ON THE THEORY
OF MEASURE
AND INTEGRAL

A. G. BASKAKOV

The main conceptions of the theory of measure and integral are discussed.

Обсуждаются основные понятия теории меры и интеграла.

О ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛЕ

А. Г. БАСКАКОВ

Воронежский государственный университет

Проблема измерения величин областей на плоскости и в трехмерном пространстве, состоящая в приписывании этим областям чисел, выражающих их площади и объемы, восходит к истокам математики. Первые понятия длины, площади и объема появились в самых ранних математических работах вавилонян, египтян, греков и во многом определили дальнейшее развитие математики. С помощью интегрального исчисления, берущего начало в некоторых исследованиях Архимеда, удается перенести теорию измерений на более широкий класс областей, ограниченных кривыми линиями и искривленными поверхностями. К сожалению, это интегральное исчисление позволяет производить вычисления для достаточно хороших множеств. Оно не дает возможности измерить множества более сложной природы. Например, с его помощью нельзя измерить площадь множества точек плоскости (x, y), имеющих рациональные координаты, заключенные между 0 и 1. Впрочем, такой вопрос и не поднимался. Однако в конце XIX века возникли задачи, для решения которых понадобилось приписывать численную меру более широкому классу множеств. Например, такие задачи появились в связи с исследованием множеств сходимости тригонометрических рядов. Именно, занимаясь такими множествами, немецкий математик Георг Кантор и создал основы теории множеств. В свою очередь, приобщение математиков к теории множеств способствовало созданию современной теории меры.

В статье принят аксиоматический подход при изложении элементов теории меры. В частности, определяется пространство с мерой и для достаточно широкого класса функций определяется интеграл. Приводятся приложения к теории вероятностей. Цель статьи – дать некоторое представление о теории меры и более современном способе построения интеграла.

МЕРА

Определение меры состоит в приписывании некоторым (измеримым) множествам числа так, чтобы выполнялись некоторые естественные условия, имеющие место при определении длины, площади и объема. Для определения меры рассмотрим непустое множество X, природа элементов которого может быть совершенно произвольна (отметим здесь замечательную особенность математики оперировать объектами, не определяя их). Например, X может быть отрезком, плоскостью, множеством автомобилей и т.д.

Непустое семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X называется σ-алгеброй, если выполняются следующие условия:

1) пустое множество ϕ и само множество X содержатся в $\mathcal{F}$;

2) объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, то есть множество, состоящее из элементов всех множеств A_1, A_2, ..., входит в $\mathcal{F}$ при условии, что $A_k \in \mathcal{F}$ при всех $k \geq 1$;

3) дополнение $X \backslash A$, то есть множество, состоящее из всех элементов множества X, которые не принадлежат A, принадлежит $\mathcal{F}$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Подмножества из X, входящие в семейство $\mathcal{F}$, называются измеримыми.

Если каждому измеримому множеству E поставлено в соответствие число $\mu(E)$, возможно и ∞, то есть задано отображение $\mu: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, со свойствами: 1) $\mu(E) \geq 0$, $E \in \mathcal{F}$; 2) $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$, где множества A_i, $i \geq 1$, измеримы и взаимно не пересекаются, то есть $A_i \cap A_j = \phi$ при $i \neq j$, то говорят, что на $\mathcal{F}$ задана мера μ.

Тройка $(X, \mathcal{F}, \mu)$, то есть непустое множество X, выделенная σ-алгебра $\mathcal{F}$ измеримых подмножеств множества X и мера $\mu: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, называется пространством с мерой.

Рассмотрим примеры мер (пространств с мерой).

Пример 1. Мера Лебега. Пусть $X = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Построим σ-алгебру $\mathcal{F}$ измеримых (по Лебегу) множеств из $\mathbb{R}$ и меру Лебега $l: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ следующим образом. Любой интервал $E = (a, b)$ включим в $\mathcal{F}$ и его длиной назовем число $l(E) = b - a$. Любое открытое множество $G \subset \mathbb{R}$, то есть множество, представимое в виде объединения $G = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \ldots$ конечного или бесконечного числа взаимно непересекающихся интервалов, включим в $\mathcal{F}$ и положим $l(G) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots$ Теперь рассмотрим произвольное подмножество E из $\mathbb{R}$. Его внешней длиной $l^*(E)$ назовем число $l^*(E) = \inf l(G)$, где точная нижняя грань берется по всем открытым множествам G из $\mathbb{R}$, содержащим E. Если E ограничено (то есть E содержится в некотором отрезке $[a, b]$) и замкнуто (то есть $[a, b] \backslash E$ – открытое множество), то нижней длиной множества E назовем число $l_*(E) = b - a - l^*([a, b] \backslash E)$. Для произвольного множества F из $\mathbb{R}$ положим $l_*(F) = \sup l(E)$, где точная верхняя грань берется по всем замкнутым ограниченным множествам, содержащимся в F.

Множество E из $\mathbb{R}$ назовем измеримым (по Лебегу) и включим его в $\mathcal{F}$, если $l^*(E) = l_*(E)$. Это общее число обозначим $l(E)$ и назовем длиной множества E (или мерой Лебега множества E).

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *$\mathcal{F}$ есть σ-алгебра;*

2) *$l: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ является мерой;*

3) *$l(E + h) = l(E)$, $E \in \mathcal{F}$, то есть для любого измеримого множества E его сдвиг на любое число $h \in \mathbb{R}$ является измеримым множеством и его длина совпадает с длиной множества E.*

Множество Y назовем счетным, если его элементы можно записать в виде последовательности $y_1, y_2, \ldots$

Непосредственно из определения меры Лебега следует, что длина любого одноточечного множества равна нулю и поэтому (ввиду свойств измеримых множеств и меры) измеримыми являются конечные и счетные множества, а их длина равна нулю. Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно [1] и поэтому измеримо, $l(\mathbb{Q}) = 0$.

Важно отметить, что не только счетные множества из $\mathbb{R}$ имеют нулевую меру Лебега. Примером измеримого несчетного множества, имеющего нулевую меру Лебега, является канторово множество K из отрезка $[0, 1]$, которое строится следующим образом: оно состоит из всех чисел отрезка $[0, 1]$, которые можно записать в виде троичной дроби, не используя цифру 1. Это множество K можно построить выбрасывая из отрезка $[0, 1]$ открытый интервал $(1/3, 2/3)$, являющийся средней частью отрезка. Затем выбрасываются открытые части у каждого из отрезков $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ (то есть интервалы $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$) и т.д. Оставшееся множество и есть множество K. Просуммировав сумму длин, оставшихся на n-м шаге, получим, что она равна $(2/3)^n$. Поэтому

$$l(K) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

При построении мер Лебега на плоскости и в трехмерном пространстве, обобщающих понятие площади и объема, можно следовать схеме построения меры Лебега на σ-алгебре $\mathcal{F}$ из $\mathbb{R}$ (см. пример 1) с использованием вместо интервалов таких элементарных множеств, как квадраты и кубы. Полученная таким образом мера также называется мерой Лебега (подробное построение таких мер см. в [1]).

Пример 2. Мера Дирака. Рассмотрим произвольное множество X и выделим некоторую точку x_0 из X. Пусть $\mathcal{F}$ – всевозможные подмножества из X. Ясно, что они образуют σ-алгебру. Определим отображение $\mu_0: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ соотношениями

$$\mu_0(E) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_0 \in E, \\ 0, & \text{если} \quad x_0 \notin E. \end{cases}$$

Легко видеть, что μ_0-мера (проверьте!) называется мерой Дирака, сосредоточенной в точке x_0.

НЕИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Если в примере 2 любое подмножество из X является измеримым, то не всякое подмножество из $\mathbb{R}$ является измеримым по Лебегу. Неизмеримое множество построим не на прямой, а на окружности S длины 1; существо дела от этого не меняется. При этом следует заметить, что приведенный в примере 1 способ построения меры Лебега переносится на окружность, причем указанное в теореме 1 свойство 3 будет теперь означать равноизмеримость конгруэнтных множеств из S и совпадение их длин.

Приступим к построению измеримого множества из окружности S, которое называется множеством Витали. Пусть α – некоторое иррациональное число. Отнесем к одному множеству S_α те точки окружности S, которые могут быть переведены одна в другую поворотом окружности на угол $n\alpha\pi$, n – целое число. Это множество S_α будет счетным. Выберем теперь из каждого такого множества ровно по одному элементу и образуем из них множество из S, которое обозначим E_0. Докажем, что оно неизмеримо по Лебегу. Через E_n обозначим множество тех точек из S, которые получены из E_0 поворотом на угол $n\alpha\pi$. Легко видеть, что все множества E_n взаимно не пересекаются, а их объединение совпадает с окружностью S. Если бы множество E_0 было измеримо, то все конгруэнтные ему множества E_n также измеримы и, следовательно, все их длины совпадают. В силу свойства 2 мер получаем, что

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} l(E_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} l(E_0) = \ldots + l(E_0) + l(E_0) + \ldots$$

Такое равенство невозможно. Поэтому E_0 – неизмеримое множество.

При построении неизмеримого множества E_0 использовался неконструктивный прием, когда выбиралось по одному элементу из множеств S_α, которые определены слишком неявно. Узаконить такую процедуру построения новых множеств предложил Эрнест Цермело, сформулировав следующую аксиому теории множеств (называемую аксиомой выбора).

Если дана некоторая совокупность C множеств, то можно образовать множество E взяв по одному элементу из каждого множества совокупности.

Эта аксиома, хотя и выглядит вполне естественно, стала предметом острых дискуссий, так как некоторые ее следствия кажутся парадоксальными. Например, С. Банах и А. Тарский доказали, что сферы S_1 и S_2 различных радиусов можно представить в виде попарно непересекающихся множеств:

$$S_1 = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$
$$S_2 = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n,$$

где множество A_k конгруэнтно множеству B_k при любом $k = 1, 2, \ldots, n$. Этим частям сфер нельзя приписать никакую меру (площадь), иначе, составляя их вместе одним способом, получим одну большую сферу, а используя другое разбиение – меньшую.

ИНТЕГРАЛ

Классический подход построения определенного интеграла (интеграла Коши–Римана) от функции f, определенной на отрезке $[a, b]$, основан на понятии нижней и верхней сумм Дарбу. Они строятся по заданному разбиению отрезка $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ и записываются соответственно в виде

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

При этом функция f называется интегрируемой, если при неограниченном измельчении отрезка $[a, b]$ точками $x_0, \ldots, x_n$ (то есть при стремлении к нулю длины наибольшего из отрезков разбиения) выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Общее значение этих пределов называется интегралом Коши–Римана и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

Если следовать геометрической трактовке интеграла как площади фигуры, заключенной между графиком интегрируемой функции и осью абсцисс, то описанный выше способ построения интеграла можно рассматривать как один из способов построения площади фигуры. Из определения интеграла Коши–Римана видно, что оно плохо учитывает те или иные особенности функции. В качестве примера рассмотрим функцию Дирихле χ: $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, которая определяется по правилу

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ рациональное,} \\ 0, & x \text{ иррациональное.} \end{cases}$$

Поскольку для любого разбиения $0 = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = 1$ отрезка $[0, 1]$ имеют место равенства $m_i = 0$, $M_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $s_n = 0$ и $S_n = \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n = 1$. Отсюда следует, что последовательности (s_n) и (S_n) не имеют общего предела, поэтому функция χ неинтегрируема (по Коши–Риману). К тому же площадью фигуры, заключенной между графиком функции Дирихле и осью абсцисс, естественно считать произведение длины множества рациональных чисел, расположенных на отрезке $[0, 1]$, на единицу, то есть нулевое число.

Современная теория интеграла учитывает недостатки классической теории и основана на разбиении не области определения функции, а ее области значений. Такой подход потребовал привлечения теории меры. Ниже приводится конструкция построения интеграла по произвольной мере.

Пусть $(X, \mathcal{F}, \mu)$ – пространство с мерой и E – измеримое множество из X конечной меры $\mu(E)$. Функцию f: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ назовем ступенчатой, если множество E можно представить в виде $E = E_1 \cup \ldots$ $\ldots \cup E_n$ объединения взаимно непересекающихся измеримых множеств $E_1, \ldots, E_n$, на каждом из которых функция f принимает постоянное значение. Если $f(x) = a_i$, $x \in E_i$, то интегралом от функции f по мере μ называется число

$$a_1\mu(E_1) + \ldots + a_n\mu(E_n),$$

которое обозначается символом $\int_E f(x)\mu(dx)$.

Рассмотрим класс функций, для которых определим интеграл. Неотрицательную функцию φ: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ назовем измеримой, если существует монотонно возрастающая последовательность ступенчатых функций φ_k: $E \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ и $\varphi(x) = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)$ при любом $x \in E$. В этом случае существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k(x)\mu(dx),$$

возможно равный ∞, который называется интегралом от функции φ и обозначается символом $\int\limits_E \varphi(x)\mu(dx)$.

Функцию f: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ назовем измеримой, если измеримы функции f_+, f_-: $E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, имеющие вид

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad f(x) > 0, \\ -f(x), & \text{если} \quad f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Ясно, что $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, $x \in E$.

Другое эквивалентное определение измеримой функции: функция f: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ называется измеримой, если для любых чисел $a < b$ множество $\{x \in E: a < f(x) < b\}$ измеримо.

Отметим, что множество измеримых на множестве E функций обладает следующими свойствами:

1) сумма, произведение измеримых функций являются измеримыми функциями;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in E$, — предел последовательности измеримых функций f_n: $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, является измеримой функцией.

Измеримую функцию f: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ назовем интегрируемой, если конечен интеграл от одной из функций f_+, f_-: $E \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Интеграл от такой функции определяется равенством

$$\int_E f(x)\mu(dx) = \int_E f_+(x)\mu(dx) - \int_E f_-(x)\mu(dx).$$

Имеют место следующие свойства интеграла от интегрируемых функций:

1) $\int\limits_E \alpha f(x)\mu(dx) = \alpha\int\limits_E f(x)\mu(dx)$;

2) $\int\limits_E (f(x) + g(x))\mu(dx) = \int\limits_E f(x)\mu(dx) + \int\limits_E g(x)\mu(dx)$;

3) $\int\limits_E f(x)\mu(dx) = \int\limits_{E_1} f(x)\mu(dx) + \int\limits_{E_2} f(x)\mu(dx) + \ldots$, если $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$, где $E_1, E_2, \ldots$ — взаимно непересекающиеся измеримые подмножества из E;

4) $\int\limits_E f(x)\mu(dx) = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)\mu(dx)$, если $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$, $x \in E$, где φ: $E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ — измеримая функция и $\int\limits_E \varphi(x)\mu(dx) < \infty$;

5) $\int\limits_E f(x)\mu(dx) = 0$, если $\mu(E) = 0$.

Свойство 3 позволяет по любой неотрицательной измеримой функции f: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ построить новую меру μ_f: $\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ по формуле $\mu_f(E) = \int\limits_E f(x)\mu(dx)$.

В частном случае если $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств из $\mathbb{R}$ и l: $\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ — мера Лебега, то для интеграла от любой интегрируемой функции f: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ используется запись

$$\int_E f(x)dx \quad \left(\int_a^b f(x)dx, \text{ если } E = [a, b]\right).$$

Теорема 2. *Для того чтобы функция f: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ была интегрируема по Коши—Риману, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и множество точек ее разрыва имело меру Лебега, равную нулю.*

Рассмотренная ранее неинтегрируемая по Коши—Риману функция Дирихле χ: $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ является ступенчатой. Действительно, $[0, 1] = E_1 \cup E_2$, где E_1 — множество рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$ и E_2 — множество иррациональных чисел, $l(E_1) = 0$, $l(E_2) = 1$, $\chi(x) = 1$ для $x \in E_1$ и $\chi(x) = 0$ для $x \in E_2$. Поэтому

$$\int_0^1 f(x)dx = 1\cdot l(E_1) + 0\cdot l(E_2) = 0.$$

Пусть теперь $(X, \mathcal{F}, \mu_0)$ — пространство с мерой Дирака (из примера 2), E — произвольное множество из X, содержащее выбранную точку x_0, и f: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Поскольку любое подмножество из X измеримо, то E измеримо и измерима функция f.

Для подсчета интеграла $\int\limits_E f(x)\mu_0(dx)$ множество E представим в виде $E = E_0 + E_1$, где $E_0 = \{x_0\}$ и $E_1 = E \setminus E_0$. Тогда из свойства 3 интеграла получаем

$$\int_E f(x)\mu_0(dx) = \int_{E_0} f(x)\mu_0(dx) + \int_{E_1} f(x)\mu_0(dx) = \\ = f(x_0) + 0 = f(x_0).$$

При этом учитывается, что функция f постоянна на множестве E_0 и мера $\mu(E_1)$ на множестве E_1 нулевая.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматгиз, 1976.
2. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968.

* * *

Анатолий Григорьевич Баскаков, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математических методов исследования операций Воронежского государственного университета. Автор двух книг и 85 научных статей.