BASES OF THE ROOT FUNCTIONS OF DIFFERENTIAL OPERATORS

V. A. IL'IN

Taking a linear ordinary differential operator of the second order as a simple model, we discuss a question important in several problems of mathematical physics, whether root functions (i.e. eigen and adjoint functions) of this operator form a basis to expand an arbitrary function.

На модели простейшего оператора – линейного обыкновенного дифференциального оператора второго порядка – обсуждается актуальный для многих задач математической физики вопрос о том, когда корневые (то есть собственные и присоединенные) функции этого оператора образуют базис, по которому можно разложить произвольную функцию.

БАЗИСЫ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. А. ИЛЬИН

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Эта статья естественно примыкает к нашей предыдущей статье [1]. При решении многих актуальных задач математической физики возникает необходимость раскладывать произвольную функцию по специальному базису, состоящему из собственных (а в несамосопряженной ситуации из собственных и присоединенных) функций так называемой задачи на собственные значения для линейного дифференциального оператора.

Необходимость такого разложения возникает при решении нестационарных задач методом разделения переменных.

Отправляясь от элементарной формулы интегрирования по частям, мы на модели линейного обыкновенного дифференциального оператора второго порядка вводим понятия самосопряженного и несамосопряженного формальных дифференциальных операторов и самосопряженных и несамосопряженных краевых условий.

После этого рассматриваются сопряженная и несамосопряженная задачи на собственные значения. Мы показываем, что, в то время как для самосопряженной задачи на собственные значения система одних собственных функций образует ортонормированный базис (разложение по которому, как следует из статьи [1], эквивалентно разложению в ряд Фурье), в случае несамосопряженной задачи на собственные значения система одних собственных функций не только не образует базиса, но и не является замкнутой.

Для получения замкнутой системы собственные функции приходится дополнять присоединенными функциями. (Объединение систем собственных и присоединенных функций называют системой корневых функций.)

Мы приводим установленную автором статьи теорему о необходимых и достаточных условиях базисности систем корневых функций, отвечающей произвольным краевым условиям, и иллюстрируем приложение этой теоремы примерами.

ФОРМУЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Функция $f(x)$ одной независимой переменной x называется *непрерывной в данной точке* $x = c$, в окрестности которой она определена, если существует предел этой функции при x, стремящемся к c,

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

и если этот предел равен значению $f(c)$ функции $f(x)$ в точке $x = c$.

Функция $f(x)$, определенная на сегменте $[a \le x \le \le b]$, называется *непрерывной на этом сегменте*, если эта функция непрерывна в каждой точке x сегмента $[a, b]$.

Если каждая из двух функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет непрерывную на этом сегменте производную первого порядка, то для этих двух функций справедлива формула

$$\int_a^b u'(x)\upsilon(x)dx = $$

$$= [u(b)\upsilon(b) - u(a)\upsilon(a)] - \int_a^b u(x)\upsilon'(x)dx, \qquad (1)$$

называемая *формулой интегрирования по частям* и доказываемая в любом курсе математического анализа (см., например, [2]).

Если дополнительно потребовать, чтобы функция $u(x)$ имела непрерывную на сегменте $[a, b]$ производную второго порядка $u''(x)$, то, взяв в формуле (1) вместо $u(x)$ функцию $u'(x)$, получим равенство

$$\int_a^b u''(x)\upsilon(x)dx = $$

$$= [u'(b)\upsilon(b) - u'(a)\upsilon(a)] - \int_a^b u'(x)\upsilon'(x)dx. \qquad (2)$$

Если еще потребовать, чтобы и функция $\upsilon(x)$ имела непрерывную на сегменте $[a, b]$ производную второго порядка $\upsilon''(x)$, то, взяв в (1) вместо $\upsilon(x)$ функцию $\upsilon'(x)$, получим равенство

$$\int_a^b u'(x)\upsilon'(x)dx = $$

$$= [u(b)\upsilon'(b) - u(a)\upsilon'(a)] - \int_a^b u(x)\upsilon''(x)dx. \qquad (3)$$

Сопоставляя равенства (2) и (3), получим формулу

$$\int_a^b u''(x)\upsilon(x)dx = [u'(b)\upsilon(b) - u'(a)\upsilon(a)] -$$

$$- [u(b)\upsilon'(b) - u(a)\upsilon'(a)] + \int_a^b u(x)\upsilon''(x)dx, \qquad (4)$$

часто называемую *формулой Грина*.

Будем говорить, что произвольная функция $f(x)$ *принадлежит классу* $C^2[a, b]$, если эта функция непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет на этом сегменте непрерывные производные первого и второго порядков.

Тогда можно сказать, что формула Грина (4) справедлива для любых функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$, принадлежащих классу $C^2[a, b]$.

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ И НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В дальнейшем нам придется рассматривать *комплекснозначную функцию* действительной переменной x. Так мы называем функцию $f(x)$, значениями которой в каждой точке x являются комплексные числа вида $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, где i – корень квадратный из числа -1, $i = \sqrt{-1}$, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – обычные действительнозначные функции действительной переменной x. При этом будем говорить, что комплекснозначная функция $f(x)$ принадлежит классу $C^2[a, b]$, если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принадлежит этому классу.

Формальным линейным обыкновенным дифференциальным оператором второго порядка называется выражение вида

$$Lu = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x), \qquad (5)$$

в котором $u(x)$ – комплекснозначная функция, принадлежащая классу $C^2[a, b]$, а $p(x)$ и $q(x)$ – заданные функции (для простоты действительнозначные), первая из которых непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет непрерывную на этом сегменте первую производную, а вторая только непрерывна на сегменте $[a, b]$.

Для комплексного числа $z = a + ib$ назовем комплексное число $a - ib$, обычно обозначаемое символом $\bar{z}$, *комплексно сопряженным к* z.

Назовем *скалярным произведением* двух интегрируемых на сегменте $[a, b]$ комплекснозначных функций $f(x)$ и $g(x)$ комплексное число, обозначаемое символом (f, g) и равное

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \qquad (6)$$

Легко убедиться в том, что скалярное произведение (6) обладает следующими свойствами:

1) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ (для любых комплекснозначных функций $f(x)$ и $g(x)$);

2) $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$, $(f, \lambda g) = \bar{\lambda}(f, g)$ (для любого комплексного числа λ и любых комплекснозначных функций $f(x)$ и $g(x)$);

3) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ (для любых трех комплекснозначных функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$);

4) $(f, f) \geq 0$ (для любой комплекснозначной функции $f(x)$).

Договоримся еще, что произвольная комплекснозначная функция *имеет на сегменте* $[a, b]$ *компактный носитель*, если эта функция отлична от нуля только на некотором сегменте $[c, d]$, лежащем строго внутри интервала (a, b).

Определение 1. Формальный дифференциальный оператор второго порядка L^* называется *сопряженным* к формальному дифференциальному оператору второго порядка L, если для любых двух комплекснозначных функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$, принадлежащих классу $C^2[a, b]$ и имеющих на сегменте $[a, b]$ компактный носитель, справедливо равенство

$$(Lu, \upsilon) = (u, L^*\upsilon). \tag{7}$$

Убедимся, что формальный дифференциальный оператор L^*, сопряженный к формальному дифференциальному оператору L, определяемому равенством (5), имеет вид

$$L^*\upsilon = \upsilon''(x) - [p(x)\upsilon(x)]' + q(x)\upsilon(x). \tag{8}$$

Действительно, для функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$, принадлежащих классу $C^2[a, b]$ и имеющих на сегменте $[a, b]$ компактный носитель, все величины, стоящие в формуле Грина (4) в квадратных скобках, обращаются в нуль, и формула Грина (4), если в ней взять $\overline{\upsilon(x)}$ вместо $\upsilon(x)$, принимает вид

$$\int_a^b u''(x)\overline{\upsilon(x)}dx = \int_a^b u(x)\overline{\upsilon''(x)}dx. \tag{9}$$

Далее из элементарной формулы интегрирования по частям (1) с учетом обращения в ней в нуль величины, стоящей в квадратных скобках, получим, беря в этой формуле $p(x)\overline{\upsilon(x)}$ вместо $\upsilon(x)$:

$$\int_a^b [p(x)u'(x)]\overline{\upsilon(x)}dx = \int_a^b u(x)[p(x)\overline{\upsilon(x)}]'dx. \tag{10}$$

Складывая почленно левые и правые части (9), (10) и тривиального тождества

$$\int_a^b q(x)u(x)\overline{\upsilon(x)}dx = \int_a^b u(x)q(x)\overline{\upsilon(x)}dx, \tag{11}$$

получим соотношение (7), в котором формальный дифференциальный оператор L определяется равенством (5), а формальный дифференциальный оператор L^* – равенством (8).

Определение 2. Формальный дифференциальный оператор второго порядка L называется *самосопряженным*, если он совпадает с сопряженным к нему формальным дифференциальным оператором L^*, то есть если для любых двух комплекснозначных функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$, принадлежащих классу $C^2[a, b]$ и имеющих на сегменте $[a, b]$ компактный носитель, справедливо равенство

$$(Lu, \upsilon) = (u, L\upsilon). \tag{12}$$

Оператор L, не являющийся самосопряженным, называется *несамосопряженным*.

Сопоставление равенств (5) и (8) приводит к заключению, что формальный дифференциальный оператор второго порядка (5) является самосопряженным в случае, когда фигурирующая в нем функция $p(x)$ тождественно равна нулю, то есть в случае, когда этот оператор имеет вид

$$Lu = u''(x) + q(x)u(x). \tag{13}$$

Формальный дифференциальный оператор (13) часто называют *одномерным оператором Шрёдингера*, а фигурирующую в нем функцию $q(x)$ – *потенциалом*.

Если же $p(x) \not\equiv 0$, формальный дифференциальный оператор второго порядка (5) не является самосопряженным.

СОПРЯЖЕННЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Формальные дифференциальные операторы (5) и (8) используются в математической физике для постановки краевых задач и задач на собственные значения. Для этого следует присоединить к формальному дифференциальному оператору краевые условия, которым должно удовлетворять решение порождаемого этим оператором дифференциального уравнения.

Для каждого из сопряженных формальных дифференциальных операторов (5) и (8) краевые условия обычно состоят из двух соотношений:

$$P_1(u) = 0, \qquad P_2(u) = 0 \tag{14}$$

для оператора (5) и

$$Q_1(\upsilon) = 0, \qquad Q_2(\upsilon) = 0 \tag{15}$$

для оператора (8). При этом при $l = 1, 2$ величина $P_1(u)$ в (14) имеет вид

$$P_1(u) = \alpha_l u(a) + \beta_l u(b) + \gamma_l u'(a) + \delta_l u'(b),$$

где α_l, β_l, γ_l и δ_l – некоторые действительные числа, и при $l = 1, 2$ величина $Q_l(\upsilon)$ в (15) имеет вид

$$Q_l(\upsilon) = \hat{\alpha}_l\upsilon(a) + \hat{\beta}_l\upsilon(b) + \hat{\gamma}_l\upsilon'(a) + \hat{\delta}_l\upsilon'(b),$$

где $\hat{\alpha}_l$, $\hat{\beta}_l$, $\hat{\gamma}_l$ и $\hat{\delta}_l$ – некоторые действительные числа.

Краевые условия (15), поставленные для формального дифференциального оператора L^*, называются *сопряженными* к краевым условиям (14), поставленным для формального дифференциального оператора L, если для любых двух (вообще говоря, комплекснозначных) функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$, принадлежащих классу $C^2[a, b]$, первая из которых удовлетворяет краевым условиям (14), а вторая – краевым условиям (15), справедливо равенство (7).

Если при этом краевые условия (14) и (15) совпадают, то есть справедливы равенства

$$Q_1(u) = P_1(u), \qquad Q_2(u) = P_2(u), \tag{16}$$

то краевые условия (14) называются *самосопряженными*. Краевые условия (14), для которых нарушаются равенства (16), называются *несамосопряженными*.

Приведем простейшие примеры. Проверим, что так называемые *краевые условия первого рода*

$$u(a) = 0, \qquad u(b) = 0, \tag{17}$$

поставленные для произвольного (необязательно самосопряженного) формального дифференциального оператора (5), являются самосопряженными.

Пусть $u(x)$ и $\upsilon(x)$ – две произвольные комплекснозначные функции из класса $C^2[a, b]$, первая из которых удовлетворяет краевым условиям (17), а вторая – совпадающим с (17) краевым условиям

$$\upsilon(a) = 0, \qquad \upsilon(b) = 0.$$

Тогда в формуле Грина (4), в которой вместо $\upsilon(x)$ взята функция $\overline{\upsilon(x)}$, выражения, стоящие в обеих квадратных скобках, обращаются в нуль, и эта формула превращается в равенство (9).

В формуле (1), в которой вместо $\upsilon(x)$ взята функция $p(x)\overline{\upsilon(x)}$, выражение, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль, и эта формула превращается в равенство (10). Складывая почленно равенства (9) и (10) и тождество (11), придем к соотношению (7).

Аналогично доказывается, что так называемые *краевые условия второго рода*

$$u'(a) = 0, \qquad u'(b) = 0,$$

поставленные для произвольного самосопряженного формального дифференциального оператора (13), также являются самосопряженными. (Проведите рассуждения сами.)

Приведем пример несамосопряженных краевых условий. Рассмотрим нелокальные краевые условия[1]

$$u(a) = 0, \qquad u'(a) = u'(b). \tag{18}$$

Убедимся в том, что если краевые условия (18) поставлены для самосопряженного формального дифференциального оператора (13), то сопряженными к краевым условиям (18) являются следующие также нелокальные краевые условия

$$\upsilon(a) = \upsilon(b), \qquad \upsilon'(b) = 0. \tag{19}$$

Действительно, если принадлежащие классу $C^2[a, b]$ функции $u(x)$ и $\upsilon(x)$ удовлетворяют краевым условиям (18) и (19) соответственно, то в формуле Грина (4), в которой вместо $\upsilon(x)$ взята функция $\overline{\upsilon(x)}$, выражения, стоящие в обеих квадратных скобках, обращаются в нуль, и эта формула превращается в равенство (9), которое при сложении с тождеством (11) дает соотношение (7), в котором $L^* = L$.

Заметим, что вид краевых условий (15), сопряженных к краевым условиям (14), зависит от вида формального дифференциального оператора L, для которого поставлены краевые условия (14).

Так, если вместо самосопряженного формального дифференциального оператора (13) взять общий формальный дифференциальный оператор второго порядка (5), в котором функция $p(x)$ не равна тождественному нулю, то краевые условия, сопряженные к краевым условиям (18), будут определяться не равенствами (19), а равенствами вида

$$\upsilon(a) = \upsilon(b), \qquad \upsilon'(b) - p(b)\upsilon(b) = 0. \tag{20}$$

Действительно, если функции $u(x)$ и $\upsilon(x)$ из класса $C^2[a, b]$ удовлетворяет краевым условиям (18) и (20) соответственно, то при почленном сложении формул (4) и (11), в которых вместо $\upsilon(x)$ взята функция $\overline{\upsilon(x)}$, и формулы (1), в которой вместо $\upsilon(x)$ взята функция $p(x)\overline{\upsilon(x)}$, получим, что все стоящие в квадратных скобках величины взаимно уничтожаются, и придем к соотношению (7).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Пусть L – формальный дифференциальный оператор (5), а (14) – поставленные для него краевые условия.

Задача на собственные значения заключается в отыскании таких (вообще говоря, комплексных) значений числового параметра λ, для которых существует отличное от тождественного нуля и принадлежащее классу $C^2[a, b]$ решение $u(x)$ дифференциального уравнения $Lu(x) + \lambda u(x) = 0$ на сегменте $a \le x \le b$, удовлетворяющее краевым условиям (14).

При этом указанные значения λ называются *собственными значениями*, а отвечающие им решения $u(x)$ – *собственными функциями* рассматриваемой задачи.

Если в задаче на собственные значения формальный дифференциальный оператор L является самосопряженным и поставленные для него краевые условия (14) также являются самосопряженными, то эта задача на собственные значения называется *самосопряженной*.

Задачи на собственные значения, в которых нарушается самосопряженность либо формального дифференциального оператора, либо краевых условий, либо и того и другого, называются *несамосопряженными*.

Совсем просто устанавливается, что все собственные значения самосопряженной задачи на собственные значения являются действительными.

В самом деле, пусть λ – собственное значение, а $u(x)$ – отвечающая этому λ собственная функция самосопряженной задачи на собственные значения.

[1] Термин “нелокальные” объясняется тем, что второе из условий (18) связывает значения функции $u(x)$ в двух *различных* граничных точках $x = a$ и $x = b$.

Тогда в силу свойств скалярного произведения и соотношения (12)

$$\lambda(u, u) = (\lambda u, u) = (-Lu, u) = (u, -Lu) =$$
$$= (u, \lambda u) = \bar{\lambda}(u, u),$$

и поскольку $(u, u) > 0$, то $\lambda = \bar{\lambda}$, то есть λ – действительное число.

Будем рассматривать пространство $L_2[a, b]$ всех комплекснозначных функций $f(x)$, для которых существует интеграл

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

понимаемый не только в смысле определения интеграла по Риману, но и в более общем смысле (в смысле определения интеграла по Лебегу, которое выходит за рамки этой статьи).

Две произвольные функции из этого пространства $f(x)$ и $g(x)$ будем называть *ортогональными*, если их скалярное произведение (6) равно нулю.

Легко доказывается, что в случае самосопряженной задачи на собственные значения две собственные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, отвечающие двум различным собственным значениям λ_1 и λ_2, ортогональны. В самом деле, с учетом действительности λ_1 и λ_2 получим $\lambda_1(u_1, u_2) = (-Lu_1, u_2) = (u_1, -Lu_2) = (u_1, \lambda u_2) = \lambda_2(u_1, u_2)$, откуда следует, что $(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0$, и $(u_1, u_2) = 0$ (в силу того, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Назовем *ортонормированной системой* в пространстве $L_2[a, b]$ последовательность функций $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, попарно ортогональных и таких, что норма каждой из этих функций, определяемая равенством $\|u_k\| = \sqrt{(u_k, u_k)}$, равна единице.

Произвольную (необязательно ортонормированную) последовательность функций $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, принадлежащих пространству $L_2[a, b]$, назовем *замкнутой системой* в $L_2[a, b]$, если для любой функции $f(x)$ из пространства $L_2[a, b]$ и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n и такие действительные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \right\| = \sqrt{\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \right]^2 dx} < \varepsilon.$$

Как и в предыдущей статье [1], устанавливается, что любая замкнутая в пространстве $L_2[a, b]$ ортонормированная система $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, образует базис в этом пространстве, то есть для любой функции $f(x)$ из пространства $L_2[a, b]$ существует однозначно определяемая последовательность чисел $c_k = (f, u_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \right\| = 0.$$

В современном функциональном анализе доказывается, что для любой самосопряженной задачи на собственные значения систему всех собственных функций можно выбрать так, чтобы она являлась замкнутой ортонормированной в пространстве $L_2[a, b]$ системой, то есть образовывала в пространстве $L_2[a, b]$ ортонормированный базис (см., например, [3]).

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Гораздо сложнее обстоит дело в случае несамосопряженных задач на собственные значения. Для таких задач система всех собственных функций, во-первых, не является ортонормированной системой и, во-вторых, не только не образует базиса в пространстве $L_2[a, b]$, по которому можно разложить произвольную функцию, но и не является замкнутой в этом пространстве.

В случае несамосопряженных задач на собственные значения для получения замкнутой в пространстве $L_2[a, b]$ системы приходится к системе собственных функций добавлять так называемые *присоединенные функции*, к определению которых мы и переходим.

Пусть задача на собственные значения для формального оператора (5) с краевыми условиями (14) имеет собственное значение λ и отвечающую ему собственную функцию $u_0(x)$. Тогда если существует функция $u_1(x)$, принадлежащая классу $C^2[a, b]$, удовлетворяющая краевым условиям (14) и являющаяся на сегменте $[a, b]$ решением дифференциального уравнения $Lu_1(x) + \lambda u_1(x) = u_0(x)$, то эта функция называется *присоединенной функцией первого порядка*, отвечающей собственному значению λ и собственной функции $u_0(x)$.

Аналогично последовательно определяются присоединенные функции более высоких порядков. Если уже определена присоединенная функция $u_m(x)$ порядка $m \geq 1$, отвечающая собственному значению λ и собственной функции $u_0(x)$, и если существует функция $u_{m+1}(x)$, принадлежащая классу $C^2[a, b]$, удовлетворяющая краевым условиям (14) и являющаяся на сегменте $[a, b]$ решением дифференциального уравнения $Lu_{m+1}(x) + \lambda u_{m+1}(x) = u_m(x)$, то эта функция $u_{m+1}(x)$ называется присоединенной функцией порядка $m + 1$, отвечающей собственному значению λ и собственной функции $u_0(x)$.

Договоримся называть *корневыми функциями* задачи на собственные значения все собственные и все присоединенные функции этой задачи.

Отметим, что в системе корневых функций присоединенные функции определяются неоднозначно: если, например, $u_1(x)$ является присоединенной функцией первого порядка, отвечающей собственному значению λ и собственной функции $u_0(x)$, то и функция $u_1(x) + Cu_0(x)$, где C – любая постоянная, также является присоединенной функцией первого порядка, отвечающей собственному значению λ и собственной функции $u_0(x)$.

Большой заслугой М.В. Келдыша (см. [4]) является его работа, в которой он для широкого класса несамосопряженных задач на собственные значения построил некоторую специальную систему корневых функций (названную им *канонической*) и доказал, что эта система является замкнутой в пространстве $L_2[a, b]$. Однако теория Келдыша не решила вопроса о построении базиса из корневых функций.

Ниже мы изложим результаты, принадлежащие автору статьи и относящиеся к проблеме базисности корневых функций несамосопряженных задач на собственные значения (см. [5, 6] и послесловие к монографии [7]).

Пара систем функций $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\upsilon_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, принадлежащих пространству $L_2[a, b]$, называется *биортонормированной парой* в $L_2[a, b]$, если

$$(u_k, \upsilon_l) = \int_a^b u_k(x)\overline{\upsilon_l(x)}dx = \begin{cases} 1 & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

При этом система $\upsilon_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, называется *биортогонально сопряженной к системе* $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$

Из соображений, обоснование которых выходит за рамки статьи, вытекает, что система $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, корневых функций задачи на собственные значения для формального дифференциального оператора (5) с краевыми условиями (14) имеет в качестве биортогонально сопряженной системы систему $\upsilon_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, корневых функций задачи на собственные значения для формального дифференциального оператора (8) с краевыми условиями (15).

С целью охватить несамосопряженные задачи на собственные значения для формального дифференциального оператора L со всеми возможными краевыми условиями будем рассматривать произвольную систему комплекснозначных функций $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, каждая из которых принадлежит классу $C^2[a, b]$ и для некоторого комплексного числа λ_k удовлетворяет на сегменте $[a, b]$ дифференциальному уравнению

$$Lu_k(x) + \lambda_k u_k(x) = \Theta_k u_{k-1}(x), \tag{21}$$

в котором число Θ_k равно либо нулю, либо единице (в последнем случае дополнительно требуется, чтобы $\lambda_k = \lambda_{k-1}$).

Эту систему $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, будем называть *системой обобщенных корневых функций* (ОКФ) формального дифференциального оператора L.

В случае, если в уравнении (21) $\Theta_k = 0$, будем называть $u_k(x)$ *обобщенной собственной функцией*, а в случае, если в уравнении (21) $\Theta_k = 1$, будем называть $u_k(x)$ *обобщенной присоединенной функцией.*

Нумерация системы ОКФ идет так, что вслед за каждой собственной функцией стоят все входящие с ней в одну цепочку присоединенные функции.

Введенная нами система ОКФ формального дифференциального оператора L включает в себя систему корневых функций задачи на собственные значения для оператора L с произвольными краевыми условиями вида (14).

Обозначим через μ_k комплексное число, удовлетворяющее условию $\mu_k^2 = \lambda_k$, действительная часть которого, обозначаемая символом $\mathrm{Re}\mu_k$, неотрицательна.

Потребуем, чтобы рассматриваемая система ОКФ формального дифференциального оператора L удовлетворяла следующим трем условиям А:

1) система $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, была замкнутой в $L_2[a, b]$ и допускала в $L_2[a, b]$ существование биортогонально сопряженной к ней системы $\upsilon_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) мнимые части чисел μ_k, обозначаемые символом $\mathrm{Im}\mu_k$, для всех номеров k удовлетворяли неравенству

$$|\mathrm{Im}\mu_k| \le C_1; \tag{22}$$

3) для любого действительного числа $t \ge 0$ сумма $\sum\limits_{t \le |\mu_k| \le t+1} 1$, равная числу всех величин $|\mu_k|$, лежащих на сегменте $[t, t + 1]$, удовлетворяла неравенству

$$\sum_{t \le |\mu_k| \le t+1} 1 \le C_2. \tag{23}$$

Неравенство (23) позволяет занумеровать рассматриваемую систему ОКФ в порядке неубывания чисел $|\mu_k|$ и для любой функции $f(x)$ из пространства $L_2[a, b]$ и любого номера m составить сумму

$$\sum_{i=1}^{m} (f, \upsilon_k)u_k(x).$$

(Здесь $\upsilon_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, – биортогонально сопряженная система.)

Определение 3. Будем говорить, что *система ОКФ* $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *обладает свойством базисности* в $L_2[a, b]$, если для любого сегмента $[a_1, b_1]$, содержащегося в интервале (a, b),

$$\lim_{m\to\infty}\left\| \sum_{i=1}^{m} (f, \upsilon_k)u_k - f \right\|_{L_2[a_1, b_1]} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sqrt{\int_{a_1}^{b_1}\left[\sum_{i=1}^{m} (f, \upsilon_k)u_k(x) - f(x)\right]^2 dx} = 0.$$

Основная теорема. *Для того чтобы произвольная система* $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *ОКФ оператора* L, *удовлетворяющая трем условиям* А, *обладала свойством базисности в* $L_2[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого содержащегося в интервале* (a, b) *сегмента* $[a_1, b_1]$ *существовала постоянная* $C[a_1, b_1]$, *обеспечивающая справедливость для всех номеров k неравенства*

$$\int_{a_1}^{b_1}|u_k(x)|^2dx\int_a^b|\upsilon_k(x)|^2(dx) \le C[a_1, b_1]. \qquad (24)$$

Особо подчеркнем, что для конкретных сопряженных задач на собственные значения выполнение условий основной теоремы (и, в частности, условий (22), (23) и (24)) может быть проверено (ибо для этих задач справедлива теорема о замкнутости Келдыша и разработаны методы разложения собственных значений λ_k и корневых функций $u_k(x)$ и $\upsilon_k(x)$ по степеням $\frac{1}{\mu_k}$).

В частности, для рассмотренных выше конкретных сопряженных задач на собственные значения для оператора (13) с нелокальными краевыми условиями (18) и (19) при условии $a = 0$, $b = 1$ собственные значения имеют вид $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = (2\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$ Им отвечают образующие биортонормированную пару корневые функции двух сопряженных задач

$$u_0(x) = x, \qquad u_{2k-1}(x) = \sin(2\pi kx),$$
$$u_{2k}(x) = -\frac{x}{4\pi k}\cos(2\pi kx), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad (25)$$

$$\upsilon_0(x) = 2, \qquad \upsilon_{2k-1}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx),$$
$$\upsilon_{2k}(x) = -16\pi k\cos(2\pi kx), \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad (26)$$

При этом функции $u_0(x)$, $\upsilon_0(x)$, $u_{2k-1}(x)$ и $\upsilon_{2k}(x)$ являются собственными, а функции $u_{2k}(x)$ и $\upsilon_{2k-1}(x)$ – присоединенными.

Тривиально проверяется, что все условия (22), (23) и (24) выполнены и поэтому каждая из систем (25) и (26) обладает свойством базисности в $L_2[0, 1]$.

Если же вместо биортонормированной пары (25), (26) взять другую биортонормированную пару –

$$\hat{u}_0(x) = u_0(x), \qquad \hat{u}_{2k-1}(x) = u_{2k-1}(x),$$
$$\hat{u}_{2k}(x) = u_{2k}(x) + Cu_{2k-1}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad (27)$$

$$\hat{\upsilon}_0(x) = \upsilon_0(x), \qquad \hat{\upsilon}_{2k-1}(x) = \upsilon_{2k-1}(x) - C\upsilon_{2k}(x),$$
$$\hat{\upsilon}_{2k}(x) = \upsilon_{2k}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad (28)$$

где C – любая отличная от нуля постоянная, при любом $C \ne 0$ для биортонормированной пары (27), (28) условия (22) и (23) выполнены, а условие (24) нарушено, и поэтому каждая из систем (27) и (28) не обладает свойством базисности в $L_2[a, b]$ (хотя и является канонической в смысле Келдыша).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* Базисы в евклидовых пространствах и ряды Фурье // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 4. С. 95–101.

2. *Ильин В.А.*, *Садовничий В.А.*, *Сендов Бл.Х.* Математический анализ. М.: Изд-во МГУ, 1985. Т. 1. 662 с.

3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

4. *Келдыш М.В.* // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.

5. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 789–793.

6. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 9. С. 1516–1528.

7. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991. 368 с.

* * *

Владимир Александрович Ильин, профессор, зав. кафедрой Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, главный научный сотрудник Математического института РАН им. В.А. Стеклова, лауреат Государственной премии СССР, академик РАН. Автор более 230 научных публикаций по теории функций, теории дифференциальных уравнений и математической физике, университетских учебников по математическому анализу, аналитической геометрии и линейной алгебре и монографии по спектральной теории дифференциальных операторов.