ON CUTTING-OUT CLOTHES ACCORDING TO CHEBYSHEV

S. E. STEPANOV

The subject of this paper is one of the objects of classical differential geometry – the Chebyshev net and its applications. The Chebyshev net is widely used in the mathematical physics, in the non-Euclidean geometry, in the theory of differential equations and architecture.

Рассматривается один из объектов классической дифференциальной геометрии – сеть Чебышёва, которая находит многочисленные приложения в математической физике, неевклидовой геометрии, теории дифференциальных уравнений и архитектуре.

О КРОЙКЕ ОДЕЖДЫ ПО ЧЕБЫШЁВУ

С. Е. СТЕПАНОВ

Владимирский государственный педагогический университет

ВВЕДЕНИЕ

В прошлом году исполнилось триста лет дифференциальной геометрии, поскольку первой дифференциально-геометрической задачей принято считать ту, которую сообщил в 1697 году в письме к крупнейшему математику XVII века Г. Лейбницу один из его замечательных учеников, младший из двух братьев Бернулли – Иоганн. В этой задаче речь шла о кривых на поверхности, на которых реализуется минимум расстояния между двумя заданными точками. Такие кривые И. Бернулли назвал геодезическими.

В предлагаемой статье мы перелистаем страницы истории дифференциальной геометрии, связанные с докладом “О кройке одежды”, прочитанным известным русским математиком П.Л. Чебышёвым более ста лет назад в Париже. Мы познакомимся с некоторыми методами и задачами классической дифференциальной геометрии. Персонажами нашей истории будут известные учителям и их ученикам авторы школьных и вузовских учебников по геометрии.

СЕТЬ ЧЕБЫШЁВА

Рассмотрим евклидову плоскость E_2 с декартовой сеткой координатных прямых, такой, что через каждую точку плоскости проходит ровно по одной координатной прямой из двух семейств прямых, параллельных перпендикулярным между собой базовым прямым, которые называют обычно осями абсцисс и ординат. Тогда для двух произвольных точек M_1 и M_2 плоскости E_2 всегда можно найти координатный прямоугольник с вершинами в этих точках (рис. 1) и вычислить расстояние M_1M_2 как длину диагонали в соответствии с теоремой Пифагора

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad (1)$$

для $\Delta s = M_1M_2$, $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta y = y_2 - y_1$.

Ситуация несколько усложнится, если прямые координатной сетки на плоскости E_2 будут наклонены друг к другу под углом α. В этом случае, согласно теореме косинусов,

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + 2(\cos\alpha)\Delta x\Delta y + \Delta y^2. \qquad (2)$$

Ситуация еще более усложнится, если мы захотим провести те же рассуждения в случае кривой поверхности, причем последнюю будем рассматривать как результат непрерывной деформации (растяжений, сжатий и изгибаний без разрывов и

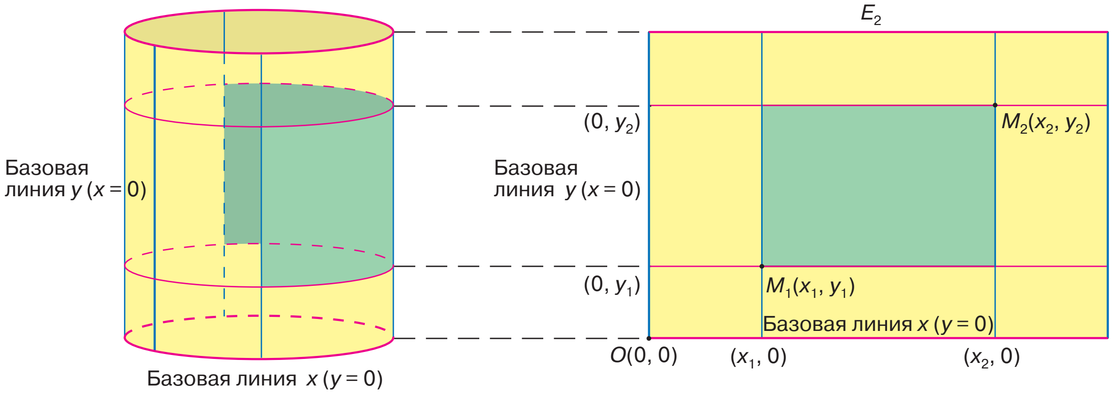

Рис. 1. Сетевые четырехугольники на евклидовой плоскости и цилиндре

склеиваний) куска евклидовой плоскости E_2. Когда это не удается, поверхность представляют в виде лоскутного одеяла, где любой кусок рассматривается как результат непрерывной деформации, но уже соответствующего куска евклидовой плоскости. Декартова сетка координатных прямых плоскости E_2 превратится на поверхности в сеть координатных линий, которая может иметь довольно причудливую форму. При этом длина диагонали M_1M_2 криволинейного четырехугольника будет вычисляться уже согласно формуле

$$\Delta s^2 = E(x, y)\Delta x^2 + 2F(x, y)\Delta x\Delta y + G(x, y)\Delta y^2, \qquad (3)$$

найденной еще в 1827 году К. Гауссом, величественная фигура которого высится на линии раздела между математикой XVIII и XIX столетий. Вместе с ним мы вступим в область применения дифференциального исчисления к геометрии поверхности, поэтому функции $E(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ и другие будем считать дифференцируемыми, а приращения Δx и Δy – настолько малыми, что их можно заменить дифференциалами dx и dy.

Заметим, что присутствующие в формуле (3) функции $E(x, y)$, $F(x, y)$ и $G(x, y)$ зависят не только от вида сети координатных линий на поверхности, но и от степени искривленности последней.

Рассмотрим для примера цилиндр, на котором координатные линии x состоят из окружностей, а координатные линии y – из перпендикулярных им прямолинейных образующих. В этом случае

$$\Delta s^2 = R^2\Delta x^2 + \Delta y^2, \qquad (4)$$

где R – радиус окружностей x, вдоль которых за единицу измерения выбран радиан.

Нетрудно заметить, что формулу (4) можно привести к виду (1), если произвести замену переменных по формуле $\Delta\hat{x} = R\Delta x$. Будет ли это означать, что цилиндр с метрической точки зрения неотличим от плоскости? Да, поскольку, разрезав цилиндр по прямолинейной образующей, его можно изогнуть (деформировать с сохранением длин дуг всех его кривых) на плоскость и задачу вычисления расстояний свести к известной (см. рис. 1). Но как поступить, когда поверхность устроена более сложно?

В 1878 году П.Л. Чебышёв в работе “О кройке одежды”, как и в одноименном докладе, исследовал вопрос о специальных сетях координатных линий на поверхности. Эти сети, называемые теперь *чебышёвскими*, характеризуются следующим свойством: в каждом криволинейном четырехугольнике, образованном отрезками координатных линий, противоположные стороны имеют равные длины. Название доклада и статьи было оправдано тем, что нити куска ткани, натянутой на поверхность, образуют на ней чебышёвскую сеть.

Выберем (рис. 2) одну из линий первого семейства сети Чебышёва и примем ее за базовую линию x (линия $y = 0$), а другого – за базовую y (линия $x = 0$). За координату x точки M на поверхности примем длину отрезка базовой линии, отсчитываемую (с точностью знака) от начальной точки $O(0, 0)$. Аналогично выбирается координата y. Угол между

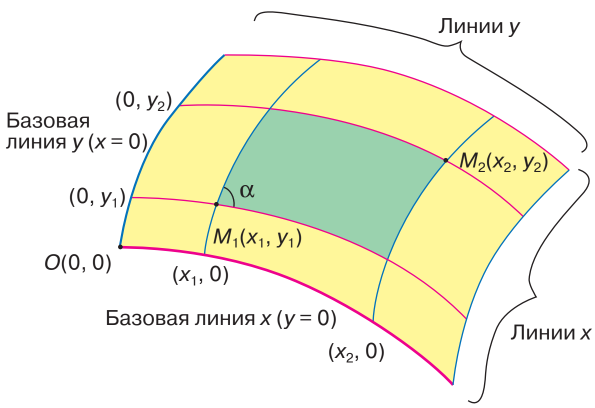

Рис. 2. Сетевой четырехугольник на поверхности. Угол α, который образуют пересекающиеся в точке $M_1(x_1, y_1)$ линии координатной сети x_1 и y_1, называется сетевым углом

координатными линиями x и y в точке $M(x, y)$ обозначим через $\alpha = \alpha(x, y)$. Тогда

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + 2(\cos\alpha)\Delta x\Delta y + \Delta y^2. \qquad (5)$$

Верно и обратное: если формула для вычисления расстояния между двумя произвольными точками поверхности имеет вид (5), то сеть координатных линий является чебышёвской.

Заметим, что по внешнему виду формулы (2) и (5) совпадают с тем единственным отличием, что в (2) угол $\alpha = \text{const}$. Если же положить $\alpha = \pi/2$, то формула (5) примет вид (1), тогда, как и в случае с цилиндром, поверхность должна изгибаться на плоскость.

Построим пример поверхности с сетью Чебышёва. Для этого возьмем две пересекающиеся кривые Γ_1 и Γ_2. Образуем поверхность параллельным перенесением кривой Γ_1 по кривой Γ_2 и наоборот. Такая поверхность называется поверхностью переноса. Линии переноса образуют на ней во всех своих последовательных положениях сеть Чебышёва. Заметим, что цилиндр является примером поверхности переноса.

УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОНА

В связи с формулой вычисления длины дуги кривой (4) мы упомянули о кривизне поверхности. Конкретизируем это понятие вслед за К. Гауссом.

Касательной плоскостью к поверхности в точке M называется плоскость, которая содержит касательные в данной точке к всевозможным кривым, проходящим по поверхности.

Возможна ситуация, когда в точке M касательной плоскости к поверхности не существует. Такую точку называют особой. Последние не могут заполнять всю поверхность, а располагаются изолированно (острия) либо заполняют некоторые кривые (ребра). Будем в дальнейшем рассматривать только поверхности из регулярных, то есть неособых, точек. Через каждую из них можно провести прямую, перпендикулярную к касательной плоскости поверхности в этой точке. Такие прямые называются нормалями. Зададим положительное направление на каждой нормали.

Проведем из центра некоторой единичной сферы радиусы, параллельные ориентированным нормалям рассматриваемой поверхности. Множество точек на сфере, описываемое концами таких радиусов, задает сферическое изображение поверхности.

Проведем вокруг некоторой точки M на поверхности замкнутую кривую Γ, точки которой достаточно близко отстоят от M. Тогда ей будет соответствовать на единичной сфере некоторая замкнутая кривая Γ^*.

Обозначим через S и S^* площади кусков поверхности и сферы, ограниченных замкнутыми кривыми Γ и Γ^*. Если стягивать кривую Γ к точке M, то площади S и S^* будут уменьшаться. А в пределе, когда кривая Γ будет стянута в точку,

$$\lim_{S\to 0}\frac{S^*}{S} = K.$$

Определенное таким образом число K называется гауссовой кривизной поверхности.

Очевидно, что для сферы единичного радиуса и плоскости E_2 гауссовы кривизны равны соответственно 1 и 0. На более сложно устроенных поверхностях гауссова кривизна изменяется от точки к точке, а потому представляет собой функцию $K = K(x, y)$ двух переменных: x и y. Аналитическое исследование показывает, что $K = K(x, y)$ выражается только через функции $E(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ и их производные. Поэтому, в частности, гауссова кривизна цилиндра будет равной гауссовой кривизне плоскости E_2 и равной нулю.

Упомянутое аналитическое выражение гауссовой кривизны $K = K(x, y)$ через функции $E(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ и их производные в случае поверхности, покрытой чебышёвской сетью координатных линий, имеет вид

$$-K\sin\alpha = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}. \qquad (6)$$

В правой части равенства (6) стоит производная второго порядка по переменным x и y от функции сетевого угла $\alpha = \alpha(x, y)$, поэтому (6) рассматривают как дифференциальное уравнение второго порядка на неизвестную функцию $\alpha = \alpha(x, y)$. В частности, при $K = -1$ дифференциальное уравнение (6) для сетевого угла превращается в хорошо известное физикам уравнение синус-Гордона

$$\sin\alpha = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \qquad (7)$$

которое связано с эффектом Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах.

С геометрической точки зрения решение уравнения синус-Гордона связано с задачей построения чебышёвских сетей на поверхностях, гауссова кривизна которых равна -1. Более того, каждому решению уравнения синус-Гордона на такой поверхности отвечает своя чебышёвская сеть.

В 1872 году известный итальянский геометр, профессор кафедр в университетах Болоньи, Пизы и Рима Э. Бельтрами построил пример поверхности постоянной кривизны $K = -1/R^2$ с экзотическим названием *псевдосфера* (рис. 3). Кроме регулярных частей она имеет кривую особых точек, а потому “в целом” не может рассматриваться как поверхность постоянной отрицательной кривизны. Но тем не менее на ее регулярных частях сеть Чебышёва существует.

Геометрическую интерпретацию решений уравнения синус-Гордона изучал уже в наше время, в

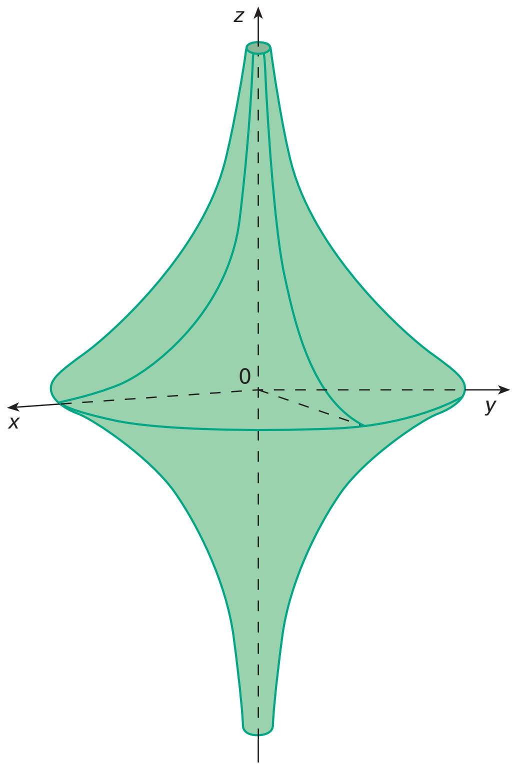

Рис. 3. Псевдосфера

конце 70-х годов, профессор Московского университета Э.Г. Позняк.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В 1829 году в “Ученых записках Казанского университета” тогда еще малоизвестный профессор Н.И. Лобачевский опубликовал статью “О началах геометрии”. Это была первая работа по новой геометрии, получившей впоследствии название гиперболической геометрии или геометрии Лобачевского.

Плоскость Лобачевского $Л_2$ определяется системой аксиом, отличающейся от системы аксиом плоскости Евклида E_2 лишь аксиомой о параллельных. У Н.И. Лобачевского аксиома о параллельных утверждает, что через точку вне данной прямой можно провести по меньшей мере две прямые, не пересекающие данную.

Оказывается, что плоскость Лобачевского $Л_2$ в отличие от плоскости Евклида E_2 имеет отличную от нуля постоянную гауссову кривизну $K = -1$ и, следовательно, несет свою сеть Чебышёва.

В 1900 году на Международном конгрессе математиков в Париже профессор Гёттингенского университета Д. Гильберт выдвинул в качестве предмета исследования двадцать три математические проблемы. Среди них был и вопрос о существовании в евклидовом пространстве E_2 поверхности, геометрия которой совпадала бы с геометрией плоскости Лобачевского $Л_2$. В 1901 году в работе “О поверхностях постоянной отрицательной кривизны” он ответил на него отрицательно. Для этого пришлось подсчитать площадь S четырехугольника, ограниченного дугами линий сети Чебышёва на поверхности с гауссовой кривизной $K = -1$, и убедиться ввиду (5) и (7), что $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – внутренние углы криволинейного четырехугольника. Так как $0 < \alpha_j < \pi$ для всех $j = 1, 2, 3, 4$, то $S < 2\pi$. Далее, выбирая четырехугольник сколь угодно большим, убедимся, что площадь всей поверхности не превосходит 2π в противоречии с тем, что площадь плоскости Лобачевского $Л_2$ бесконечна. На основании этого Д. Гильберт и сделал вывод, что в евклидовом пространстве E_3 не существует поверхности, геометрия которой представляла бы геометрию плоскости Лобачевского $Л_2$.

Теорема Д. Гильберта была впоследствии обобщена профессором Московского университета Н.В. Ефимовым, доказавшим, что в E_3 не существует полной поверхности, гауссова кривизна которой не превосходит некоторого фиксированного отрицательного числа.

СЕТЬ ЧЕБЫШЁВА И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ НА ПОВЕРХНОСТИ

Хорошо известно из курса геометрии средней школы преобразование параллельного перенесения на плоскости, рассматриваемого как частный вид движения, сохраняющего длины отрезков и величины углов. В 1917 году один из основателей современного тензорного исчисления – Т. Леви-Чивита перенес эту операцию на поверхность. Приведем соображения, которые лежат в основе параллельного перенесения на поверхности.

Говоря о прямой на поверхности будем иметь в виду прямую $a(M)$, касательную к поверхности в точке M, то есть лежащую в касательной плоскости к поверхности в этой точке. Но эта же прямая $a(M)$, будучи отложенной от любой другой точки N поверхности, будет, вообще говоря, направлена под углом к касательной плоскости в точке N, а потому уже не будет прямой на поверхности.

Рассмотрим теперь кривую Γ из регулярных точек M поверхности и зададим в каждой прямую $a(M)$, касательную к поверхности. В этом случае говорят, что на кривой задано поле прямых $a = a(M)$. Например, прямые, параллельные оси z и проходящие через точки экватора $z = 0$ сферы единичного радиуса с центром в начале координат образуют на экваторе поле прямых.

Выберем на кривой Γ две точки M_1 и M_2, отстоящие одна от другой на достаточно малое расстояние. Отложим прямую $a(M_2)$ в точке M_1, а затем спроектируем ее параллельно нормали в точке M_1

на касательную плоскость к поверхности в этой же точке. Рассмотрим исключительный случай, когда эта проекция совпадет с прямой $a(M_1)$. Если это будет выполняться при любом выборе пары близких точек M_1 и M_2, то скажем, что на кривой имеется параллельное поле прямых $a = a(M)$. И в частности, прямая $a(M_2)$ получена из $a(M_1)$ параллельным переносом на поверхности вдоль кривой Γ (рис. 4). Очевидно, что при таком условии угол между двумя параллельными полями прямых $a = a(M)$ и $b = b(M)$ вдоль Γ будет неизменным. В частности, параллельное поле прямых вдоль винтовой линии на цилиндре после его изгибания на плоскость превращается во множество параллельных прямых на плоскости.

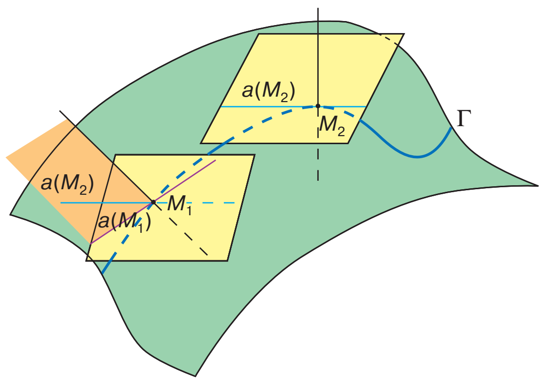

Рис. 4. Условие параллельного перенесения прямой $a(M)$ на поверхности вдоль кривой Γ

Характерно, что геодезическая линия, эта кратчайшая на поверхности, о которой писал И. Бернулли, обладает параллельным полем касательных прямых.

В 1923 году Л. Бианки, один из самых блестящих представителей дифференциальной геометрии в Италии, доказал теорему, согласно которой сеть линий на поверхности будет чебышёвской тогда и только тогда, когда поля прямых, касательных к линиям одного семейства будут параллельными вдоль линий другого семейства.

АФФИННО-ЧЕБЫШЁВСКИЕ СЕТИ

В 1748 году самый плодовитый математик XVIII столетия, если только не всех времен, — Л. Эйлер рассмотрел преобразования плоскости E_2 более общие, чем подобия. Эти преобразования задавались формулами вида

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, \qquad y' = a_2x + b_2y + c_2,$$

и за ними закрепилось название аффинных. В дальнейшем появились формулы аффинных преобразований всего евклидова пространства.

Легко усмотреть также, что изучаемые в школьном курсе геометрии формулы, задающие гомотетию и параллельный перенос плоскости, являются частным видом формул аффинного преобразования. Очевидно, что преобразование плоскости с формулами такого вида, вообще говоря, не сохраняет ни длин отрезков, ни величин углов, но сохраняет, например, параллельность прямых.

Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур, сохраняющиеся при аффинных преобразованиях, в соответствии со знаменитой “Эрлангенской программой” Ф. Клейна получил название аффинной геометрии. Эту геометрию можно построить на известных из школьного курса аксиомах Евклида, если исключить из их числа метрические аксиомы.

С 1916 года яркий представитель немецкой геометрической школы В. Бляшке стал изучать дифференциальную геометрию поверхности аффинного пространства A_3. Одной из основных задач ее был метод нормализации, то есть закрепления за каждой регулярной точкой поверхности прямой, не лежащей в касательной плоскости к поверхности в этой точке. В евклидовом пространстве такую прямую называли нормалью и она определялась однозначно, поскольку была перпендикулярна касательной плоскости.

Задача нормализации в аффинной геометрии была важной потому, что на нормализованной поверхности можно было определить операцию параллельного перенесения прямой так, как это сделал в евклидовом пространстве Т. Леви-Чивита.

Поскольку на поверхности аффинного пространства нет возможности вычислять длины дуг кривых, то как определить уже известную нам сеть Чебышёва?

В 1931 году профессор Казанского университета А.П. Норден предложил в качестве определяющего свойства для сети Чебышёва оставить то, которое установил Л. Бианки. Сеть в этом случае можно было назвать аффинно-чебышёвской. Осталось найти в каждой точке M поверхности аффинного пространства прямую, наклоненную к касательной плоскости так, что определяемые ими проектирования позволили бы поля прямых, касательных к линиям одного семейства линий сети считать параллельными вдоль линий другого семейства.

В каждой точке M поверхности, где пересекаются линии Γ_1 и Γ_2 двух семейств сети, имеем две пары прямых. Первая пара — это прямые $a(M)$ и $a(M_2)$, касательные к линиям первого семейства, проходящие через точку M и близкую ей точку M_2 на кривой Γ_2 поверхности, причем прямая $a(M_2)$ перенесена из точки M_2 в точку M в смысле объемлющего пространства. Вторая пара — это прямые $b(M)$ и $b(M_1)$, касательные к линиям второго семейства, проходящие через точку M и близкую ей точку M_1 на кривой Γ_1 поверхности. Проводя плоскости через точку M и каждую пару прямых получим искомую нормаль как пересечение этих двух плоскостей. Последние в дальнейшем будут рассматриваться в качестве

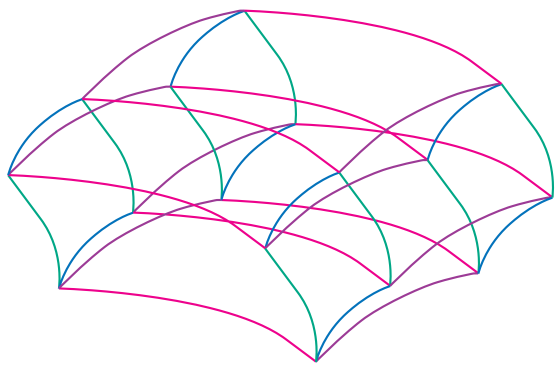

Рис. 5. Сетевой параллелепипед чебышёвской сети на четырехмерной поверхности. Противоположные “ребра”, окрашенные в одинаковый цвет, имеют равные длины

проектирующих. Таким образом, задание сети линий на поверхности аффинного пространства позволило решить задачу ее нормализации и одновременно превратить сеть в аффинно-чебышёвскую.

МНОГОМЕРНЫЕ СЕТИ ЧЕБЫШЁВА

С развитием геометрии многомерного пространства стали изучать и дифференциальную геометрию n-мерных поверхностей m-мерных аффинного A_m и евклидова E_m пространств для $m > n \geq 2$. В качестве нормали в регулярной точке M такой поверхности рассматривалась $(m - n)$-мерная плоскость, имеющая с касательной плоскостью к поверхности единственную общую точку M.

В развитие классической аффинной дифференциальной геометрии большой вклад внесли геометры, профессора Казанского университета П.А. Широков, А.П. Норден и А.П. Широков. Более современные результаты принадлежат автору школьного учебника по геометрии А.В. Погорелову. Изучением различных видов нормалей n-мерных поверхностей аффинного пространства A_m занимался в 50-е годы автор известных учебников по геометрии для средней школы и педагогических вузов Л.С. Атанасян. Его соавтор по учебнику для педагогических вузов профессор В.Т. Базылев изучал в 60-е годы аффинно-чебышёвские сети и различные их обобщения. В частности, для несущей сеть n-мерной поверхности в m-мерном аффинном пространстве он построил нормаль, относительно которой сеть становилась аффинно-чебышёвской. Рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущем разделе, позволили утверждать, что достаточным условием этого служит неравенство

$$m \geq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для сети Чебышёва на n-мерной поверхности евклидова пространства E_m (см., например, рис. 5) сразу же обозначилась проблема: она не обладала свойством, установленным Л. Бианки для сетей Чебышёва на поверхностях евклидова пространства E_3. Более того, как установил в 1972 году профессор Саратовского университета Л.Е. Либер, из всех n-мерных поверхностей евклидова пространства E_{n+1} только поверхности переноса и цилиндрические поверхности с $(n - 2)$-мерными плоскими образующими допускали сети Чебышёва, у которых касательные к линиям одного семейства были параллельными вдоль линий другого.

И наконец, в середине 80-х годов усилиями нескольких зарубежных математиков на n-мерной поверхности постоянной кривизны в евклидовом пространстве E_{2n-1} была построена сеть Чебышёва и найден многомерный аналог уравнения синус-Гордона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, наш рассказ закончился, но не завершены исследования, связанные с сетями Чебышёва, и время от времени реферативный журнал “Математика” печатает аннотации статей об этих замечательных сетях. Не закончилась и история дифференциальной геометрии, которая так же многообразна, как многообразны и методы, которыми она пользуется. Приложения дифференциальной геометрии не менее разнообразны – от общей теории относительности до проектирования строительных конструкций. И здесь мы приблизились к заключительному аккорду. Представьте себе поверхность с накинутой на нее сетью, напоминающей рыболовную и состоящей из конечного числа ячеек, противоположные стороны которых имеют равные длины. Узнаете сеть Чебышёва? Вот такая конструкция и была применена В. Колейчуком и Ю. Шалаевым в интерьере павильона нашей страны на Всемирной выставке в Окинаве, посвященной Мировому океану.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.

2. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990.

3. *Фоменко А.Т.* Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире. М.: Изд-во МГУ, 1992.

* * *

Сергей Евгеньевич Степанов, доктор физико-математических наук, доцент Владимирского государственного педагогического университета. Область научных интересов: глобальные риманова и лоренцева геометрии и теория поля. Автор более 35 научных статей и соавтор одной коллективной монографии.