ON BINARY RELATIONS AND FACTORSETS

A. G. BASKAKOV

Some aspects of the theory of binary relations and factorsets are discussed which may help to explain some definitions of elementary mathematics.

Обсуждаются некоторые понятия теории бинарных отношений и фактор-множеств и объясняются некоторые понятия элементарной математики.

О БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ И ФАКТОР-МНОЖЕСТВАХ

А. Г. БАСКАКОВ

Воронежский государственный университет

Некоторые понятия из школьной математики могут быть объяснены с помощью понятия бинарного отношения и фактор-множества. К таким понятиям, в частности, относятся понятие функции, рационального числа и вектора. Цель статьи – изложить элементы теории бинарных отношений, фактор-множеств и на их основе объяснить некоторые понятия элементарной математики. При этом приходится использовать некоторые понятия из теории множеств.

МНОЖЕСТВА

Множество является основным строительным материалом математики. Создатель теории множеств Г. Кантор определил множество как "объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью". Математическое понятие множества постепенно выделилось из привычных представлений о совокупности, собрании, классе, семействе и т.д. На место наивного подхода к понятию множества пришел аксиоматический подход [1, 2]. Аксиомы теории множеств постулируют существование некоторых неопределяемых или примитивных объектов, называемых множествами, вместе с символами и аксиомами, регулирующими их использование. Здесь существует аналогия с геометрией, где задаются неопределяемые объекты, называемые точками и плоскостями, вместе с системой аксиом, связывающих эти объекты друг с другом. Наиболее распространенными являются аксиомы теории множеств Цермело–Френкеля [1].

Если X – множество, то запись $x \in X$ означает, что x есть элемент множества X или что x принадлежит X. Отрицание этого отношения записывается так: $x \bar{\in} X$. Часто множество определяется не перечислением его элементов (что свойственно конечным множествам), а указанием характеризующего его свойства. Например, отрезок $[a, b]$ можно записать так:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\},$$

где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Если X и Y – два множества, то отношение $X \subset Y$ означает, что каждый элемент множества X является элементом множества Y. Если $X \subset Y$, то говорят, что X содержится в Y или что X является подмножеством Y. Если одновременно $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то множества X и Y называются равными, при этом используется запись $X = Y$. Множество, не содержащее элементов, называют пустым и обозначают символом ϕ.

Если X и Y – два множества, то через $X \cap Y$ обозначается их пересечение, то есть множество, состоящее из элементов, принадлежащих и X и Y. Существует множество, состоящее из элементов, принадлежащих по крайней мере одному из двух множеств X и Y, оно называется объединением X и Y и обозначается символом $X \cup Y$.

Любым двум объектам a, b соответствует новый объект — их упорядоченная пара (a, b). Для любых двух множеств X и Y (различных или нет) множество, состоящее из всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$, называется декартовым произведением (или просто произведением) X и Y. Если $X = Y$, то произведение $X \times X$ обозначается символом X^2.

Таким образом, обладая определенным набором множеств можно строить новые множества, такие, как их объединение, пересечение, декартово произведение и т.д.

Важно отметить, что при рассмотрении кандидатов на роль множеств и при перечислении неопределяемых символов и аксиом, ими управляющих, мы обнаруживаем, что не все рассматриваемые нами объекты являются множествами. Например, не существует такого множества, как "множество всех множеств" (см. [1]).

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Понятие бинарного отношения на заданном (непустом) множестве позволяет формализовать операции попарного сравнения элементов данного множества.

Рассмотрим непустое множество X. Любое подмножество R (не путать с $\mathbb{R}$ – множеством вещественных чисел) из $X^2 = X \times X$ называется бинарным отношением на множестве X. Если пара (x, y) входит в R, иногда будем писать xRy и говорить, что элемент x находится в отношении R с y.

Примерами бинарных отношений на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел являются следующие подмножества из $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Пример 1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$.

Пример 2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \le y\}$.

Пример 3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| = |y|\}$.

Пример 4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = y\}$.

В обыденной жизни суждения типа "Иван – сын Петра", "Татьяна старше Алексея", "Воронеж южнее Москвы", «Слова "ночь" и "день" содержат одинаковое число букв» приводят к бинарным отношениям на подходящем множестве. Например, последнее суждение (остальные попробуйте формализовать сами) определяет бинарное отношение R на множестве X всех слов: xRy, если число букв в словах x и y одинаково.

Примером бинарного отношения является график отображения (функции) $f: X \longrightarrow X$, то есть подмножество $\Gamma(f)$ из $X \times X$ вида

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)): x \in X\}.$$

Надо иметь в виду, что не всякое бинарное отношение на множестве X является графиком некоторого отображения (определение отображения и его свойства можно найти в [1, 3]). Так, из приведенных выше четырех примеров бинарных отношений на $\mathbb{R}$ графиком некоторой функции, определенной на $\mathbb{R}$, является только последнее бинарное отношение.

Бинарное отношение R на множестве X называется *рефлексивным*, если $(x, x) \in R$ для любого $x \in X$; *симметричным*, если из условия $(x, y) \in R$ следует, что $(y, x) \in R$; *антисимметричным*, если условия $(x, y) \in R$, $(y, x) \in R$ выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $x = y$; *транзитивным*, если из условий $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$ следует, что $(x, z) \in R$.

Из приведенных ранее четырех бинарных отношений на $\mathbb{R}$ симметричными являются первое, третье и четвертое, второе антисимметрично, рефлексивно и транзитивно.

Следующее понятие играет важную роль не только в математике, но и в ее приложениях (например, в теории выбора и принятия решений [4]).

Отношением частичного порядка (или частичным порядком) на множестве X называется рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение R. Если $(x, y) \in R$, то вместо символа xRy используется запись $x \le y$ (пишут $x < y$, если $x \ne y$). Частичный порядок R на X называется *порядком* на X, если для любых $x, y \in X$ выполнено одно из трех условий: $x < y$, $x = y$, $x > y$. Таким образом, обычное отношение порядка на $\mathbb{R}$ (см. пример 2) является порядком на $\mathbb{R}$.

Частичный порядок R на множестве $S(X)$ всевозможных подмножеств множества X определяется отношением включения подмножеств: ARB, если $A \subset B$. На множестве $\mathbb{R}^2$ частичный порядок R можно ввести следующим образом:

$$(x_1, y_1) \le (x_2, y_2), \qquad \text{если} \quad x_1 \le x_2 \quad \text{и} \quad y_1 \le y_2.$$

На множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел частичный порядок определяет бинарное отношение R:

$$xRy, \text{ если } x \text{ делится на } y \text{ без остатка.}$$

Если R – бинарное отношение на множестве X, то обратным к нему бинарным отношением называется бинарное отношение R^{-1}, определяемое условием: $(y, x) \in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in R$. Термин "обратное" оправдан тем, что если $f: X \longrightarrow X$ – отображение, для которого существует обратное отображение $f^{-1}: X \longrightarrow X$, то $\Gamma(f^{-1}) = \Gamma(f)^{-1}$ (докажите, что $(R^{-1})^{-1} = R$ для любого бинарного отношения R на множестве X). Если R – отношение "меньше или равно" на $\mathbb{R}$ (из примера 2), то R^{-1} – бинарное отношение "больше или равно" на $\mathbb{R}$.

ГРАФЫ – БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Очень часто мы рисуем на бумаге точки, изображающие химические вещества, населенные пункты, генеалогические деревья и соединяем эти точки линиями и стрелками, означающими некоторые отношения между рассматриваемыми объектами. Такие схемы встречаются всюду под различными названиями: электрические цепи (в физике), карты, лабиринты, диаграммы, генеалогические деревья, диаграммы организации (в экономике), социограммы (в психологии) и т.д. В 1936 году Д. Кёниг предложил называть такие схемы графами и систематически изучать их свойства. В XX веке задачи теории графов стали возникать также и в чистой математике (в алгебре, топологии, теории множеств). Чтобы можно было применять теорию графов в столь разнообразных областях, она должна быть в высшей степени абстрактной и формализованной.

Будем говорить, что дан граф, если даны:

1) непустое множество X,

2) бинарное отношение $\Gamma \subset X \times X$.

При этом для такого графа будем использовать обозначение $G = (X, \Gamma)$.

При возможности элементы множества X (в приложениях важен случай, когда X конечно и в этом случае граф называется конечным) будем изображать точками плоскости, а пары точек x и y из X, для которых $(x, y) \in \Gamma$, соединять непрерывной линией со стрелками, направленными от x к y. Это дает основание называть каждый элемент множества X *точкой* или *вершиной* графа, а пару (x, y) – *дугой* графа (x – начало, y – конец дуги). Таким образом, Γ – множество дуг графа $G = (X, \Gamma)$.

Путем в графе (X, Γ) называется такая последовательность дуг, что конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей. *Длина пути* α есть число $l(\alpha)$ дуг последовательности α, в случае бесконечного пути α полагаем $l(\alpha) = \infty$.

Пример 5. Пусть X – множество лиц некоторой военной организации. Бинарное отношение R на множестве X введем следующим образом: xRy, если лицо y подчинено лицу x. Итак, (X, Γ) – граф. Связь любого начальника с подчиненным изобразится в виде пути графа (X, Γ).

Среди огромного числа задач теории графов отметим следующие три задачи, относящиеся к задачам о кратчайшем пути и имеющие важное прикладное значение.

Задача 1. Найти в графе (X, Γ) путь, ведущий от вершины a к вершине b.

Задача 2. Найти путь наименьшей длины, ведущий от a к b.

Задача 3. Каждой дуге $d \in \Gamma$ графа (X, Γ) отнесем число $l(d) \geq 0$, которое назовем длиной дуги d. Требуется найти путь α, ведущий из данной вершины a в данную вершину b и такой, что его полная длина

$$\sum_{d \in \alpha} l(d)$$

была наименьшей.

Пример 6. Пусть X – множество географических пунктов, Γ – множество дорог, соединяющих некоторые из них (таким образом, дорога – это пара (x, y) из X; считается, что перекрестки дорог входят в X). Для дороги $d = (x, y)$ число $l(d)$ означает продолжительность проезда по ней (или ее длину в километрах или стоимость проезда). Для поездки из одного пункта в другой ищется наиболее быстрая (или наиболее экономичная) дорога. В любом из этих случаев мы решаем задачу 3.

Среди существующих алгоритмов решения последней задачи отметим алгоритм Л. Форда [5].

ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Часто бывает, что некоторое множество является объединением своих подмножеств, никакие два из которых не имеют общих элементов (не пересекаются). В этом случае говорят, что множество разбито на непересекающиеся подмножества.

Разбиение на подмножества часто используется для классификации объектов. Например, когда составляют каталог книг в библиотеке, то все множество книг разбивают на книги по естественным наукам, общественно-политическим наукам, книги беллетристического характера и т.д.

В биологии все множество животных разбивается на типы, типы – на классы и т.д.

В математике плоскость (рассматриваемую как множество точек) можно разбить на прямые, параллельные оси абсцисс, трехмерное пространство можно представить как объединение концентрических сфер различных радиусов (начиная с $r = 0$).

При разбиении множества на подмножества используют понятие *эквивалентности* элементов. Для этого определяют, что значит “элемент x эквивалентен элементу y”, после чего объединяют эквивалентные элементы в одно подмножество. При разумном понятии эквивалентности данное множество разбивается на взаимно непересекающиеся подмножества, объединение которых есть все множество.

Перейдем к формулировке соответствующих понятий. Бинарное отношение $R \subset X \times X$ называется отношением эквивалентности на множестве X, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если R – отношение эквивалентности на X и $(a, b) \in R$, то элементы a и b называются эквивалентными, при этом используется запись $a \approx b$.

Из первых четырех примеров бинарных отношений на $\mathbb{R}$ отношениями эквивалентности являются третье и четвертое.

Рассмотрим еще несколько примеров отношений эквивалентности.

Пример 7. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел и $m \geq 1$ – некоторое фиксированное число. Определим отношение эквивалентности R как подмножество из $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, состоящее из таких пар $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, что число $p - q$ делится на m.

Пример 8. Пусть $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Отношение эквивалентности R на X определим формулой $(p, q) \sim (p', q')$, если $pq' = p'q$.

Пример 9. Пусть X – множество прямых на плоскости (или в пространстве). Определим отношение эквивалентности R на X: $A \approx B$, если прямые A и B параллельны или совпадают. Таким образом, R состоит из упорядоченных пар прямых, которые параллельны друг другу или совпадают.

Пример 10. Пусть Y – множество направленных отрезков пространства (для направленного отрезка, соединяющего точки A и B с началом в точке A и концом в точке B, используется обозначение $\overrightarrow{AB}$). Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются эквивалентными, если они имеют одинаковую длину, лежат на параллельных прямых и одинаково направлены. Так, введенное множество пар эквивалентных направленных отрезков является отношением эквивалентности.

Далее символом X обозначается множество, на котором задано отношение эквивалентности R.

Каждое подмножество A из X называется *классом эквивалентности*, если: 1) оно состоит из эквивалентных друг другу элементов и 2) если $x \in X$ эквивалентен хотя бы одному элементу из A, то $x \in A$.

Теорема. *Два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.*

Доказательство. Пусть A и B – два класса эквивалентности из X. Допустим, что они пересекаются и c – общий элемент, то есть $c \in A \cap B$. Если x – произвольный элемент из A, то $x \sim c$. Поскольку $c \in B$, то и $x \in B$. Таким образом, $A \subset B$. Аналогично доказывается, что $B \subset A$. Итак, $A = B$. Теорема доказана.

ФАКТОР-МНОЖЕСТВА

Пусть X – множество и R – отношение эквивалентности на нем. Из свойства транзитивности отношения эквивалентности следует, что любой класс эквивалентности является множеством всех элементов, эквивалентных произвольному элементу из этого класса. Таким образом, из теоремы следует, что отношение эквивалентности позволяет данное множество X представить в виде объединения взаимно непересекающихся классов эквивалентности.

Совокупность всех классов эквивалентности называется *фактор-множеством*. Оно обозначается символом $\mathbf{X/R}$.

Как уже отмечалось, каждый элемент x из множества X полностью определяет класс эквивалентности, его содержащий, который далее обозначается символом $\tilde{x}$, так что $x \in \tilde{x}$ (и $\tilde{x} = \tilde{y}$, если и только если $x \approx y$). Элемент x называется представителем класса A, если $x \in A$.

Теперь вернемся к рассмотрению примеров отношений эквивалентности и найдем соответствующие фактор-множества.

В первом примере фактор-множество состоит из m подмножеств вида

$$\tilde{\mathbf{1}} = \{\mathbf{1} + km:\ k \in Z\},\quad \tilde{\mathbf{2}} = \{\mathbf{2} + km:\ k \in Z\}, \ldots$$
$$\ldots,\quad \tilde{m} = \{km:\ k \in Z\}.$$

Например, при $m = 2$ оно состоит из двух классов: четных чисел и нечетных чисел.

Во втором примере каждый класс эквивалентности называется *рациональным числом*, а фактор-множество X/R – множеством рациональных чисел. Таким образом, каждое рациональное число $r = \frac{m}{n}$ (в обычной форме записи) есть совокупность пар $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, для которых $pn = qm$. Обычно рациональное число отождествляют с некоторым представителем класса эквивалентности. Множество рациональных чисел обозначим символом $\mathbb{Q}$.

Сложение рациональных чисел осуществляется следующим образом: $r_1 + r_2$ = класс эквивалентности, содержащий пару $(pn + mq, qn)$, если $(p, q) \in r_1$ и $(m, n) \in r_2$ для заданных $r_1, r_2 \in Q$. Это определение корректно, то есть не зависит от выбора представителей из r_1 и r_2 (почему ?). Аналогично вводится умножение рациональных чисел.

Обратимся к четвертому примеру. Каждый класс эквивалентности называется свободным вектором или просто вектором. Таким образом, вектор – это подмножество направленных отрезков пространства, имеющих одинаковую длину, лежащих на параллельных прямых и одинаково направленных.

Если a, b – два вектора, то их суммой является тот класс эквивалентности d, содержащий направленный отрезок $\overline{AD}$, который определяется по правилу параллелограмма по любому представителю $\overrightarrow{AB}$ из a и представителю $\overrightarrow{AD} \in b$ с началом в точке A. Это определение сложения векторов корректно и не зависит от выбора представителя из a.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров В.Н.*, *Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1980.

2. *Коэн П.* Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969.

3. *Баскаков А.Г.* Сжимающие отображения и решение нелинейных уравнений // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 5. С. 118–121.

4. *Макаров И.М.*, *Виноградская Т.М.*, *Рубчинский А.А.*, *Соколов В.Б.* Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982.

5. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980.

* * *

Анатолий Григорьевич Баскаков, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математических методов исследования операций Воронежского государственного университета. Автор двух книг и 85 научных статей.