставлена проблема разработки нового математического раздела, получившего название алгебры и анализа с антикоммутирующими числами, или суперматематики. Определяющий вклад в создание суперматематики внес московский математик Ф.А. Березин [4].

Первые работы Ф.А. Березина по суперматематике появились в первой половине 60-х годов, однако термин “суперматематика” возник во второй половине 70-х годов и связан с новым направлением в теоретической физике, получившим название суперсимметрии. Суперсимметрия была открыта в 1971 году сотрудниками Физического института АН СССР (Москва) Ю.А. Гольфандом и Е.П. Лихтманом (см. популярное изложение суперсимметрии в статье [5]; учебный материал, рассчитанный на математически подготовленного читателя, дан в книге [6]). В середине 70-х годов стало ясно, что алгебра и анализ с антикоммутирующими числами являются тем математическим аппаратом, который идеально приспособлен для описания суперсимметрии. В результате этого возникли термины "суперралгебра", "супергеометрия", "суперанализ" или в целом "суперматематика".

Предлагаемая статья ставит цель познакомить читателя с основными идеями и понятиями суперматематики и рассчитана на учителей математики и физики, а также студентов старших курсов физико-математического профиля педагогических вузов.

2. Как мы уже отмечали, множество чисел определенного типа (натуральных, рациональных, вещественных, комплексных и т.д.) задается аксиоматически путем описания правил действия с этими числами. Наша цель состоит в том, чтобы задать правила действия с антикоммутирующими числами. Но для этого надо сначала ввести подходящие математические конструкции и понятия.

Вспомним, что вещественные и комплексные числа можно складывать и перемножать по хорошо известным правилам. Имеются и другие знакомые объекты, которые можно складывать и перемножать, – это векторы в трехмерном пространстве. Более того, такие векторы можно умножать на вещественные или комплексные числа. Возможность складывать некоторые объекты и умножать их на вещественные или комплексные числа ведет к общему понятию n-мерного линейного пространства, которое мы будем считать известным (определение n-мерного линейного пространства входит во все стандартные программы по математике педагогических вузов и изложено в стандартных учебниках, см., например, [7]).

Продолжим развивать аналогию с множеством векторов трехмерного пространства. Помимо операций, характерных для линейного пространства (сложение векторов и умножение их на вещественные или комплексные числа), для рассматриваемых векторов определено еще их векторное произведение. Абстрагируясь от множества векторов трехмерного пространства, мы приходим к общему понятию алгебры как линейного пространства, для элементов которого определено умножение. Сформулируем соответствующее определение.

Определение 1. Линейное пространство A (вещественное или комплексное) называется (*вещественной или комплексной*) *алгеброй*, если в нем определена бинарная операция умножения элементов, то есть любым двум элементам a, $b \in A$ сопоставляется единственный элемент, обозначаемый $ab \in A$:

$$(a, b) \longrightarrow ab \in A.$$

При этом бинарная операция удовлетворяет свойствам

$$a(\alpha b + \beta c) = \alpha ab + \beta ac,$$
$$(\alpha b + \beta c)a = \alpha ba + \beta ca,$$

где α, β – произвольные вещественные или комплексные числа и a, b, c – произвольные элементы линейного пространства A.

Приведем очевидные примеры алгебр.

1. Множество вещественных чисел, в котором роль бинарной операции умножения играет обычное произведение этих чисел.

2. Множество комплексных чисел, в котором роль бинарной операции умножения играет обычное произведение комплексных чисел.

3. Множество векторов трехмерного пространства, в котором роль бинарной операции умножения играет векторное произведение векторов.

4. Множество матриц $n \times n$, в котором роль бинарной операции умножения играет обычное произведение матриц.

5. Множество многочленов $P_n(x)$ произвольной степени n, зависящих от вещественной переменной x, с вещественными коэффициентами. Роль бинарной операции умножения играет обычное произведение многочленов.

6. Множество функций вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно. Роль бинарной операции умножения играет обычное произведение многочленов.

Обратим внимание, что общее определение алгебры включает в себя все то, что понимается под алгеброй в школьном курсе математики. Действительно, школьный курс алгебры по существу имеет дело только с примерами 1, 2, 5, 6, рассмотренными выше.

Понятие алгебры является прекрасной иллюстрацией того, как осуществляется математическая абстракция. Что общего имеется в примерах 1–6? В каждом из них задано некоторое множество объектов. Для этих объектов определены операции сложения и умножения на вещественные или комплексные числа. Кроме того, для каждой пары объектов определена операция умножения их друг на друга. Выделяя то общее, что присутствует в данных примерах, мы приходим к определению абстрактной алгебры и возможности изучения ее абстрактной структуры.

Для дальнейшего нам потребуется еще несколько определений, выделяющих алгебры, обладающие некоторыми специальными свойствами.

Определение 2. Алгебра называется *коммутативной*, если для любых двух ее элементов a и b выполняется $ab = ba$.

Определение 3. Алгебра называется *ассоциативной*, если для любых трех ее элементов a, b, c выполняется $(ab)c = a(bc)$.

Нетрудно заметить, что примеры 1 и 2 задают коммутативные и ассоциативные алгебры. Пример 3 задает некоммутативную и неассоциативную алгебру. Пример 4 соответствует некоммутативной, ассоциативной алгебре.

Определение 4. Если в алгебре A существует элемент e, обладающий обычными свойствами единицы $ea = ae = a$, $\forall a \in A$, то эта алгебра называется *алгеброй с единицей*, а элемент e – *единицей алгебры*.

Очевидно, что примеры 1, 2, 4 отвечают алгебре с единицей, где в примерах 1, 2 роль единицы алгебры играет число 1, а в примере 4 – единичная матрица. Пример 3 отвечает алгебре без единицы.

Определение 5. Алгебра называется *конечномерной*, если соответствующее линейное пространство является конечномерным.

Далее мы ограничим наше рассмотрение только случаем конечномерных алгебр.

Определение 6. Пусть A – ассоциативная алгебра с единицей и пусть B – некоторое подмножество элементов из A. Подмножество B называется *системой образующих элементов алгебры* A, если любой $a \in A$ может быть представлен как многочлен конечного порядка, построенный из элементов B и их произведений:

$$a = \alpha e + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} C_{i_1 i_2 \dots i_k} b^{i_1} b^{i_2} \dots b^{i_k}.$$

Здесь α и $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ – вещественные или комплексные числа, e – единица алгебры и $b^i \in B$, $i = 1, 2, \dots, p$. Элементы b^i называются *образующими алгебры* A.

Прокомментируем это определение. Пусть B – система образующих алгебры A. Поскольку $B \subset A$, то для элементов $b^i \in B$ определена бинарная операция умножения и определены операции, задающие линейное пространство. Давайте начнем перемножать элементы из B между собой конечное число раз, умножать их на вещественные или комплексные числа и складывать. Утверждается, что таким образом мы исчерпаем все элементы алгебры A.

Далее мы будем предполагать, что единичный элемент e совпадает с числом 1.

Теперь мы готовы перейти к рассмотрению антикоммутирующих чисел.

3. Антикоммутирующие числа естественным образом вводятся в рамках математической конструкции, называемой грассмановой алгеброй.

Грассманова алгебра или алгебра Грассмана[1] представляет собой конкретный пример алгебры, в которой задаются специальные свойства ее элементов.

[1] Герман Грассман (Hermann Günter Grassmann) (1809–1877) – немецкий математик.

Определение 7. Ассоциативная алгебра с единицей называется *алгеброй Грассмана*, если в ней существует система линейно-независимых образующих элементов $\{\theta^i, i = 1, 2, \dots, n\}$, обладающих свойствами:

$$\text{(a)} \qquad \theta^i\theta^j + \theta^j\theta^i = 0, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n; \qquad (1)$$

(b) любое другое соотношение между образующими элементами θ^i является следствием соотношения (1).

В частности, $(\theta^i)^2 = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Алгебра Грассмана с n образующими обозначается Λ_n.

Основным определяющим свойством образующих грассмановой алгебры является антикоммутативность $\theta^i\theta^j = -\theta^j\theta^i$. Это означает, что образующие θ^i ни в каком смысле не могут быть обычными вещественными или комплексными числами, многочленами, матрицами или векторами в трехмерном пространстве. Объекты θ^i представляют собой независимые, самостоятельные математические понятия, правила действия с которыми диктуются соотношением (1).

Выясним, как выглядит произвольный элемент алгебры Грассмана Λ_n. Начнем с алгебры Λ_1. В этом случае имеется только один образующий элемент θ, причем $(\theta)^2 = 0$ и поэтому $(\theta)^k = 0$ при $k \geq 2$. Следовательно, произвольный элемент алгебры Λ_1 есть $a = \alpha + c\theta$, где α и c – вещественные или комплексные числа.

Рассмотрим алгебру Λ_2, содержащую два образующих элемента θ^1, θ^2, причем $(\theta^1)^2 = (\theta^2)^2 = 0$, $\theta^1\theta^2 = -\theta^2\theta^1$. Путем их перемножения можно построить еще один элемент $\theta^1\theta^2$ ($\theta^1\theta^2 = -\theta^2\theta^1$). Значит, произвольный элемент алгебры Λ_2 выглядит так: $a = \alpha + c_1\theta^1 + c_2\theta^2 + \frac{1}{2} c_{12}\theta^1\theta^2$. Здесь α, c_1, c_2, c_{12} – обычные числа.

Обратимся теперь к общему случаю Λ_n. Здесь мы имеем n образующих элементов $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$. Перемножая эти элементы получим мономы $\theta^{i_1}\theta^{i_2}$, $\theta^{i_1}\theta^{i_2}\theta^{i_3}$, ..., $\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_n}$, где индексы $i_1, i_2, \dots, i_n$ принимают значения $1, 2, \dots, n$. Заметим теперь, что любой моном $\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_n}\theta^{i_{n+k}}$, где $k \geq 1$, всегда обращается в нуль. Дело в том, что в этом случае среди сомножителей $\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_{n+k}}$ какой-нибудь из элементов θ^i встретится по крайней мере два раза. Используя соотношение (1) переставим сомножители так, чтобы возникло произведение $(\theta^i)^2 = 0$. Например, $\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4\theta^2 = \theta^1\theta^2\theta^2\theta^3\theta^4 = \theta^1(\theta^2)^2\theta^3\theta^4 = 0$. В результате мы получаем следующие независимые мономы: θ^i, $\theta^{i_1}\theta^{i_2}$, ..., $\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_n}$. Поэтому произвольный элемент алгебры Грассмана Λ_n имеет вид

$$a = \alpha + c_i\theta^i + \frac{1}{2} c_{i_1 i_2}\theta^{i_1}\theta^{i_2} + \dots + \frac{1}{n!} c_{i_1 i_2 \dots i_n}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_n}, \quad (2)$$

где α, c_i, $c_{i_1 i_2}$, ..., $c_{i_1 i_2 \dots i_n}$ – вещественные или комплексные числа. По повторяющимся индексам i, i_1, ..., i_n подразумевается суммирование от 1 до n в каждом слагаемом. Обратим внимание, что в силу антикоммутативности образующих элементов все коэффициенты $c_{i_1 i_2}$, ..., $c_{i_1 i_2 \dots i_n}$ достаточно считать полностью антисимметричными. Заметим также, что любой моном, содержащий ровно n сомножителей, равен с точностью до знака произведению $\theta^1\theta^2\dots\theta^n$.

Соотношение (2) выглядит как разложение элемента a некоторого линейного пространства по базису, образованному линейно-независимыми мономами $1, \theta^i, \theta^{i_1}\theta^{i_2}, \dots, \theta^1\theta^2\dots\theta^n$. Подсчитаем число базисных элементов. Число образующих θ^i равно n, число мономов $\theta^{i_1}\theta^{i_2}$ – числу сочетаний из n элементов по 2, то есть C_n^2, число мономов $\theta^{i_1}\theta^{i_2}\theta^{i_3}$ равно числу сочетаний из n элементов по три, то есть C_n^3, и т.д. В результате число базисных элементов в соотношении (2) составляет $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$. Таким образом, алгебру Грассмана Λ_n можно рассматривать как линейное пространство размерности 2^n.

Введем обозначение

$$f(\theta) = \alpha + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} c_{i_1 \dots i_k}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k}. \tag{3}$$

Выражение (3) будем называть функцией антикоммутирующих переменных $\theta = \{\theta^1\theta^2\dots\theta^n\}$. Мы видим, что произвольная функция антикоммутирующих переменных представляет собой не более чем линейную комбинацию мономов, построенных путем перемножения образующих элементов алгебры Грассмана.

Представим функцию $f(\theta)$ (3) в виде

$$f(\theta) = f_b + f_s(\theta) \tag{4}$$

где $f_b = \alpha$ и $f_s(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} c_{i_1 \dots i_k}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k}$. Очевидно, что если $\alpha \neq 0$, то $\alpha^m \neq 0$ для любого целого m. В то же время $(f_s(\theta))^l \equiv 0$ для некоторого целого l. Следуя Б. Де Витту, будем называть f_b телом, а $f_s(\theta)$ – душой функции $f(\theta)$. Конечно, эти названия носят скорее символический, шутливый характер. Название "тело" отражает тот факт, что f_b является обычным числом, то есть привычным объектом, который как бы материален. Термин "душа" указывает, что $f_s(\theta)$ – наиболее существенная часть функции $f(\theta)$, однако никаким обычным числом $f_s(\theta)$ не является и его некоторая степень тождественно равна нулю. Иногда используется терминология, согласно которой выражение вида (2) называется суперчислом, а образующие θ^i – антикоммутирующими числами.

Соотношение (2) показывает, что любой элемент $a \in \Lambda_n$ может быть единственным образом представлен в виде

$$a = {}^{(0)}a + {}^{(1)}a, \tag{5}$$

где ${}^{(0)}a$ – линейная комбинация α и мономов $\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k}$ с четными k, а ${}^{(1)}a$ – линейная комбинация тех же мономов, но с нечетными k. Элементы ${}^{(0)}a$ называются четными элементами алгебры Грассмана, а элементы ${}^{(1)}a$ – нечетными. Обозначим: ${}^{(0)}\Lambda_n$ – множество всех четных элементов, ${}^{(1)}\Lambda_n$ – множество всех нечетных элементов. Нетрудно понять, что множества ${}^{(0)}\Lambda_n$, ${}^{(1)}\Lambda_n$ сами являются линейными пространствами и алгебра Грассмана Λ_n представляет собой их (прямую) сумму. Нетрудно заметить, что произведение четных элементов алгебры Грассмана снова является четным элементом, произведение нечетных элементов – четным элементом, произведение четного и нечетного элементов – нечетным элементом. Эти свойства символически записываются так:

$$ {}^{(0)}\Lambda{}^{(0)}\Lambda = {}^{(0)}\Lambda, \qquad {}^{(1)}\Lambda{}^{(1)}\Lambda = {}^{(0)}\Lambda, $$
$$ {}^{(0)}\Lambda{}^{(1)}\Lambda = {}^{(1)}\Lambda{}^{(0)}\Lambda = {}^{(1)}\Lambda. $$

Введем функцию $\varepsilon(a)$ по следующему правилу:

$$\varepsilon(a) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a \in {}^{(0)}\Lambda_n, \\ 1, & \text{если} \quad a \in {}^{(1)}\Lambda_n. \end{cases} \tag{6}$$

Если же $a = {}^{(0)}a + {}^{(1)}a$ и ${}^{(0)}a \neq 0$, ${}^{(1)}a \neq 0$, то $\varepsilon(a)$ не определено. Функция $\varepsilon(a)$ называется грассмановой четностью элемента $a \in \Lambda_n$. Предлагаем читателю в качестве упражнения проверить простейшие свойства грассмановой четности

1) $\varepsilon(ab) = (\varepsilon(a) + \varepsilon(b))(\mathrm{mod}\,2)$,

2) $ab = (-1)^{\varepsilon(a)\varepsilon(b)}ba$,

где элементы $a, b \in \Lambda_n$ таковы, что $\varepsilon(a)$, $\varepsilon(b)$ определены.

Пусть $\{\theta^i, i = 1, 2, \dots, n\}$ – образующие грассмановой алгебры Λ_n. Рассмотрим выражение

$$f(x,\theta) = f_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k}. \tag{7}$$

Здесь $x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^N)$ – обычные вещественные переменные. Выражение (7) называется функцией коммутирующих x^μ, $\mu = 1, 2, \dots, N$, и антикоммутирующих θ^i переменных или функцией со значениями в алгебре Грассмана, или суперфункцией, или суперполем. Именно последний термин используется в теоретической физике. Очевидно, суперфункции (7) формируют линейное пространство, которое обозначается $\Lambda_{N,n}$, где первый индекс N указывает на число обычных (коммутирующих) переменных, а второй индекс – это число антикоммутирующих образующих. Очевидно, что понятие грассмановой четности автоматически переносится на суперфункции.

4. Несмотря на достаточно необычные свойства антикоммутирующих объектов θ^i и суперфункций (7), эти суперфункции можно дифференцировать и интегрировать по θ^i. При этом соответствующие производные и интегралы во многом (но не во всем) аналогичны обычным производным и интегралам.

Начнем с понятия производной. Очевидно, что то определение производной, которое используется в обычном математическом анализе как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, не годится для суперфункций. Дело в том, что для объектов θ^i понятия “приращение” и “деление” не определены. Чтобы ввести подходящее определение производной по антикоммутирующим переменным θ^i, используем некоторые аналогии с обычными функциями.

Заметим, во-первых, что дифференцирование является линейной операцией. Во-вторых, обратим внимание, что производная линейной функции $y = ax + b$ вычисляется очень легко: надо просто зачеркнуть b и x, в результате получится $y' = a$.

Рассмотрим произвольную суперфункцию $f(x, \theta)$ (7). Она представляет собой линейную комбинацию мономов $\theta^{i_1}\theta^{i_2}...\theta^{i_k}$, причем в каждом из них конкретный элемент θ^i присутствует не более одного раза. Другими словами, по отношению к каждому конкретному элементу θ^i любая суперфункция является не более чем линейной функцией. Естественно поэтому определить дифференцирование так, чтобы оно просто вычеркивало соответствующий элемент θ^i. Здесь, однако, есть некоторый нюанс. Элемент θ^i антикоммутирует с другими образующими элементами, в силу чего его можно передвигать по отношению к другим сомножителям монома $\theta^{i_1}\theta^{i_2}...\theta^{i_n}$, что может вести к изменению общего знака. Например, рассмотрим моном $\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4$. Его можно переписать в виде $-\theta^2\theta^1\theta^3\theta^4$, или $-\theta^1\theta^3\theta^2\theta^4$, или $\theta^1\theta^3\theta^4\theta^2$. В каком из четырех этих выражений следует вычеркнуть θ^2, чтобы получить производную по θ^2? Чтобы ответить на этот вопрос, надо просто договориться. В общем случае рассматриваются два варианта: фиксированный элемент θ^i переставляется на первое место слева и вычеркивается или фиксированный элемент переносится на последнее место справа и вычеркивается. В итоге мы приходим к понятиям левой и правой производных.

Итак, определим производные по образующим грассмановой алгебры так, чтобы они обладали свойством линейности. Тогда достаточно задать производные мономов $\theta^{i_1}\theta^{i_2}...\theta^{i_k}$.

Определение 8. *Левая производная монома* $\theta^{i_1}\theta^{i_2}...\theta^{i_k}$ *по образующей* θ^i задается правилами:

1) если среди $\theta^{i_1}, \theta^{i_2}, ..., \theta^{i_k}$ нет образующей θ^i, то левая производная равна нулю;

2) если среди $\theta^{i_1}, \theta^{i_2}, ..., \theta^{i_k}$ присутствует образующая θ^i, то ее надо переставить на первое место слева, пользуясь соотношением (1), и вычеркнуть.

Левая производная по θ^i обозначается $\dfrac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}$.

Определение 9. *Правая производная монома* $\theta^{i_1}\theta^{i_2}...\theta^{i_k}$ *по образующей* θ^i задается правилами:

1) если среди $\theta^{i_1}, \theta^{i_2}, ..., \theta^{i_k}$ нет образующей θ^i, то правая производная равна нулю;

2) если среди $\theta^{i_1}, \theta^{i_2}, ..., \theta^{i_k}$ присутствует образующая θ^i, то ее надо переставить на последнее место справа, пользуясь соотношением (1), и вычеркнуть.

Правая производная по θ^i обозначается $\dfrac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^i}$.

Замечание. Стрелки в обозначениях $\dfrac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}$, $\dfrac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^i}$ не имеют отношения к обозначению вектора, а просто указывают, слева или справа действует операция дифференцирования.

Свойства линейности и правила дифференцирования мономов позволяют легко вычислять производные любых суперфункций. Приведем

Примеры.

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^2}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4 = -\theta^1\theta^3\theta^4,$$

$$\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^2} = \theta^1\theta^3\theta^4.$$

В первом случае мы поставили θ^2 слева, переставив θ^2 и θ^1, в силу чего появился знак минус. Во втором случае мы записали θ^2 справа, переставив θ^2 сначала с θ^3, а потом с θ^4, в силу чего знак не изменился.

Поскольку данный элемент θ^i может присутствовать в любом мономе не более одного раза, то очевидно, что

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}\frac{\vec{\partial} f}{\partial\theta^i} \equiv 0, \qquad f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^i}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^i} \equiv 0.$$

Другими словами, проблемы вычисления высших производных не существует.

В качестве упражнения предлагаем читателю проверить следующие свойства производных:

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^j}f\right) = -\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^j}\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}f\right),$$

$$\left(f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^i}\right)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j} = -\left(f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j}\right)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^i},$$

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}\left(f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j}\right) = \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}f\right)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j},$$

где $f(x, \theta)$ – произвольная суперфункция.

Перейдем теперь к определению интеграла по образующим грассмановой алгебры. В обычном математическом анализе (неопределенный) интеграл вводится как операция, обратная к дифференцированию. В нашем случае из соотношения $\frac{\partial}{\partial\theta^i}\frac{\partial}{\partial\theta^j} \equiv 0$ следует, что операции, обратной к (левой и правой) производной, не существует. Определенный интеграл Римана также не может быть определен, поскольку понятие интегральной суммы вводится только для обычных функций и не имеет смысла для функций, зависящих от антикоммутирующих переменных. Строгое определение интеграла от суперфункций было впервые дано Ф.А. Березиным, соответствующий интеграл называется интегралом Березина.

Чтобы подойти к определению интеграла Березина, будем основываться на аналогии с обычным интегралом Римана. Хорошо известно, что этот интеграл обладает свойством линейности. Примем, что интеграл от суперфункций является линейной операцией. Тогда достаточно ввести правила интегрирования мономов. Вспоминая обсуждение, предшествующее определению (левой, правой) производной, мы видим, что достаточно задать правила интегрирования выражений вида $\alpha + c_i\theta^i$.

Введем, следуя Ф.А. Березину, алгебру Грассмана Λ_{2n} с образующими $\{\theta^i, d\theta_j, i, j = 1, 2, ..., n\}$, которые, согласно соотношению (1), удовлетворяют условиям

$$\theta^i d\theta_j + d\theta_j\theta^i = 0, \qquad d\theta_i d\theta_j + d\theta_j d\theta_i = 0.$$

Наша цель состоит в определении интеграла $\int f d\theta_n ... d\theta_1$. В силу линейности и структуры функции f (7) достаточно задать правила вычисления только двух интегралов

$$\int d\theta_i \quad \text{и} \quad \int \theta^i d\theta_i \qquad (\text{по } i \text{ суммирования нет}).$$

Определение 10. *Однократные интегралы Березина* задаются следующим образом:

$$\int d\theta_i = 0, \qquad \int \theta^i d\theta_i = 1. \qquad (8)$$

Кратные интегралы $\int f d\theta_n ... d\theta_1$ определяются как повторные, то есть сначала вычисляется интеграл по $d\theta_n$, затем по $d\theta_{n-1}$ и т.д.

Замечание. Нетрудно заметить, что, согласно равенствам (8), выполняется соотношение

$$\int f d\theta_n ... d\theta_1 = f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^n}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^{n-1}}...\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^1}.$$

То есть по существу интеграл Березина совпадает с правой производной.

Каждый, кто изучал математический анализ, знает, что вычисление интегралов представляет собой непростую задачу и часто требует значительной изобретательности. Что касается интеграла Березина, его легко можно вычислить для суперфункции общего вида (7). Действительно, рассмотрим $\int f d\theta_n ... d\theta_1$. В силу свойства линейности и равенств (7) единственный ненулевой вклад может возникнуть от монома наибольшей возможной степени. Значит,

$$\int f d\theta_n ... d\theta_1 = \frac{1}{n!} f_{i_1 i_2 ... i_n} \int \theta^{i_1}\theta^{i_2}...\theta^{i_n} d\theta_n \theta_{n-1} ... d\theta_1 =$$

$$= f_{12...n}\int \theta^1 d\theta_1 \int \theta^2 d\theta_2 ... \int \theta^n d\theta_n = f_{12...n}.$$

Здесь учтено, что коэффициенты $f_{i_1 i_2 ... i_n}$ полностью антисимметричны. Таким образом, интеграл Березина от произвольной суперфункции всегда равен коэффициенту при мономе наибольшей степени в выражении для суперфункции (7).

В заключение отметим, что подробное изложение суперматематики и ее приложений в квантовой теории поля дано в книгах [4, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.

2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 759 с.

3. *Зорич В.А.* Математический анализ. М.: Наука, 1981. Т. 1. 543 с.

4. *Березин Ф.А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983. 208 с.

5. *Фридман Д., ван Ньювенхейзен П.* Супергравитация и унификация законов физики // Успехи физ. наук. 1979. Т. 128, № 1. С. 135–160.

6. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or a Walk through Superspace. Bristol; Philadelphia: IOP Publ., 1995. 640 p.

7. *Курош Л.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.

8. *Сильвестров В.В.* Системы чисел // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 8. С. 121–127.

* * *

Иосиф Львович Бухбиндер, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической физики Томского государственного педагогического университета, профессор кафедры квантовой теории поля Томского государственного университета, заслуженный деятель науки Российской Федерации, действительный член Международной академии наук высшей школы. Область научных интересов: квантовая теория поля, суперсимметрия, квантовая гравитация, теория струн. Автор двух монографий и 243 научных статей.