BASES IN EUCLIDEAN SPACES AND FOURIER SERIES

V. A. IL'IN

An idea of constructing a basis, with respect to which one can expand any vector of a finite-dimensional (e.g., three-dimensional) space, is applied in the case of an infinite-dimensional space and related to the Fourier expansion. Important for applications classical examples of such expansions are observed.

Идея построения базиса, по которому может быть разложен произвольный вектор конечномерного (например, трехмерного) пространства, переносится на случай бесконечномерного пространства и увязывается с разложением в ряд Фурье. Строятся актуальные для приложений классические примеры таких разложений.

БАЗИСЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И РЯДЫ ФУРЬЕ

В. А. ИЛЬИН

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Из школьного курса известно, что в трехмерном пространстве может быть построен базис, состоящий из трех векторов e_1, e_2, e_3 и такой, что любой вектор f трехмерного пространства может быть однозначно разложен по этому базису, то есть представлен в виде $f = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, где α_1, α_2, α_3 – действительные числа, называемые координатами вектора f в базисе e_1, e_2, e_3.

Особую роль играют ортонормированные (или декартовы прямоугольные) базисы, состоящие из попарно перпендикулярных или, что то же самое, попарно ортогональных векторов e_1, e_2, e_3, длина каждого из которых равна единице.

Мы изучим ортонормированные базисы, возникающие в бесконечномерном евклидовом пространстве любой природы и состоящие из бесконечной последовательности элементов e_1, e_2, ..., e_n, ..., и увяжем проблему разложения произвольного элемента f изучаемого евклидова пространства с проблемой разложения этого элемента в так называемый общий ряд Фурье.

Сначала мы введем понятия *линейного* и *евклидова пространств* любой природы и любой размерности и понятие *нормы* (то есть обобщенной длины) любого элемента евклидова пространства. Затем в евклидовом пространстве бесконечной размерности рассмотрим произвольную ортонормированную систему элементов, то есть произвольную бесконечную последовательность e_1, e_2, ..., e_n, ... попарно ортогональных элементов, норма каждого из которых равна единице. Такая система без дополнительных предположений не является базисом, но тем не менее можно ввести понятие *общего ряда Фурье* в разложении любого элемента f по такой системе и установить некоторые важные свойства такого ряда Фурье (например, справедливость для любого элемента f так называемого *неравенства Бесселя*). После этого вводится понятие *замкнутой* ортонормированной системы в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве и устанавливается, что эта система является в указанном пространстве ортонормированным базисом, что для нее неравенство Бесселя переходит в точное равенство, называемое *равенством Парсеваля*, и что ряд Фурье любого элемента по этой системе сходится к этому элементу по норме изучаемого евклидова пространства.

Наконец, в качестве конкретной реализации изученных общих бесконечномерных евклидовых пространств и замкнутых ортонормированных систем в этих пространствах рассматриваются евклидово пространство всех интегрируемых (по Риману) на конечном сегменте $[a, b]$ функций и в нем классические ряды Фурье *по тригонометрической системе и по системе полиномов Лежандра.* Не останавливаясь на доказательстве замкнутости указанных двух ортонормированных систем, мы из нашего общего рассмотрения извлечем очень нетривиальную теорему о том, что для любой только интегрируемой (по Риману) функции ряды Фурье по указанным двум классическим системам сходятся к этой функции *в среднем.*

Приступим к реализации указанного плана.

ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО И ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВ ЛЮБОЙ ПРИРОДЫ И ЛЮБОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Определение 1. Множество R элементов $f, g, h, \ldots$ любой природы называется *линейным пространством*, если выполняются следующие три требования:

(I) имеется правило, посредством которого любым двум элементам f и g множества R ставится в соответствие третий элемент h этого множества, называемый *суммой* этих элементов f и g и обозначаемый символом $h = f + g$;

(II) имеется правило, посредством которого любому элементу f множества R и любому действительному числу λ ставится в соответствие элемент g этого множества, называемый *произведением элемента f на число* λ и обозначаемый символом $g = \lambda f$ или $g = f\lambda$;

(III) указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам:

1) $f + g = g + f$ (переместительное свойство суммы);

2) $(f + g) + h = f + (g + h)$ (сочетательное свойство суммы);

3) существует *нулевой элемент* O такой, что $f + O = f$ для любого элемента f (особая роль нулевого элемента);

4) для каждого элемента f существует *противоположный элемент* f' такой, что $f + f' = O$;

5) $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$ для любого элемента f (особая роль числового множителя 1);

6) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$ для любого элемента f и любых действительных чисел λ и μ (сочетательное относительно числового множителя свойство);

7) $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$ для любого элемента f и любых действительных чисел λ и μ (распределительное относительно числовых множителей свойство);

8) $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$ для любых элементов f и g и любого действительного числа λ (распределительное относительно суммы элементов свойство).

Подчеркнем, что при введении понятия линейного пространства мы абстрагируемся не только от природы изучаемых элементов, но и от конкретного вида правил образования суммы элементов и произведения элемента на число (важно лишь, чтобы эти правила удовлетворяли восьми аксиомам, сформулированным в требовании III определения 1).

Для того чтобы ввести понятие размерности линейного пространства R и понятие базиса этого пространства, дадим еще несколько определений.

Определение 2. *Линейной комбинацией* элементов $f, g, \ldots, h$ линейного пространства R будем называть сумму произведений этих элементов на произвольные действительные числа, то есть выражение вида

$$\alpha f + \beta g + \ldots + \gamma h, \tag{1}$$

в котором $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ – какие угодно действительные числа.

Определение 3. Элементы $f, g, \ldots, h$ линейного пространства R называются *линейно-независимыми*, если линейная комбинация (1) этих элементов является нулевым элементом пространства R лишь при условии, что все действительные числа $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ равны нулю.

Определение 4. Элементы $f, g, \ldots, h$ линейного пространства R называются *линейно-зависимыми*, если найдутся такие действительные числа $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что линейная комбинация (1) с этими действительными числами является нулевым элементом пространства R.

Определение 5. Целое положительное число n называется *размерностью* линейного пространства R, если в этом пространстве существует n линейно-независимых элементов, а любые $n + 1$ элементов этого пространства являются линейно-зависимыми.

Определение 6. Линейное пространство R называется *бесконечномерным*, если в нем существует любое целое положительное число линейно-независимых элементов.

Задание. Докажите сами, что если линейное пространство R имеет конечную размерность n, то любые n линейно-независимых элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ этого пространства образуют базис, то есть обладают тем свойством, что любой элемент f пространства R однозначно представляется в виде некоторой линейной комбинации $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Мы же сосредоточим свое внимание на *бесконечномерном* линейном пространстве.

Классическим примером такого пространства является множество $M[a, b]$ всех интегрируемых по Риману на конечном сегменте $[a, b]$ функций $f(x)$ с обычным определением операции сложения двух функций и операции умножения функции на действительное число. Справедливость всех восьми аксиом, входящих в требование III определения 1, не вызывает сомнений, и нам остается доказать только, что изучаемое линейное пространство $M[a, b]$ является бесконечномерным. Для этого в силу определения 6 достаточно доказать, что в $M[a, b]$

существует любое целое положительное число линейно-независимых элементов. Фиксируем любое натуральное n и убедимся в том, что $n + 1$ элементов $1, x, x^2, \ldots, x^n$ пространства $M[a, b]$ линейно-независимы. Действительно, если бы эти элементы являлись линейно-зависимыми, то нашлись бы действительные числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю и такие, что линейная комбинация $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$ являлась бы нулевым элементом пространства $M[a, b]$, то есть являлась бы тождественным нулем на всем сегменте $a \le x \le b$, а это невозможно в силу того, что многочлен не выше n-й степени может обращаться в нуль не более чем в n точках сегмента $a \le x \le b$.

Введем теперь понятие евклидова пространства.

Определение 7. Линейное пространство R любой природы называется *евклидовым* пространством, если выполнены следующие два требования:

(I) имеется правило, посредством которого любым двум элементам f и g пространства R ставится в соответствие действительное число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое символом (f, g);

(II) правило, указанное в требовании I, подчинено следующим четырем аксиомам:

1) $(f, g) = (g, f)$ для любых элементов f и g (симметрия);

2) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ для любых элементов f, g и h (распределительное свойство);

3) $(\lambda f, g) = \lambda(g, f)$ для любого действительного числа λ и любых элементов f и g;

4) $(f, f) \ge 0$ для любого элемента f.

Замечание 1. В определении 7 мы абстрагируемся не только от природы изучаемых элементов и конкретного вида правил образования суммы элементов и произведения элемента на действительное число, но и от конкретного вида правила образования скалярного произведения двух элементов. Важно лишь, чтобы указанные правила удовлетворяли восьми аксиомам из требования III определения 1 и четырем аксиомам из требования II определения 7.

Замечание 2. В настоящее статье мы даем более общее, чем это обычно принято, определение евклидова пространства. Обычно аксиома 4 из требования II содержит следующее дополнительное условие: $(f, f) = 0$ только в случае, когда f является нулевым элементом пространства R. Отсутствие этого дополнительного условия позволит нам расширить класс конкретных реализаций изучаемых евклидовых пространств (и, в частности, включить в рассмотрение пространство $M[a, b]$ всех функций $f(x)$, только интегрируемых по Риману на конечном сегменте $a \le x \le b$).

Теорема 1. *В любом евклидовом пространстве*[1] *для любых элементов f и g справедливо следующее неравенство*:

$$(f, g)^2 \le (f, f) \cdot (g, g), \tag{2}$$

называемое неравенством Коши—Буняковского.

Доказательство. Пусть сначала элементы f и g таковы, что $(f, f) = 0$ и $(g, g) = 0$. Тогда из четырех аксиом требования II определения 7 получим, что, с одной стороны, $(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) \ge 0$, то есть $(f, g) \ge 0$, а с другой стороны, $(f - g, f - g) = (f, f) - 2(f, g) + (g, g) \ge 0$, то есть $(f, g) \le 0$. Отсюда заключаем, что $(f, g) = 0$ и неравенство (2) справедливо, ибо как в левой, так и в правой части этого неравенства стоят нули.

Пусть теперь элементы f и g таковы, что справедливо хотя бы одно из двух неравенств $(f, f) > 0$, $(g, g) > 0$. Ради определенности предположим, что справедливо неравенство $(f, f) > 0$. Тогда для любого действительного числа λ из четырех аксиом требования II определения 7 получим

$$(\lambda f - g, \lambda f - g) = \lambda^2(f, f) - 2\lambda(f, g) + (g, g) \ge 0. \tag{3}$$

Но необходимым условием неотрицательности стоящего в левой части (3) квадратного трехчлена является неположительность его дискриминанта, то есть неравенство $(f, g)^2 - (f, f) \cdot (g, g) \le 0$, эквивалентное неравенству (2). Теорема доказана.

Определение 8. *Нормой* (или *обобщенной длиной*) любого элемента f произвольного евклидова пространства назовем действительное число, обозначаемое символом $\|f\|$ и определяемое равенством

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \tag{4}$$

Отметим три простейших свойства нормы:

1) $\|f\| \ge 0$ для любого элемента f;

2) $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$ для любого действительного числа λ и любого элемента f;

3) $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ для любых элементов f и g (*неравенство треугольника*).

Свойство 1 является тривиальным следствием определения нормы (4) и аксиомы 4 из требования II определения 7. Свойство 2 вытекает из определения нормы (4) и аксиом требования II определения 7. Действительно,

$$\|\lambda f\| = \sqrt{(\lambda f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda^2 (f, f)} = |\lambda| \sqrt{(f, f)} = |\lambda|\,\|f\|.$$

Наконец, свойство 3 вытекает из определения нормы (4), из аксиом 1—4 требования II определения 7 и неравенства Коши—Буняковского (2), записанного в виде

$$|(f, g)| = \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)}.$$

Действительно,

[1] Размерность евклидова пространства при этом любая.

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) \le$$
$$\le (f, f) + 2|(f, g)| + (g, g) \le$$
$$\le (f, f) + 2\sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)} + (g, g) =$$
$$= [\sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)}]^2 = [\|f\| + \|g\|]^2.$$

В линейном пространстве $M[a, b]$ всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на сегменте $a \le x \le b$, введем скалярное произведение двух элементов $f = f(x)$ и $g = g(x)$ по правилу

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \qquad (5)$$

С помощью свойств интеграла Римана тривиально проверяется выполнение для скалярного произведения (5) всех четырех аксиом требования II определения 7.

Норма любого элемента $f = f(x)$ в силу (4) и (5) определяется равенством

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}. \qquad (6)$$

ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И РЯДЫ ФУРЬЕ В ПРОИЗВОЛЬНОМ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим бесконечномерное евклидово пространство.

Определение 9. Два элемента произвольного евклидова пространства называются *ортогональными*, если скалярное произведение этих элементов равно нулю.

Определение 10. Бесконечная последовательность $e_1, e_2, …, e_n, …$ элементов произвольного бесконечномерного евклидова пространства называется *ортонормированной системой* и кратко обозначается символом $\{e_k\}$, если все указанные элементы попарно ортогональны и норма каждого из этих элементов равна единице.

Определение 11. Для произвольного элемента f произвольного бесконечномерного евклидова пространства и произвольной ортонормированной системы элементов $\{e_k\}$ назовем *рядом Фурье элемента f по системе* $\{e_k\}$ формально составленную бесконечную сумму вида

$$f_1e_1 + f_2e_2 + … f_ne_n + … = \sum_{k=1}^{\infty} f_ke_k, \qquad (7)$$

в которой действительные числа f_k, называемые *коэффициентами Фурье* элемента f по системе $\{e_k\}$,

$$f_k = (f, e_k). \qquad (8)$$

Каждое слагаемое в (7) будем называть *членом* ряда Фурье (7), а сумму первых n членов

$$S_n = f_1e_1 + f_2e_2 + … + f_ne_n = \sum_{k=1}^{n} f_ke_k \qquad (9)$$

n-й частичной суммой ряда Фурье (7).

Фиксируем произвольный номер n и выясним, что отличает n-ю частичную сумму ряда Фурье (9) от любой другой линейной комбинации первых n элементов ортонормированной системы $\{e_k\}$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} c_ke_k \qquad (10)$$

с какими угодно действительными числами $c_1, c_2, …$ $…, c_n$.

Для любых двух элементов f и σ договоримся называть величину $\|f - \sigma\|$ *отклонением* σ от f (по норме данного евклидова пространства).

Теорема 2. *Для любого фиксированного номера n среди всех сумм вида* (10) *наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет n-я частичная сумма* (9) *ряда Фурье элемента f* (*то есть сумма* (10) *при* $c_k = f_k$).

Доказательство. Учитывая ортонормированность системы $\{e_k\}$, определение (8) коэффициента Фурье и используя аксиомы требования II определения 7, можно записать

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_ke_k - f\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_ke_k - f, \sum_{l=1}^{n} c_le_l - f\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2(e_k, e_k) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k(f, e_k) + (f, f) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_kf_k + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2.$$

Итак, мы получили тождество

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_ke_k - f\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 + \|f\|^2 - \sum_{l=1}^{n} f_k^2. \qquad (11)$$

В левой части (11) стоит квадрат отклонения суммы (10) от элемента f (по норме данного евклидова пространства). Из вида правой части (11) следует, что указанный квадрат отклонения является наименьшим при $c_k = f_k$ (ибо при этом всегда неотрицательная первая сумма в правой части (11) обращается в нуль, а остальные слагаемые в правой части (11) от c_k не зависят).

Теорема доказана.

Извлечем из теоремы 2 два следствия, первое из которых получается из тождества (11) с учетом того, что первая сумма в правой части (11) неотрицательна, а второе получается из тождества (11) при $c_k = f_k$.

Следствие 1. *Для любого номера n, любого элемента f произвольного бесконечномерного евклидова пространства и любой ортонормированной системы* $\{e_k\}$

при произвольном выборе действительных чисел c_k *справедливо неравенство*

$$\|f\|^2 - \sum_{l=1}^{n} f_k^2 \le \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k - f \right\|^2. \qquad (12)$$

Следствие 2. *Для любого номера n, любого элемента f произвольного бесконечномерного евклидова пространства и любой ортонормированной системы* $\{e_k\}$ *справедливо равенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{l=1}^{n} f_k^2, \qquad (13)$$

называемое тождеством Бесселя.

Составим теперь формально бесконечную сумму неотрицательных действительных слагаемых

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2 + \ldots = \sum_{l=1}^{\infty} f_k^2, \qquad (14)$$

называемую *рядом*. Ряд (14) называется *сходящимся и имеющим сумму S*, если последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k^2$, называемая *последовательностью его n-х частичных сумм*, имеет конечный предел, равный S. При этом пишут $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = S$.

Теорема 3. *Для любого элемента f произвольного бесконечномерного евклидова пространства и любой ортонормированной системы* $\{e_k\}$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2, \qquad (15)$$

называемое неравенством Бесселя.

Доказательство. Из равенства (13) и неотрицательности левой части (13) вытекает, что для любого номера n справедливо неравенство $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f\|^2$.

Это неравенство означает, что все элементы последовательности S_n частичных сумм ряда (14) удовлетворяют условию $S_n \le \|f\|^2$, то есть последовательность S_n ограничена (действительным числом $\|f\|^2$). Так как, кроме того, последовательность S_n не убывает, то она сходится к пределу S (являющемуся суммой ряда (14)), который также удовлетворяет неравенству $S \le \|f\|^2$.

Теорема доказана.

Заметим, что произвольная ортонормированная система в бесконечномерном евклидовом пространстве без дополнительных предположений, вообще говоря, не является базисом этого пространства. Прежде чем перейти к выяснению этих дополнительных предположений, приведем два классических примера ортонормированных систем в евклидовом пространстве $M[a, b]$ всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на сегменте $[a, b]$ со скалярным произведением (5) и нормой (6).

В качестве первого примера рассмотрим при $a = -\pi$, $b = \pi$, то есть в пространстве $M[-\pi, \pi]$ всех интегрируемых по Риману функций на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций $f(x)$, так называемую *тригонометрическую систему*:

$$\begin{gathered} e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad e_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots \\ \ldots, \quad e_{2k-1} = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2k} = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots, \\ k = 1, 2, \ldots \end{gathered} \qquad (16)$$

Задание. Проверьте сами, что все функции (16) попарно ортогональны в смысле скалярного произведения (5), взятого при $a = -\pi$, $b = \pi$, и норма каждой из функций (16), определяемая равенством (6) при $a = -\pi$, $b = \pi$, равна единице.

Ряд Фурье (7) по тригонометрической системе (16) имеет вид

$$f_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} - \bar{\bar{f}}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right), \qquad (17)$$

где коэффициенты Фурье f_0, $\bar{f}_k$ и $\bar{\bar{f}}_k$ определяются формулами

$$\begin{gathered} f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad \bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \\ \bar{\bar{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \\ k = 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

Неравенство Бесселя (15), справедливое для любой только интегрируемой по Риману на сегменте $-\pi \le x \le \pi$ функции $f(x)$, имеет вид

$$f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k^2 + \bar{\bar{f}}_k^2 \right) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \qquad (18)$$

Впрочем, в теории тригонометрических рядов Фурье, составляющих один из обширных разделов современной теории функций, принята несколько иная форма записи как ряда Фурье (17), так и неравенства Бесселя (18). Именно: тригонометрический ряд Фурье (17) обычно записывают в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (19)$$

где

$$a_0 = \frac{2f_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$b_k = \frac{\overline{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx,$$

$$a_k = \frac{\overline{\overline{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx,$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

При такой форме записи неравенство Бесселя (18) принимает вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \qquad (20)$$

В качестве второго примера рассмотрим при $a =$ $= -1$, $b = 1$, то есть в пространстве $M[-1, 1]$ всех интегрируемых по Риману на сегменте $-1 \le x \le 1$ функций $f(x)$, *систему нормированных полиномов Лежандра*

$$e_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{k!2^k}[(x^2-1)^k]^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (21)$$

Можно показать, что все элементы системы (21) попарно ортогональны в смысле скалярного произведения (5), взятого при $a = -1$, $b = 1$, и что норма каждой из функций (21), определяемая равенством (6) при $a = -1$, $b = 1$, равна единице.

Задание. Для любой интегрируемой на сегменте $-1 \le x \le 1$ функции $f(x)$ запишите ряд Фурье (7) по системе (21) и неравенство Бесселя (15).

ЗАМКНУТЫЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ КАК БАЗИСЫ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Снова рассмотрим ортонормированную систему $\{e_k\}$ в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве.

Определение 12. Ортонормированная система $\{e_k\}$ называется *замкнутой*, если любой элемент f данного евклидова пространства можно приблизить по норме этого евклидова пространства с любой степенью точности линейной комбинацией конечного числа элементов системы $\{e_k\}$, то есть если для любого элемента f и любого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такой номер n и такие действительные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k - f \right\| < \varepsilon. \qquad (22)$$

Теорема 4. *Если ортонормированная система $\{e_k\}$ является замкнутой, то для любого элемента f данного евклидова пространства неравенство Бесселя* (15) *переходит в точное равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2, \qquad (23)$$

называемое равенством Парсеваля.

Доказательство. При доказательстве теоремы 3 мы уже установили, что последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k^2$ частичных сумм ряда (14) имеет предел, равный $S = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ и удовлетворяющий неравенству $S \le \|f\|^2$.

Чтобы доказать, что этот предел S равен числу $\|f\|^2$, достаточно для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ доказать неравенство $S \ge \|f\|^2 - \varepsilon^2$, а в силу неубывания последовательности S_n тем более достаточно доказать, что для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ у этой последовательности есть элемент S_n, удовлетворяющий неравенству

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \ge \|f\|^2 - \varepsilon^2. \qquad (24)$$

Фиксируем произвольное как угодно малое $\varepsilon > 0$. Тогда в силу замкнутости найдутся такой номер n и такие действительные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что справедливо неравенство (22). Сопоставляя это неравенство с неравенством (12), справедливым для любых $c_1, c_2, \ldots, c_n$, получим неравенство (24).

Теорема доказана.

Теорема 5. *Если ортонормированная система $\{e_k\}$ является замкнутой, то ряд Фурье любого элемента f данного евклидова пространства сходится к этому элементу по норме данного евклидова пространства, то есть существует равный нулю предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k e_k - f \right\| = 0. \qquad (25)$$

Доказательство. Достаточно в тождестве (13) перейти к пределу $n \longrightarrow \infty$ и использовать теорему 4.

Определение 13. Будем говорить, что *ортонормированная система $\{e_k\}$ образует базис* в данном бесконечномерном евклидовом пространстве, если для любого элемента f этого пространства существует такая однозначно определенная последовательность действительных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, что существует равный нулю предел.

$$\lim_{n\to\infty}\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k - f \right\| = 0. \qquad (26)$$

Теорема 6. *Если ортонормированная система $\{e_k\}$ образует базис, то для любого элемента f действительные числа c_k в* (26) *определяются однозначно и* *совпадают с коэффициентами Фурье f_k элемента f, то есть $f_k = c_k = (f, e_k)$ для всех номеров k.*

Доказательство. Пусть система $\{e_k\}$ образует базис, то есть для произвольного фиксированного элемента f существует последовательность действительных чисел $c_1, c_2, ..., c_n, ...$, такая, что справедливо соотношение (26).

Фиксируем произвольный номер m и для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geq m$, рассмотрим квадрат скалярного произведения

$$\left(e_m, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k e_k - f\right)^2. \tag{27}$$

С одной стороны, в силу ортонормированности системы $\{e_k\}$, определения (8) коэффициента Фурье и аксиом скалярного произведения величина (27) равна $(c_m - f_m)^2$. С другой стороны, в силу неравенства Коши–Буняковского (2) величина (27) не превосходит величины

$$\|e_m\|\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k - f\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k - f\right\|,$$

которая в силу (26) стремится к нулю при $n \longrightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Следствием теорем 5 и 6 является следующее утверждение.

Теорема 7. *Если ортонормированная система $\{e_k\}$ является замкнутой, то она образует в данном евклидовом пространстве базис, разложение по которому эквивалентно разложению в общий ряд Фурье.*

Для замкнутых ортонормированных систем функций $\{e_k(x)\}$ в евклидовом пространстве $M[a, b]$ всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на сегменте $a \leq x \leq b$, со скалярным произведением (5) и нормой (6) существование предела (26) эквивалентно сходимости ряда Фурье вида $\lim_{n \to \infty} \sqrt{\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} f_k e_k(x) - f(x)\right]^2 dx} = 0$, которую принято называть *сходимостью в среднем на сегменте $a \leq x \leq b$.*

В курсах математического анализа устанавливается замкнутость тригонометрической системы (16) в евклидовом пространстве $M[-\pi, \pi]$ и замкнутость системы полиномов Лежандра (21) в евклидовом пространстве $M[-1, 1]$.

Это позволяет утверждать, что для любой интегрируемой по Риману на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ ее тригонометрический ряд (19) сходится к ней в среднем на сегменте $[-\pi, \pi]$, а для любой интегрируемой по Риману на сегменте $[-1, 1]$ функции $f(x)$ ее ряд Фурье по системе полиномов Лежандра (21) сходится к этой функции в среднем на сегменте $[-1, 1]$.

В качестве литературы по данной теме рекомендуются [1, гл. 2, 4]; [2]; [3, гл. 10, § 1, 2]; [4, гл. 8, § 1, 2]; [5].

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Изложенная теория приобретает еще более законченный вид, если рассмотреть пространство $H[a, b]$ всех функций $f(x)$, допускающих интеграл, стоящий в (6), не в смысле Римана, а в более общем смысле Лебега. Евклидово пространство $H[a, b]$ со скалярным произведением (5), интеграл в котором понимается также в смысле Лебега, образует так называемое *гильбертово пространство.* Теория интеграла Лебега и рядов Фурье в гильбертовом пространстве излагается в [3, гл. 8 и 11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1984. 294 с.

2. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 260 с.

3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1980. Т. 2. 446 с.

4. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ 2 (Продолжение курса). М.: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.

5. *Вишик М.И.* Тригонометрические ряды // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 1. С. 122–127.

* * *

Владимир Александрович Ильин, профессор, зав. кафедрой Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, главный научный сотрудник Математического института РАН им. В.А. Стеклова, лауреат Государственной премии СССР, академик РАН. Автор более 230 научных публикаций по теории функций, теории дифференциальных уравнений и математической физике, университетских учебников по математическому анализу, аналитической геометрии и линейной алгебре и монографии по спектральной теории дифференциальных операторов.