SOME NOTIONS AND PROBLEMS OF FINANCIAL MATHEMATICS

A. E. RODKINA

Some notions of probability theory and random process theory are given, the key structures of financial theory and main stages of its development are described, descrete and continuous market models and problems of option pricing are presented.

Даются некоторые понятия теории вероятностей и случайных процессов, описываются ключевые структуры теории финансов, основные этапы развития этой теории, приводятся модели дискретного и непрерывного рынков ценных бумаг, дается представление о проблематике расчетов контрактов с опционами.

О НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЯХ И ПРОБЛЕМАХ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

А. Е. РОДКИНА

Воронежская государственная архитектурно-строительная академия

Финансовая математика испытывает период интенсивного развития, особенно в той ее части, которая связана с современным стохастическим анализом. Именно методы общей теории случайных процессов оказались наиболее подходящими для адекватного описания эволюции ценных бумаг.

НЕМНОГО О ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорию вероятностей можно определить как раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс). Следующий этап развития связан с именем Я. Бернулли. Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана А. Муавру, П. Лапласу, К. Гауссу, С. Пуассону и др. Наиболее плодотворный период связан с именами П.Л. Чебышева и его учеников А.А. Маркова и А.М. Ляпунова, последующее развитие – с именами С.Н. Бернштейна, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогорова, В.И. Романовского, Н.И. Смирнова, Б.В. Гнеденко и др.

Обратимся к некоторым понятиям теории вероятностей.

Случайным событием называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти и не произойти: выпадение орла при бросании монеты, попадание в некоторую область при стрельбе и т.д.

В большинстве случаев при увеличении количества испытаний относительная частота события A (то есть отношение числа появлений события A к общему числу испытаний) приближается к некоторому числу p, которое называется вероятностью случайного события A: $P(A) = p$. Можно сказать, что вероятность – это объективная характеристика возможности появления случайного события A в данных испытаниях.

Иногда можно непосредственно вычислить вероятность случайного события A, пользуясь так называемым классическим определением вероятности. Приведем соответствующие определения. Случайные события образуют полную группу несовместных событий (исходов), если в любом испытании может появиться ровно одно из них. Исход называется благоприятствующим возникновению события A, если его появление влечет за собой A. *Вероятностью p* события A называется отношение числа m благоприятствующих исходов к общему числу n всех исходов: $p = m/n$. Очевидно, что вероятность произвольного события лежит в отрезке [0, 1].

Пример 1. Из колоды карт наудачу выбирают одну карту. Найти вероятность того, что это карта пиковой масти.

Считая, что в колоде 36 карт, мы имеем общее число исходов $n = 36$. Всего карт пиковой масти 9, поэтому $m = 9$. Итак, $p = m/n = 9/36 = 1/4$.

Дискретной случайной называют величину X, которая принимает отдельные значения x_i с вероятностями p_i. Ее законом распределения называют соответствие между возможными значениями x_i и их вероятностями p_i. Заметим, что $\sum_i p_i = 1$. Самыми важными характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия. *Математическое ожидание* $\mathrm{M}(X)$ определено формулой

$$\mathrm{M}(X) = \sum_i x_i p_i.$$

Термин "математическое ожидание" связан с представлением о среднем или наиболее ожидаемом выигрыше в теории азартных игр. *Дисперсия* $\mathrm{D}(X)$ случайной величины X характеризует разброс возможных ее значений относительно математического ожидания и определяется по формуле

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{M}[X - \mathrm{M}(X)]^2.$$

Пример 2. Пусть случайная величина X принимает только два значения a и b с вероятностями p и q. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

По определению,

$$\mathrm{M}(X) = ap + bq, \qquad \mathrm{D}(X) = (a - b)^2 pq.$$

Фундаментальную роль в теории вероятностей и ее приложениях (в частности, в финансовой математике) играет следующая математическая модель, изученная Бернулли: производятся последовательные n испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A одна и та же и равна p. Испытания предполагаются независимыми в том смысле, что появление события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний. Вероятность P_n^k того, что событие A появится k раз, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n^k = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{1}$$

где $q = 1 - p$, $C_n^k = n!/k!(n-k)!$ – известная из комбинаторики формула числа сочетаний, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Пользоваться формулой (1) неудобно, и поэтому были найдены различные приближенные формулы. Лапласом для случая $0 < p < 1$ было доказано, что

$$P_n^k = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \tag{2}$$

Для вероятности $P(k_1 \le X \le k_2)$ того, что случайная величина X принимает значения в пределах от k_1 до k_2, справедливо

$$P(k_1 \le X \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx,$$

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \tag{3}$$

Определенный интеграл, входящий в (3), выражается через функцию

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx. \tag{4}$$

Подробные таблицы функции $\Phi(t)$ имеются во многих учебниках. Она играет огромную роль как в самой теории вероятностей, так и в ее приложениях, в частности в финансовой математике.

Непрерывная случайная величина X принимает значения из целого интервала. Распределение вероятностей для нее задается с помощью неотрицательной функции $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, следующим образом: вероятность $P(t_1 \le X \le t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(x) dx$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) = 1$. Такая функция $\varphi(t)$ называется плотностью вероятностей. Случайная величина с плотностью вероятности

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

называется *нормальной* или *гауссовской* с функцией распределения $\Phi(t)$, заданной (4).

В 1829 году ботаник Р. Броун, наблюдая под микроскопом взвешенную в воде цветочную пыль, обнаружил, что частицы пыли находятся в непрерывном беспорядочном движении. Закономерности, связанные с *броуновским движением*, были обоснованы теоретически А. Эйнштейном в 1905 году. Позднее Н. Винер построил строгую математическую модель, описывающую броуновское движение, которое называют еще и *винеровским процессом* W_t.

Понятие случайного (стохастического) процесса является расширением понятия случайной величины. Можно сказать, что случайный процесс – это семейство случайных величин, эволюционирующих во времени. Теория случайных процессов – это новейший раздел теории вероятностей, активно развивающийся начиная с 20–30-х годов нашего столетия. Важный вклад в развитие этой теории сделали Д. Дуб, К. Ито, И.И. Гихман, А.В. Скороход, А.Н. Ширяев, Р.Ш. Липцер, П.-А. Мейер, М. Метивье, Д. Жакод и др.

За пять лет до Эйнштейна в 1900 году Л. Башелье предпринял попытку описать стоимость акций как случайный процесс. Хотя его рассуждения не обладали математической строгостью и содержали ошибочное допущение, что цены акций могут быть отрицательными, он был первым, кто заметил, что при малых промежутках времени Δt приращения $\Delta S(t)$ цен акций ведут себя как $\sqrt{\Delta t}$. И это позволило через 65 лет П. Самуэльсону для описания эволюции стоимости акций $S(t)$ ввести так называемое геометрическое (он также писал "экономическое") броуновское движение

$$S(t) = S_0 e^{\mu t} e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}}. \tag{5}$$

О ФИНАНСОВЫХ СТРУКТУРАХ

Основными структурами, с которыми имеет дело теория финансов, являются индивидуумы, фирмы, рынки ценных бумаг, посреднические структуры. В этой схеме рынки ценных бумаг занимают центральное место. Именно они представляют основной интерес для математической теории финансов. Дадим краткую характеристику каждой из этих структур.

Индивидуум в процессе своей финансовой деятельности ведет себя и как потребитель и как инвестор.

Фирмы обладают физическими (земля, машины и т.д.) и другими ценностями (организационные структуры, рынки и т.д.), они осуществляют производство и управление ими.

Посреднические структуры – это коммерческие и инвестиционные банки, пенсионные фонды, страховые компании и т.д. Они выполняют финансовые поручения индивидуумов и фирм.

Любая ценность, подлежащая продаже, покупке или обмену, называется активом. **Финансовый рынок** определяется как совокупность таких активов.

Рынок ценных бумаг (**финансовый рынок ценных бумаг**) – это совокупность организованных финансовых рынков для торговли, обмена и т.д. ценными бумагами.

Для управления торговлей наличным товаром, различными контрактами и другими финансовыми инструментами, а также для предоставления информационных услуг создается бесприбыльная организация – **биржа**.

Квалифицированный бизнес требует проведения достаточно точных расчетов цен активов, которыми торгуют на рынке. Такие расчеты невозможны без известной идеализации рынка. Например, считается, что все операции осуществляются мгновенно и бесплатно, всегда есть возможность мгновенной купли-продажи активов (рынок обладает высокой ликвидностью) и т.д. Активы, реализуемые через ценные бумаги, представляют основу финансового рынка.

Принято выделять **основные ценные бумаги** — облигации (или боны) и акции и производные (вторичные) ценные бумаги – опционы, или контракты с опционами, варранты, фьючерсные контракты, ваучеры и др.

Акции – это долевые ценные бумаги, выпускаемые фирмами с целью аккумулирования капитала. Цена акции определяется как текущим состоянием рынка ценных бумаг, так и деятельностью фирмы. Владелец акции, или акционер, получает право как на участие в управлении компанией (по правилу: число акций равно числу голосов), так и на получение дивидендов.

Облигации – это долговые обязательства, выпускаемые государством, банками, акционерными компаниями, другими финансовыми институтами с целью аккумулирования капитала и т.д. Примерами облигации могут служить банковский счет, облигации государственного займа и т.д. В отличие от акций облигации выпускаются на некоторый срок, по истечении которого изымаются из обращения посредством погашения (выкупа). Характеристиками облигации являются время погашения, стоимость погашения (номинал), выплата до погашения (купоны). Обычно облигация – это безрисковый актив по сравнению с акцией, цена которой достаточно хаотична, но тут тоже есть опасность невыполнения долговых обязательств.

Акции и облигации являются первичными ценными бумагами, поскольку они определяются непосредственно через экономические факторы. В отличие от них вторичные (производные) ценные бумаги функционируют на базе уже имеющихся на бирже основных ценных бумаг. Рынок производных ценных бумаг является привлекательным из-за того, что требует существенно меньших начальных затрат и помогает страховать от потерь. Одной из наиболее распространенных производных ценных бумаг является **опцион**, или **контракт с опционом**, – ценная бумага, дающая ее обладателю право продать (купить) некоторую ценность (например, акции, валюту и т.д.) на оговариваемых условиях. По времени исполнения (погашения) опционы делятся на два основных типа: европейского типа, имеющие фиксированную дату погашения, и американского типа, которые могут быть представлены к исполнению в любой момент до фиксированной даты.

Участника финансового рынка, помещающего свободные капиталы в те или иные активы, мы называем **инвестором**, а совокупность принадлежащих ему активов — **инвестиционным портфелем**. Искусство инвестора состоит в умении правильно и динамично формировать свой портфель инвестиций (управлять портфелем): хранить актив, покупать и продавать его, давать взаймы. Перераспределение портфеля служит для уменьшения риска той или иной сделки, например покупки или продажи опциона. В этом случае говорят о хеджировании, или защите своих инвестиций, а соответствующий динамический портфель называют хеджирующим портфелем.

Существенное значение для инвестора имеет нахождение такой инвестиционной стратегии, которая дает прибыль при нулевых начальных затратах. Такие стратегии называются **арбитражными**.

Пример 3. Пусть акция продается в Нью-Йорке по цене 200 долларов, а в Лондоне — по цене 100 фунтов. Текущий обменный курс доллара по отношению к фунту 1,71. В этом случае возможна следующая цепочка действий:

взять в долг 100 фунтов,

купить акцию в Лондоне за 100 фунтов,

продать ее в Нью-Йорке за 200 долларов,

обменять 200 долларов по курсу 1,71 на 116,9 фунтов,

вернуть долг 100 фунтов.

Результатом является чистая прибыль в 16,9 фунтов, и, следовательно, построена арбитражная стратегия.

Другой пример арбитража, имеющего российскую специфику, давала торговля **ваучерами**, или приватизационными чеками.

Ясно, что арбитраж не может существовать длительное время, поскольку действия самих инвесторов, желающих им воспользоваться, приводят к исчезновению именно этой арбитражной возможности.

ОБ ИСТОРИИ ТЕОРИИ ФИНАНСОВ

В начале своего становления, в 20-х годах XX века, теория финансов в качестве математического аппарата использовала лишь формулу сложных процентов, а ее основной интерес был связан с вопросами администрирования и увеличения фондов. Последующее развитие теории шло в двух направлениях: в предположении условий полной определенности и условий неопределенности. В первом случае важную роль сыграли работы И. Фишера (1930) и Ф. Модильяни и М. Миллера (1958, 1961, 1963), в которых рассматривался выбор оптимальных решений для индивидуумов и фирм. Исторически первой работой во втором направлении стала диссертация Л. Башелье, о которой говорилось выше.

Проблемам инвестиционных решений индивидуумов в условиях неопределенности была посвящена классическая работа Г. Марковитца (1952). Следующим важным этапом в стохастической теории финансов явилась работа В. Шарпа (1964), в которой идеи Марковитца получили воплощение в широко известной модели, объясняющей поведение инвесторов на рынке, находящемся в равновесном состоянии.

В 1976 году вышла в свет работа С. Росса, в которой для описания равновесности состояния рынка использовались идеи арбитража. Утверждалось, в частности, что рынок, находящийся в равновесном состоянии, не должен допускать арбитражных ситуаций, то есть возможности извлечения прибыли без риска.

В современной теории и практике опционов знаменательную роль сыграл 1973 год, когда в Чикаго была открыта биржа по заключению стандартных контрактов с опционами. В день открытия было заключено 911 контрактов, уже через год заключалось более 20 000 контрактов в день, тремя годами позже — 100 000 в день, в 1987 году — 700 000 контрактов.

В том же, 1973 году были опубликованы две работы, совершившие революцию в финансовых расчетах, связанных с опционами. Это статьи Ф. Блэка и М. Шоутса “Расчет цены опционов и обязательства корпораций” и Р. Мертона “Теория расчета рациональной цены опциона”. В них было предложено обоснование справедливой цены опциона, приведена замечательная формула Блэка–Шоутса, развита теория оптимальных биржевых операций (хеджирующие стратегии), которые должен совершать продавец опциона, с тем чтобы оговариваемые условиями контракта возможные платежи, зависящие от случайного состояния цен на рынке, были гарантированным образом выполнены.

Предполагая, что цены акций в любой момент времени либо поднимаются вверх, либо опускаются вниз, Д. Кокс, Р. Росс и М. Рубинштейн предложили считать эти изменения дискретными и показали, что их модель имеет в пределе геометрическое броуновское движение, а полученная формула справедливой цены сходится к формуле Блэка–Шоутса.

Эти классические работы стали основанием для применения и развития методов современного стохастического анализа и теории финансов.

Изучение данной проблематики в нашей стране было начато в начале 90-х годов на семинаре А.Н. Ширяева в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН. С тех пор были получены фундаментальные результаты (см. [1–3]) и создан Научно-исследовательский актуарно-финансовый центр.

ОБ ИНВЕСТИРОВАНИИ И ХЕДЖИРОВАНИИ

Рассмотрим предложенную Коксом, Россом и Рубинштейном дискретную модель (B, S)-рынка, состоящего из двух активов: банковского счета $B = (B_n)$ и акции $S = (S_n)$. Согласно этой модели, динамика банковского счета имеет вид $B_n = (1 + r)B_{n-1}$, $B_0 > 0$, где $r > 0$ – процентная ставка, а стоимость акции $S = (S_n)$ эволюционирует по закону

$$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}, \qquad S_0 > 0, \tag{6}$$

где ρ_n – последовательность бернуллиевских случайных величин, принимающих два значения a и b, $-1 < a < r < b$, с вероятностями p и $q = 1 - p$. Это условие обеспечивает, в частности, положительность величин S_n.

Пусть инвестор имеет начальный капитал $X_0 = x > 0$ и хочет увеличить его в будущем, располагая возможностями (B, S)-рынка. Он может поместить этот капитал $X_0 = x$ на банковский счет, и тогда его капитал в момент времени n будет равен $X_0(1 + r)^n$. Значит, если инвестор хочет получить в некоторый момент времени N в будущем определенную сумму f_N, то его начальный капитал $X_0 = x$ должен быть равен $x = (1 + r)^{-N}f_N$. Он может вложить свой капитал $X_0 = x$ в акции. Это является, конечно, более рискованным делом, хотя может быть и привлекательным, если есть надежда на повышение цены акции. Тогда, заменяя значения случайной величины ρ_n ее математическим ожиданием (см. пример 2), из (6) находим, что для получения в среднем суммы f_N начальный капитал $X_0 = x$ должен быть таким, что $x = [1 + (bp + aq)]^{-N}f_N$.

Есть и третья возможность: поместить часть капитала на банковский счет, а часть в акции. Пусть B_0 – цена одной облигации, а S_0 – цена одной акции в момент времени $n = 0$ и инвестор имеет β_0 акций и γ_0 облигаций. Вообще говоря, числа β_0 и γ_0 могут быть и дробными, и отрицательными. Последнее соответствует взятию в долг. Начальный капитал инвестора можно записать в виде $X_0 = \beta_0B_0 + \gamma_0S_0$, а $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ образует портфель инвестора в момент времени $n = 0$.

Пусть к моменту времени $n = 1$, перед тем как будет объявлена новая цена акции S_1, инвестор преобразовал свой начальный портфель $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ в новый, основываясь лишь на начальной информации о значениях (B_0, S_0) и не допуская при этом ни притока дополнительного капитала со стороны (например, от дивидендов с акции), ни его оттока на сторону (например, на потребление). Перераспределенный таким образом портфель даст для капитала X_0 новое представление $X_0 = \beta_1B_0 + \gamma_1S_0$. В момент времени $n = 1$ происходит объявление новых цен на рынке, то есть становится известным значение пары (B_1, S_1), поэтому начальный капитал X_0 инвестора, имеющего портфель $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$, превращается в величину $X_1 = \beta_1B_1 + \gamma_1S_1$. Иначе говоря, приращение ΔX_1 капитала имеет вид $\Delta X_1 = \beta_1\Delta B_1 + \gamma_1\Delta S_1$. Обобщая изложенное выше на произвольные моменты времени, имеем

$$X_{n-1} = \beta_nB_{n-1} + \gamma_nS_{n-1}, \qquad X_n = \beta_nB_n + \gamma_nS_n,$$
$$\Delta X_n = \beta_n\Delta B_n + \gamma_n\Delta S_n. \tag{7}$$

Суммарный капитал при этом представляется в виде

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k\Delta B_k + \gamma_k\Delta S_k). \tag{8}$$

Смысл формулы (8) можно выразить так: формирование капитала $X_n = \beta_nB_n + \gamma_nS_n$ осуществляется только за счет изменений $(\Delta B_n, \Delta S_n)$ в ценах облигаций и акций и без какого-либо его притока и оттока.

Заметим, что из формул (7) нетрудно получить, что

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0. \tag{9}$$

Последнее означает, что портфели $\pi_k = (\beta_k, \gamma_k)$, $k \le n$, таковы, что изменение капитала на банковском счете (то есть $B_{n-1}\Delta\beta_n$) может происходить только в результате соответствующего изменения капитала в акциях (то есть $S_{n-1}\Delta\gamma_n$) и наоборот.

Говорят, что портфель $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, $n \le N$, удовлетворяющий условию (9), образован на принципе самофинансирования, а саму стратегию $\pi = (\pi_n)$, $n \le N$, называют самофинансируемой.

Стратегия $\pi = (\pi_n)$, $n \le N$, называется **хеджем**, или **хеджирующей стратегией** (по отношению к f_N), если с вероятностью единица $X_0^\pi = X_N^\pi \ge f_N$. Если $X_N^\pi = f_N$, говорят, что π является минимальным (x, f_N) хеджем.

Минимальное значение x, обозначаемое C_N, для которого возможно построение (минимального) хеджа π^*, называется инвестиционной стоимостью (ценой), гарантирующей в момент времени N получение капитала, не меньшего f_N.

К РАСЧЕТУ ОПЦИОНОВ

Величина C_N представляет интерес в связи с проблемой справедливой цены (премии) опционов европейского типа. Рассмотрим более подробно стандартный опцион купли европейского типа.

На (B, S)-рынке индивидуум выпускает опцион купли, дающий право ее покупателю приобрести у него в некоторый фиксированный момент времени N в будущем акции по оговоренной цене K. Если в момент времени N ситуация на (B, S)-рынке окажется такой, что $S_N \ge K$, то владелец опциона покупает акции по цене K. После этого он может немедленно продать акции по номиналу S_N и получить прибыль $f_N = S_N - K$. Если же окажется, что $S_N \le K$, то покупатель опциона не предъявляет его к исполнению, поскольку в этом случае он не получает никакой прибыли. Значит, в этом случае $f_N = \max(S_N - K, 0)$.

Так как продавец опциона, получивший премию от покупателя, должен выполнить условия контракта, нетрудно понять, что справедливой стоимостью европейского опциона естественно называть именно величину C_N. Действительно, если продавец опциона получает премию C_N, то он, выступая как инвестор на (B, S)-рынке с начальным капиталом $X_0 = C_N$, сумеет организовать стратегию π^*, которая обеспечит в момент времени N капитал $X_N^{\pi^*} = f_N$. Если требуемая премия будет меньше инвестиционной стоимости C_N, то продавец опциона не сможет, вообще говоря, выполнить условия контракта, а назначение цены, строго большей C_N, например $C_N + C$, $C > 0$, приводит к арбитражной ситуации – получение продавцом дохода C без всякого риска, так как условия контракта были выполнимы и при стоимости C_N.

Расчеты стоимостей C_N опционов европейского и американского типа, а также отыскание оптимальных хеджей (хеджирующих стратегий) являются одной из основных проблем теории опционов в финансовой математике.

Коксом, Россом и Рубинштейном впервые было получено, что для стандартного опциона купли с функцией выплаты $f_N = \max(S_N - K, 0)$ справедливая стоимость C_N задается формулой

$$C_N = S_0 B(k_0, N; \tilde{p}) - K(1+r)^{-N} B(k_0, N; p^*), \qquad (10)$$

где

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \qquad \tilde{p} = \frac{(1+b)p^*}{1+r},$$

$$B(j, N;\, p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k},$$

$$k_0 = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N} \Big/ \ln \frac{1+a}{1+b}\right].$$

Рассмотрим в заключение непрерывную модель рынка с банковским счетом $B = B(t)_{t \geq 0}$ и акцией $S = S(t)_{t \geq 0}$, причем $B_t = B_0 e^{rt}$, $r \geq 0$ – процентная ставка, а цена акции изменяется в соответствии с моделью "экономического" броуновского движения (5). Именно с этой моделью связана знаменитая формула Блэка–Шоутса: для стандартного опциона купли европейского типа с функцией выплаты $f_N = \max(S_N - K, 0)$ справедливая стоимость C_T задается формулой

$$C_T = S_0 \Phi(d_+) - K e^{-rT} \Phi(d_-),$$

$$d_{\pm} = \left[\ln \frac{S_0}{K} + T\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \sigma^{-1} T^{-\frac{1}{2}}. \qquad (11)$$

Здесь $\Phi(t)$ – функция нормального распределения, заданная в (4). Несмотря на разницу во внешнем виде формул (10) и (11), их можно рассматривать с единой точки зрения. Оказывается, любой дискретный рынок можно исследовать на "непрерывном" временном интервале, на котором цены изменяются как ступенчатые случайные процессы. Кроме того, если шаг дискретности стремится к 0, формула (10) приближается к формуле Блэка–Шоутса (11) в том же смысле, в котором справедливы приближенные равенства в (2) и (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А.Н.* О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, вып. 1. С. 5–22.
2. *Ширяев А.Н.*, *Кабанов Ю.М.*, *Крамков Д.О.*, *Мельников А.В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типов. I. Дискретное время // Там же. С. 23–79.
3. *Мельников А.В.* Финансовые рынки: Стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: Изд-во ТВП, 1997. 130 с.
4. *Колмогоров А.Н.*, *Журбенко И.Г.*, *Прохоров А.В.* Введение в теорию вероятностей. М., 1995. 176 с. (Б-чка "Квант"; Вып. 23).
5. *Спивак С.И.* Что такое финансовая математика // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 8. С. 123–127.

* * *

Александра Евгеньевна Родкина, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Воронежской государственной архитектурно-строительной академии. Область научных интересов: стохастические функционально-дифференциальные уравнения и их приложения к проблемам устойчивости и управления в технических системах, процедуры стохастической аппроксимации, финансовая математика. Соавтор двух монографий, автор и соавтор 72 научных статей в отечественных и зарубежных журналах.