BENDING OF SURFACES

V. T. FOMENKO

The basic notions of the theory of the bending of the surfaces in an Euclidean space are described. Hilbert's proof of the unique determination of the sphere is shown. It is proved that the surfaces of positive Gaussian curvature with boundary allow the continuous bendings.

Описаны основные понятия теории изгибаний поверхностей евклидова пространства. Приведено гильбертово доказательство однозначной определенности сферы. Доказано, что поверхности постоянной гауссовой кривизны с краем допускают непрерывные изгибания.

ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. Т. ФОМЕНКО

Таганрогский государственный педагогический институт

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе стереометрии изучаются такие регулярные поверхности, как плоскости, сферы, цилиндры, конусы, а также поверхности, составленные из их кусков, например многогранники. Вопросам изгибания многогранников посвящена статья [1]. Предметом нашего рассмотрения будут изгибания регулярных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве E^3, в частности изгибания сферических, цилиндрических и конических поверхностей.

Поверхности S_1 и S_2 будут называться изометричными, если существует взаимно однозначное отображение поверхности S_1 на поверхность S_2, при котором соответствующие кривые на этих поверхностях имеют одинаковые длины. Если для поверхности S любая изометричная ей поверхность из некоторого класса поверхностей в E^3 получена движением (в том числе и зеркальным отражением) S, то говорят, что S однозначно определена в этом классе поверхностей.

Непрерывная деформация S_t поверхности S называется *изгибанием поверхности* S, если она содержит исходную поверхность и если в процессе этой деформации поверхности S_t для любого значения t остаются изометричными поверхности S. Поверхность S называется неизгибаемой, если все ее изгибания сводятся к движению S в пространстве E^3.

Поверхности S_1 и S_2 называют наложимыми друг на друга, если их можно соединить изгибанием S_t, $0 \le t \le 1$.

Проблема изгибаний поверхностей заключается в отыскании в указанном классе всех поверхностей, изометричных рассматриваемой, в частности в ответе на вопрос, при каких условиях заданная поверхность допускает изгибания либо является неизгибаемой.

Обратимся к жизненному опыту. Представим себе поверхность в виде тонкой пленки или оболочки, изготовленной из гибкого нерастяжимого материала, толщиной которой можно пренебречь по сравнению с другими ее линейными размерами (длиной, шириной), например лист бумаги либо шарик для игры в настольный теннис. Если последний слегка сдавить, то форма шарика останется неизменной, то есть можно предположить, что этот шарик неизгибаем. При более сильном сжатии у шарика возникнут вдавливания, которые можно описать следующим образом. Пусть S – сфера единичного радиуса с центром на оси Oz в пространстве E^3, проходящая через начало координат. Рассмотрим плоскость π, заданную уравнением $z = t$, где t – фиксированное число из промежутка [0, 1], и разбивающую поверхность S на две части F_1 и F_2. Пусть F_1^* – зеркальное относительно плоскости π отражение F_1. Тогда замкнутая поверхность S_t, составленная из куска F_2 и поверхности F_1^*, изометрична поверхности S. Изометрическое соответствие состоит в сопоставлении каждой точке P поверхности S, принадлежащей F_2, совпадающей с ней точки поверхности F_t, а точке P, принадлежащей F_1, – точки P^*, являющейся зеркальным изображением точки P относительно плоскости π. Поверхности S и S_t заведомо неравны, ибо не существует такого движения или движения и зеркального отражения на всей поверхности S (а не отдельных ее частей), которые совместили бы ее с поверхностью S_t. Заметим, что при непрерываемом изменении t указанный процесс построения изометрической поверхности описывает непрерывные изгибания поверхности S в классе непрерывных поверхностей (рис. 1). Это означает, что при сильном нажатии на шарик для игры в настольный теннис он будет допускать изгибания с появлением на нем линии нарушения гладкости, которая будет перемещаться по поверхности в процессе изгибания.

Рассмотрим еще примеры. Лист бумаги можно наложить на поверхность круглого цилиндра, а сферический сегмент можно легко изогнуть в веретенообразную поверхность, напоминающую по форме поверхность волчка (рис. 2, 3). Это наблюдение дает основание предположить, что поверхности с краем допускают изгибания в том же классе регулярности, что и исходные поверхности. Ниже дадим аналитические доказательства этих предложений и укажем некоторые основные результаты теории изгибаний поверхностей и нерешенные задачи.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Будем считать, что поверхность S задана векторным уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, \upsilon)$, $(u, \upsilon) \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ – некоторая область параметрической плоскости (u, υ); $\bar{r}$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $[\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon] \neq 0$, где $\bar{r}_u = \partial\bar{r}/\partial u$, $\bar{r}_\upsilon = \partial\bar{r}/\partial\upsilon$.

Определим первую квадратичную форму поверхности по формуле

$$\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2,$$

где $E = (\bar{r}_u, \bar{r}_u)$, $F = (\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon)$, $G = (\bar{r}_\upsilon, \bar{r}_\upsilon)$.

По геометрическому смыслу форма I совпадает с квадратом элемента длины ds дуги кривой на поверхности, проведенной в направлении $\{du : d\upsilon\}$. Поэтому форму I часто называют метрической. Поверхности изометричны тогда и только тогда, когда они могут быть параметризированы так, что их метрические формы совпадают.

Важную роль в теории поверхностей играет вторая квадратичная форма поверхности, определяемая формулой

$$\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdud\upsilon + Nd\upsilon^2,$$

где

$$L = (\bar{r}_{uu}, \bar{n}),\ M = (\bar{r}_{u\upsilon}, \bar{n}),\ N = (\bar{r}_{\upsilon\upsilon}, \bar{n}),$$

$\bar{n} = [\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon]/\sqrt{EG - F^2}$ – единичный вектор нормали поверхности. Геометрический смысл формы II заключается в том, что она характеризует отклонение поверхности от касательной плоскости в направлении $\{du : d\upsilon\}$.

Величина $k_n = \mathrm{II}/\mathrm{I}$ – нормальная кривизна поверхности – либо не зависит от выбора направления в данной точке (и тогда точка называется омбилической), либо достигает своего наибольшего и наименьшего значений k_1 и k_2 по двум ортогональным направлениям – главным направлениям. Величина $K = k_1 \cdot k_2$ называется гауссовой кривизной и вычисляется по формуле

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Два семейства кривых на поверхности, каждая кривая из которых в каждой своей точке касается главного направления, называют линиями кривизны.

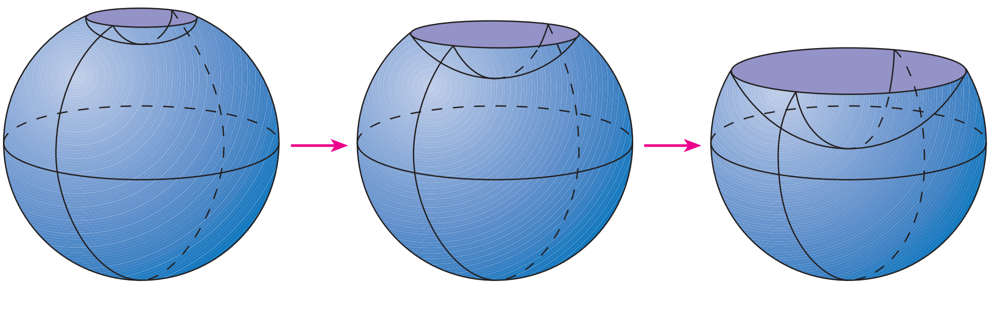

Рис. 1. Изгибание сферы в классе замкнутых невыпуклых поверхностей

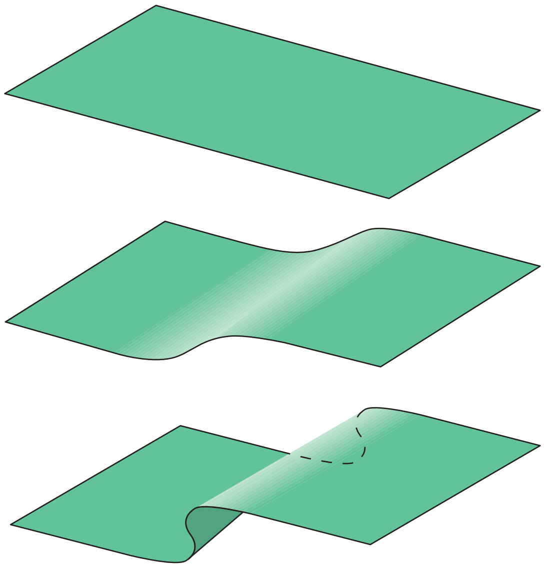

Рис. 2. Изгибание куска плоскости

Известно, что поверхности можно параметризировать так, чтобы линии кривизны играли роль координатных линий. В этом и только этом случае имеем $F = M = 0$.

Так как по предположению вектор-функция $\bar{r}$ является трижды непрерывно дифференцируемой, то выполняются равенства

$$\bar{r}_{u\upsilon} = \bar{r}_{\upsilon u}, \qquad \bar{r}_{uu\upsilon} = \bar{r}_{u\upsilon u}, \qquad \bar{r}_{\upsilon\upsilon u} = \bar{r}_{\upsilon u\upsilon}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты первой и второй квадратичных форм связаны между собой соотношениями

$$LN = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(\frac{(\sqrt{E})_\upsilon}{\sqrt{G}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)\right\},$$
$$L_\upsilon = \frac{1}{2}E_\upsilon\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right), \tag{1}$$
$$N_u = \frac{1}{2}G_u\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right).$$

Уравнения (1) называют основными уравнениями теории поверхностей; первое из них – уравнение Гаусса, два других – уравнения Петерсона–Кодацци.

ОДНОЗНАЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Изложенные факты теории поверхностей оказываются достаточными для того, чтобы привести здесь в доступной форме принадлежащее Д. Гильберту доказательство следующего утверждения.

Теорема. *В классе трижды непрерывно дифференцируемых поверхностей в E^3 сфера является однозначно определенной.*

Пусть S^* – замкнутая поверхность, изометричная сфере S единичного радиуса. Так как на S имеем $K \equiv 1$, то на поверхности S^* справедливо соотношение $k_1k_2 \equiv 1$, где k_1, k_2 – главные кривизны поверхности S^*.

Если в каждой точке поверхности S^* обе главные кривизны равны единице, то все точки поверхности S^* являются омбилическими и поэтому S^* будет сферой. Пусть на S^* существуют точки, в которых одна главная кривизна будет больше единицы, например $k_1 = k > 1$, а другая главная кривизна будет меньше единицы: $k_2 = \frac{1}{k} < 1$.

Воспользуемся теоремой из курса математического анализа, утверждающей, что всякая непрерывная функция точки на любой замкнутой поверхности в некоторой точке принимает свое максимальное значение.

Так как S^* является замкнутой поверхностью, то на S^* существует точка P, в которой большая из главных кривизн k_1 достигает своего максимального значения $k_1 = k_0 > 1$. Точка P не является омбилической, и поэтому в окрестности этой точки поверхность S^* можно параметризировать, приняв линии кривизны в качестве координатных линий. Тогда в окрестности точки P имеем $F = M = 0$ и имеют место уравнения (1). Так как $L = kE$, $N = \frac{1}{k}G$, то систему (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(\frac{(\sqrt{E})_\upsilon}{\sqrt{G}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right) + \sqrt{EG} = 0,$$
$$\sqrt{E}k_\upsilon = -\left(k - \frac{1}{k}\right)(\sqrt{E})_\upsilon, \tag{2}$$
$$\sqrt{G}\left(\frac{1}{k}\right)_u = \left(k - \frac{1}{k}\right)(\sqrt{G})_u.$$

Так как в точке P величина k достигает своего максимального значения $k = k_0 > 1$, то в точке P имеем $k_u = k_\upsilon = 0$, $k_{uu} \le 0$, $k_{\upsilon\upsilon} \le 0$. Из второго и третьего уравнений системы (2) в точке P находим

$$(\sqrt{G})_u = (\sqrt{E})_\upsilon = 0, \qquad (\sqrt{E})_{\upsilon\upsilon} \ge 0, \qquad (\sqrt{G})_{uu} \ge 0.$$

Но тогда из первого уравнения системы (2) получаем $\sqrt{EG} \le 0$, что невозможно. Следовательно, S^* также является сферой, что и доказывает теорему.

Полное решение проблемы об однозначной определенности выпуклых поверхностей было дано А.В. Погореловым [2], который показал, что замкнутые изометричные выпуклые поверхности равны. Таким образом, теоремой А.В. Погорелова полностью решена проблема изометрических преобразований выпуклых замкнутых поверхностей в классе выпуклых замкнутых поверхностей. Д. Нэш показал, что в классе замкнутых непрерывно дифференцируемых поверхностей сфера допускает непрерывные изгибания. Однако до сих пор остается вопрос, может ли замкнутая трижды непрерывно дифференцируемая поверхность допускать непрерывные изгибания в классе замкнутых поверхностей той же гладкости. Обзор работ по изгибаниям поверхностей содержится в [3].

ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КРАЕМ

К настоящему времени известно, что поверхности с краем ведут себя по отношению к изгибаниям по-разному. Наиболее общий результат получен А.В. Погореловым [2], установившим, что изометричные выпуклые поверхности с краем, имеющие полную кривизну $\iint K d\sigma = 4\pi$, равны между собой. Если же из замкнутой выпуклой поверхности удалить область положительной кривизны $K > 0$, то полученная поверхность не будет однозначно определенной. Н.В. Ефимов доказал существование аналитических поверхностей, любая окрестность которых для некоторой точки является неизгибаемой. Известно также [3], что любая односвязная трижды непрерывно дифференцируемая поверхность положительной гауссовой кривизны $K \geq c_0 > 0$ с достаточно гладким краем допускает непрерывные изгибания, при этом приращение кривизны края имеет по крайней мере четыре перемены знака. Для решения задач теории изгибаний поверхности привлекаются методы дифференциальных уравнений, функционального анализа и топологии.

Ниже элементарными рассуждениями покажем, что односвязные куски не слишком больших размеров поверхностей $K \equiv \text{const}$ допускают непрерывные изгибания. Напомним некоторые понятия внутренней геометрии теории поверхностей.

Длина кривой $\mathscr{L}$, заданной на поверхности уравнениями $\mathscr{L}$: $u = u(t)$, $\upsilon = \upsilon(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E u_t'^2 + 2F u_t' \upsilon_t' + G \upsilon_t'^2}\, dt.$$

Среди кривых, соединяющих точки M_1 и M_2 на поверхности, существует кривая наименьшей длины – кратчайшая между точками M_1 и M_2. Линия на поверхности называется геодезической, если она является локально кратчайшей, то есть в окрестности каждой своей точки она является кратчайшей. Геодезические линии играют во внутренней геометрии поверхности ту же роль, что и прямые в геометрии Евклида на плоскости. Через каждую точку достаточно гладкой поверхности в любом заданном направлении всегда можно провести единственную геодезическую. Введем на поверхности координаты, обобщающие декартовы прямоугольные координаты на плоскости в E^3. Возьмем некоторую точку O на поверхности S и назовем ее началом координат. Зададим в точке O на поверхности некоторое направление l. Проведем через точку O в направлении l геодезическую $\mathscr{L}_0$, которую назовем линией $\upsilon = 0$, и определим на $\mathscr{L}_0$ направление обхода. Каждая точка P на кривой $\mathscr{L}_0$ однозначно определяется длиной u дуги $\breve{OP}$, взятой со знаком плюс, если направление дуги $\breve{OP}$ совпадает с направлением обхода $\mathscr{L}_0$, и со знаком минус в противном случае. Через каждую точку P кривой $\mathscr{L}_0$ ортогонально к $\mathscr{L}_0$ проведем геодезическую $\mathscr{L}$. Ориентируем кривую $\mathscr{L}$ и будем считать, что ориентация $\mathscr{L}$ непрерывно зависит от точки P. Будем считать, что геодезические $\mathscr{L}$ для различных точек P на $\mathscr{L}_0$ не пересекаются между собой. Тогда каждая точка M поверхности, через которую проходит одна из геодезических $\mathscr{L}$, может быть однозначно определена длиной дуги $\upsilon = \breve{PM}$, взятой со знаком плюс или минус. Пара (u, υ) однозначно определяет точку M на поверхности S и наоборот, то есть их можно считать координатами на поверхности. Построенную параметризацию будем называть специальными полугеодезическими координатами на поверхности. Известно, что координаты (u, υ) на поверхности S будут специальными полугеодезическими координатами тогда и только тогда, когда метрическая форма поверхности имеет вид $ds^2 = du^2 + G d\upsilon^2$, где $G > 0$; $G(0, \upsilon) = 1$, $G_\upsilon(0, \upsilon) = 0$, $(u, \upsilon) \in \mathscr{D}$, $\mathscr{D}$ – некоторая область параметрической плоскости (u, υ). Используя уравнение Гаусса и формулу для вычисления гауссовой кривизны нетрудно получить выражение для вычисления гауссовой кривизны в полугеодезических координатах

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

Найдем метрическую форму поверхности постоянной гауссовой кривизны $K = \text{const}$ в специальных полугеодезических координатах.

Пусть $K = a^2 > 0$. Тогда, полагая $\sqrt{G} = y$, для нахождения y имеем задачу Коши:

$$y''_{uu} + a^2 y = 0, \qquad y|_{u=0} = 1, \qquad y'|_{u=0} = 0.$$

Легко видеть, что решение этой задачи имеет вид $y = \cos au$.

Пусть $K = -a^2 < 0$. Тогда для функции $y = \sqrt{G}$ имеет место задача Коши

$$y''_{uu} - a^2 y = 0, \qquad y|_{u=0} = 1, \qquad y'|_{u=0} = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид $y = \operatorname{ch} au$, где через ch обозначен гиперболический косинус.

Наконец в случае $K \equiv 0$ находим, что $\sqrt{G} \equiv 1$. Таким образом, метрическая форма поверхности постоянной гауссовой кривизны в специальных полугеодезических координатах имеет вид

$$ds^2 = \begin{cases} du^2 + \cos^2\sqrt{K}u\,d\upsilon^2, & \text{если } K > 0, \\ du^2 + \operatorname{ch}^2\sqrt{-K}u\,d\upsilon^2, & \text{если } K < 0, \\ du^2 + d\upsilon^2, & \text{если } K = 0, \end{cases}$$

где параметры (u, υ) изменяются в некоторой области $\mathcal{D}$ плоскости (u, υ).

Из сказанного вытекает следующая

Теорема. *Все поверхности одинаковой постоянной гауссовой кривизны K, которые допускают специальную полугеодезическую параметризацию (u, υ), $(u, \upsilon) \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — некоторая плоская область, изометричны между собой. Более того, если S_1 и S_2 — поверхности постоянной гауссовой кривизны K, P_1 и P_2 — произвольные точки на этих поверхностях, l_1 и l_2 — произвольные направления в этих точках, то существует изометрическое отображение окрестности точки P_1 поверхности S_1 на окрестность точки P_2 поверхности S_2, при котором направлению l_1 поверхности S_1 в точке P_1 соответствует направление l_2 на поверхности S_2 в точке P_2.*

Укажем теперь некоторые поверхности постоянной гауссовой кривизны, отличные от сферы. С этой целью будем отыскивать поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны.

Поверхностью вращения называют поверхность, образованную вращением некоторой лежащей в плоскости π кривой $\mathcal{L}$ вокруг прямолинейной оси, принадлежащей плоскости π. Кривую $\mathcal{L}$ называют меридианом поверхности вращения. Если в пространстве E^3 ввести прямоугольные декартовы координаты $Oxyz$ так, чтобы начало O лежало на оси вращения, а ось Oz совпадала с осью вращения, то уравнения поверхности вращения можно записать в виде

$$x = \varphi(u)\cos\upsilon,$$

$$y = \varphi(u)\sin\upsilon,$$

$$z = u,$$

где для определенности можно считать, что u принадлежит некоторому числовому отрезку (u_1, u_2), а υ изменяется от 0 до 2π. Функция $r = \varphi(z)$ определяет форму меридиана в плоскости π с координатами Orz. Используя приведенные выше формулы легко подсчитать гауссову кривизну поверхности вращения. Имеем $K\varphi = -\varphi''_{zz}(1 + \varphi_z'^2)^{-2}$. Считая, что величина $K = \text{const}$ задана, отсюда интегрированием находим $K\varphi^2 = (1 + \varphi_z'^2)^{-1} + t$, где t — произвольная постоянная. Находя φ'_z и замечая, что $\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\varphi'_z}$, получаем в квадратурах уравнение меридиана

$$z = \pm\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{Kr^2 - t}{1 + t - Kr^2}}dr, \tag{3}$$

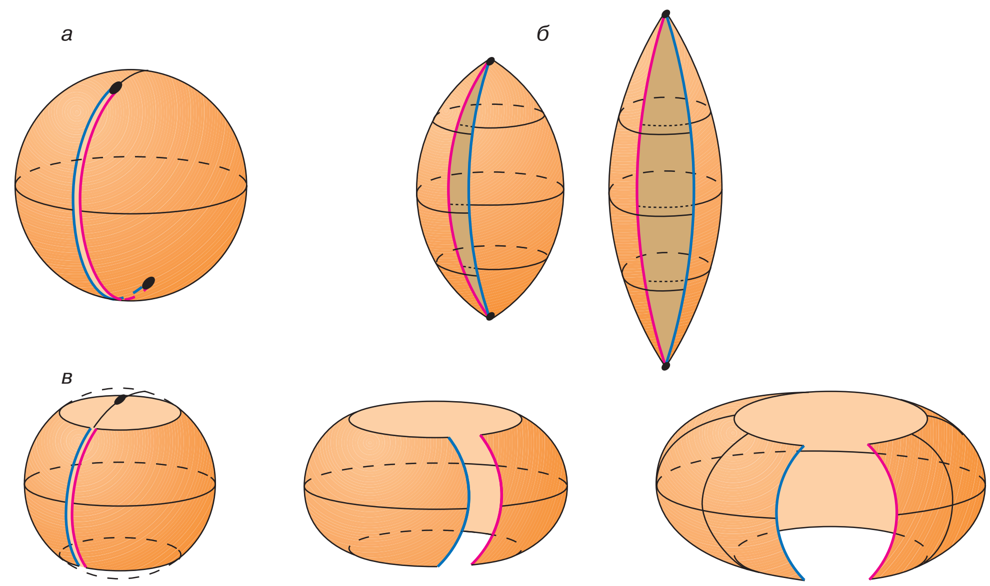

Рис. 3. Изгибания сферических кусков: *а* – сфера с разрезом по полумеридиану, *б* – веретенообразные поверхности вращения с самоналожением, *в* – сфера с удаленными сферическими сегментами и разрезом по полумеридиану

где r_0 – значение радиуса параллели поверхности вращения при $z = 0$. Изменение r_0 влечет за собой сдвиг поверхности вращения вдоль оси Oz. Отметим, что при $K = a^2 > 0$ и при $t = 0$ уравнение (3) изображает окружность, а соответствующая поверхность вращения есть сфера радиуса a^{-1}. При заданном значении $K \equiv \text{const}$ изменение параметра t влечет за собой непрерывную деформацию поверхности вращения (рис. 3). Все полученные в процессе деформации поверхности локально изометричны и локально наложимы друг на друга. Этим доказано, в частности, что кусок единичной сферы меньше полусферы допускает непрерывные изгибания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многие вопросы теории изгибаний поверхностей с краем до сих пор остаются нерешенными. В качестве примера сформулируем задачу, поставленную С.Э. Конфоссеном еще в 1936 году: найти зависимость между размерами заданного куска сферы и его изгибаемостью. В частности, можно ли изогнуть кусок сферы с двумя отмеченными точками таким образом, чтобы пространственное расстояние между ними уменьшилось в 2 раза?

Ряд задач, многие из которых до сих пор полностью еще не решены, приводится в [2]. Одну из них можно сформулировать следующим образом: пусть в пространстве E^3 даны поверхность S с краем ∂S и некоторая поверхность Σ; спрашивается, можно ли поверхность S изогнуть в пространстве E^3 таким образом, чтобы край ∂S целиком лежал на поверхности Σ?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В.А.* Изгибаемые многогранные поверхности // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 5. С. 112–117.

2. *Погорелов А.В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969. 760 с.

3. *Иванова-Каратопраклиева И.*, *Сабитов И.Х.* Изгибание поверхностей // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1991. Т. 23. С. 121–184.

* * *

Валентин Трофимович Фоменко, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и геометрии Таганрогского государственного педагогического института, член-корреспондент Российской академии естествознания, заслуженный деятель науки Российской Федерации. Область научных интересов: геометрия, дифференциальные и интегральные уравнения. Автор и соавтор более 150 научных работ, одной монографии и четырех учебных пособий для студентов.