

OPTIMAL BRANCHING
STRUCTURES

F. L. CHERNOUS'KO

Branching structures are widespread both in nature and technology: circulatory systems of humans and animals, trees, pipelines, etc. Two classes of optimal (in some sense) branching structures are investigated, namely, optimal branching pipelines and optimal branching elastic beams. The obtained mathematical results are compared with experimental data.

Ветвящиеся структуры часто встречаются в живой природе и технике: кровеносные системы людей и животных, кроны деревьев, трубопроводы и др. Исследуются два класса оптимальных (в определенном смысле) ветвящихся структур, а именно: оптимальные ветвящиеся трубопроводы и оптимальные ветвящиеся упругие стержни. Полученные математические результаты сравниваются с экспериментальными данными.

© Черноусько Ф.Л., 1998

ОПТИМАЛЬНЫЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ
СТРУКТУРЫ

Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

Московский физико-технический институт,
Долгопрудный Московской обл.

ВВЕДЕНИЕ

В живой природе широкое распространение имеют разнообразные ветвящиеся структуры: кровеносные системы, дыхательные пути, кроны деревьев, корневые системы растений и др. Функциональное назначение этих структур состоит в том, чтобы доставлять (или выводить) жидкость или газ (кровь, воздух, воду) в точки, достаточно густо покрывающие некоторую область. Так, капилляры должны снабжать кровью все участки тела, а крона дерева обеспечивает соками всю его листву. Помимо решения этой основной задачи (доставки или выведения вещества) ветвящиеся структуры должны удовлетворять еще многим условиям по прочности, объему, гидравлическому сопротивлению системы и т.д. В данной статье исследуются некоторые оптимальные ветвящиеся структуры, обладающие при наложенных ограничениях наилучшими (в том или ином смысле) характеристиками. Эти оптимальные структуры могут представлять интерес и для техники, например для трубопроводов и несущих конструкций.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Рассмотрим ветвящийся трубопровод, который должен доставлять (или выводить) жидкость или газ в некоторую плоскую или пространственную область D_0 . Размерность пространства обозначим через ν , где $\nu = 2$ отвечает плоской, а $\nu = 3$ – пространственной области. Трубопровод начинается в некоторой точке (источнике, стоке), а после разветвлений его концы должны достаточно густо покрывать область D_0 , обеспечивая доставку транспортируемой жидкости в окрестность любой точки области. Примем следующие исходные гипотезы.

1. Трубопровод построен по иерархическому принципу: каждая труба n -го порядка разветвляется на две трубы $(n + 1)$ -го порядка, $n = 0, 1, \dots$ Другими словами, трубопровод есть дихотомическое дерево.

2. Все 2^n труб n -го порядка имеют одинаковые длины l_n и площади поперечного сечения s_n , $n = 0, 1, \dots$

3. Область D_n , питаемая трубой n -го порядка, делится при ветвлении этой трубы на две равные и симметричные друг другу области D_{n+1} , питаемые трубами $(n + 1)$ -го порядка. Области D_{n+1} подобны области D_n , а точка ветвления лежит в плоскости симметрии области D_n .

4. Трубопровод обладает следующим свойством оптимальности: его полное гидравлическое сопротивление минимально среди всех трубопроводов, удовлетворяющих гипотезам 1–3 и имеющих заданный полный объем Ω .

Отметим, что выполнение гипотезы 3 обеспечивает при достаточно большом числе ветвлений n доставку транспортируемой жидкости в сколь угодно малую окрестность любой точки области D_n . Из гипотезы 4 следует, что все трубы – отрезки прямых. В самом деле, при любом заданном положении точек ветвления именно прямые трубы, соединяющие эти точки, обладают наименьшим гидравлическим сопротивлением при заданном объеме.

Определим конфигурацию трубопровода, формы областей D_n , длины труб l_n и площади их поперечного сечения s_n . Форму сечения считаем круглой.

Отметим, что геометрия трубопроводов исследовалась в работах [1–3] и других, где было наложено условие равенства углов между каждой трубой и обоими ее ответвлениями. При этом, однако, не выполняется условие 3 подобия областей, принятое выше. Полное доказательство излагаемых в данном разделе результатов содержится в работе [4].

Используя гипотезу подобия 3, можно определить форму областей D_n . Оказывается, что в плоском случае эти области могут быть либо прямоугольными с отношением сторон $2^{1/2}$, либо равнобедренными прямоугольными треугольниками. В пространственном случае области D_n – прямоугольные параллелепипеды с отношением ребер $2^{2/3} : 2^{1/3} : 1$. Пусть L_n – характерный линейный размер области D_n , например наибольшая сторона прямоугольника (в плоском случае) или наибольшее ребро параллелепипеда (в пространственном случае). Имеем

$$l_n = L_n \varphi_n, \quad L_n = 2^{-n/\nu} L_0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (1)$$

Величина φ_n зависит от ν , n , от формы области и положения точек ветвления. Так, для прямоугольников с отношением сторон $2^{1/2}$ имеем

$$\varphi_n = \varphi(x_n, x_{n+1}) = [(x_n - 0,5)^2 + 0,5x_{n+1}^2]^{1/2}, \quad (2)$$

$$0 \leq x_n \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Здесь x_n – отношение, в котором начало трубы n -го порядка делит наибольшую сторону прямоугольника D_n (рис. 1). Аналогичные формулы можно записать для областей в форме треугольников и параллелепипедов. Если принять, что не только области D_n подобны друг другу при различных n , но и точки ветвления занимают подобные положения относительно соответствующих областей, то в формуле (2) имеем

$$x_n = x^*, \quad \varphi_n = \varphi(x^*, x^*) = \varphi^*; \quad (3)$$

здесь x^* , φ^* – постоянные. Такие трубопроводы назовем правильными.

Представляет интерес такое значение x^* для правильного трубопровода, при котором φ^* из (3) минимально. При этом условии длина труб и их сопротивление минимальны среди всех правильных трубопроводов. Вычисляя минимум исходя из соотношений (2) и (3), найдем параметры оптимального правильного трубопровода, изображенного на рис. 1: $x^* = 1/3$, $\varphi^* \approx 0,2887$. Оптимальные правильные трубопроводы рассчитаны также для областей в виде треугольников и параллелепипедов. Так как в плоском случае возможны две конфигурации, то интересно сопоставить оптимальные правильные трубопроводы, отвечающие прямоугольникам и треугольникам. Для этого вычислим безразмерное отношение $\sigma = l_n s_n^{-1/2}$, где S_n – площадь области D_n . Оказывается, что для прямоугольников с отношением сторон $2^{1/2}$ имеем $\sigma \approx 0,3423$, а для областей D_n в виде равнобедренных прямоугольных треугольников $\sigma \approx 0,4472$.

Таким образом, оптимальный правильный трубопровод, соответствующий прямоугольным областям, выгоднее: он отвечает меньшей длине труб на единицу площади, чем аналогичный трубопровод для треугольных областей.

Объем всего трубопровода с учетом формулы (1)

$$\Omega = \sum_{n=0}^N 2^n l_n s_n = L_0 \sum_{n=0}^N 2^{n-n/\nu} \varphi_n s_n. \quad (4)$$

Пусть p_n – давление в начале трубы n -го порядка, Q – полный расход жидкости. Предположим, что перепад давления в одной трубе описывается законом Пуазейля для ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости:

$$p_n - p_{n+1} = c q_n l_n s_n^{-2}, \quad q_n = 2^{-n} Q. \quad (5)$$

Здесь c – коэффициент, q_n – расход жидкости через одну трубу n -го порядка. Гидравлическое сопротивление, то есть отношение суммарного перепада

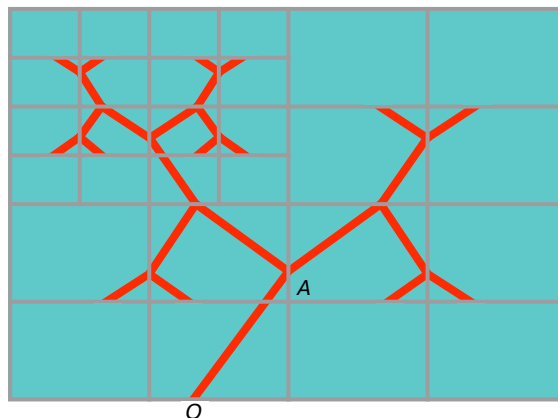


Рис. 1. Оптимальная конфигурация ветвящегося трубопровода

давления $p_0 - p_{N+1}$ к расходу Q через трубопровод, согласно (5), (1), с точностью до постоянного множителя

$$R = \sum_{n=0}^N 2^{-n} l_n s_n^{-2} = L_0 \sum_{n=0}^N 2^{-n-n/v} \varphi_n s_n^{-2}. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала предельный случай $N \rightarrow \infty$. Предположим, что величины φ_n в (1), (4), (6) ограничены (например, равны постоянной φ^*). Для сходимости рядов (4), (6) необходимо, но не достаточно, чтобы их n -е члены стремились к нулю. Обозначая n -е члены рядов (4) и (6) (с точностью до постоянных коэффициентов φ^*) через α_n и β_n^2 соответственно, получаем условия

$$s_n = \alpha_n \cdot 2^{(1/v-1)n} = \beta_n^{-1} \cdot 2^{-(1/v+1)n/2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где α_n, β_n бесконечно малы. Для трубопровода, питающего пространственную область, имеем $v = 3$, и условие (7) здесь нарушается. Следовательно, для таких трубопроводов гидравлическое сопротивление R при конечном объеме Ω и $N \rightarrow \infty$ неограничено. Для трубопровода, питающего плоскую область ($v = 2$), условие (7) удовлетворяется, и в этом случае возможен бесконечно ветвящийся трубопровод ограниченного объема и конечного гидравлического сопротивления. Если положить $s_n = s_0 \cdot 2^{-\gamma n}$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $v = 2$; $0,5 < \gamma < 0,75$, то оба ряда (4), (6) будут сходиться. Таким образом, для доставки жидкости в плоскую область можно построить трубопровод, имеющий сколь угодно большое число ветвлений и обладающий конечным гидравлическим сопротивлением. Такой трубопровод требует для своего функционирования насоса ограниченной мощности. В пространственном случае ситуация иная: при росте числа ветвлений сопротивление трубопровода растет неограниченно.

В случае конечного N найдем сечения s_n из гипотезы 4, согласно которой гидравлическое сопротивление (6) минимально по s_n при выполнении ограничения на объем (4). Применяя метод множителей Лагранжа и вычисляя минимум R из (6) по s_n при условии (4), получим

$$s_n = s_0 \cdot 2^{-2n/3}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Отметим, что соотношения (8) не зависят от значений φ_n .

Оптимальный правильный трубопровод для прямоугольных областей показан на рис. 1. Здесь источник O лежит на большей стороне прямоугольника и делит ее в отношении 1 : 3. Если на рис. 1 изъять трубу OA и в качестве источника рассматривать точку A ветвления этой трубы, то получим оптимальный правильный трубопровод с источником на оси симметрии. Точка источника и все точки ветвления делают соответствующие стороны прямоугольников в отношении 1 : 3. Длины l_n и сечения s_n труб даны соотношениями (1), (8), где $\varphi_n = \varphi^* \approx 0,2887$.

Рассмотренные трубопроводы обладают свойством подобия областей (гипотеза 3), а правильные трубопроводы — еще и подобием расположения ветвей трубопровода относительно этих областей. Данные свойства могут строго выполняться лишь для некоторых частных форм областей. Для областей иной формы такое построение невозможно. Однако найденные конфигурации, по-видимому, имеют некоторый предельный смысл для областей произвольной формы. Если после многих ветвлений зависимость конфигурации трубопровода от формы исходной области становится несущественной, а это предположение представляется естественным, то конфигурация будет приближаться к найденной выше.

Ограничение (4) на объем трубопровода Ω можно заменить ограничением на суммарное количество материала. Если предположить, что толщина стенок труб пропорциональна площади их сечения, то ограничение на количество материала будет иметь тот же вид (4).

В естественных системах обычно не выполняется строгая иерархия ветвей, поэтому ветви разных порядков условно объединяют в один по некоторому принципу. Это сводится к тому, что в каждом порядке труба делится не на две, а на m ветвей, где m , вообще говоря, дробное число. Подобия областей в этом случае не будет, однако можно получить аналогичные соотношения для длин и сечений, справедливые в среднем. Так как при ветвлении труб соответствующие области уменьшаются в среднем в m раз, то для длин труб получим аналогично (1)

$$l_n = l_0 m^{-n/v}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (9)$$

Формулы для объема Ω и гидравлического сопротивления R примут вид, подобный формулам (4), (6):

$$\Omega = l_0 \sum_{n=0}^N m^{-n/v} s_n, \quad R = l_0 \sum_{n=0}^N m^{-n-nv} s_n^{-2}. \quad (10)$$

Условие минимума R по s_n при фиксированном объеме (10) дает соотношение, аналогичное (8)

$$s_n = s_0 m^{-2n/3}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (11)$$

Сравним полученные соотношения с экспериментальными данными по ветвлению артерий в легких человека, приведенными в статье [1]. В результате обработки большого числа наблюдений в [1] получено, что для рассмотренных артерий

$$m = 3,096; \quad \lg l_n = -0,172n + \text{const}; \quad (12)$$

$$\lg d_n = -0,2015n + \text{const}.$$

Здесь использованы принятые выше обозначения; d_n — диаметр артерий.

Подставляя в формулы (9), (11) число m из (12), а также $v = 3$, получим

$$\lg l_n = -(n/3) \lg m + \text{const} = -0,1636n + \text{const}, \quad (13)$$

$$\lg d_n = (1/2) \lg s_n + \text{const} = -0,1636n + \text{const}.$$

Различие в коэффициентах формул (12), (13) составляет 5% для длин и 23% для диаметров сосудов. Учитывая простоту теоретической модели, полученное согласие теории и эксперимента следует считать вполне удовлетворительным.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Рассмотрим стержневую конструкцию (горизонтальную ветвь) из трех однородных упругих стержней (рис. 2). Стержень OX расположен вдоль горизонтальной оси Ox , стержни XP и XP' лежат в горизонтальной плоскости Oxy , одинаковы и симметричны друг другу относительно вертикальной плоскости. Координаты точек O, X, P, P' в плоскости Oxy равны $(0, 0), (x, 0), (a, b), (a, -b)$ соответственно, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$ – заданные числа, а координата развилки x заключена в пределах $0 \leq x \leq a$. Все стержни имеют круглые поперечные сечения, причем r_1 – радиус стержней XP и XP' , а r_2 – радиус стержня OX . В точке O стержень OX жестко заделан, в точке X все стержни жестко соединены между собой. Рассматриваем два варианта нагрузки, перпендикулярной горизонтальной плоскости Oxy : 1) на конструкцию действуют две разные сосредоточенные силы F , приложенные на концах стержней P, P' ; 2) конструкция нагружена собственной массой. Случай 1 отвечает ситуации, когда масса грузов, расположенных в точках P и P' , много больше собственной массы конструкции.

Определим оптимальную конфигурацию стержневой системы $OXP P'$, обладающую наименьшим объемом Ω и удовлетворяющую ограничению по прочности, при котором максимальное напряжение в конструкции не превосходит заданной величины σ_0 . Объем конструкции

$$\Omega = \pi \{ 2r_1^2 [(a-x)^2 + b^2]^{1/2} + r_2^2 x^2 \}. \quad (14)$$

Ограничение по прочности можно, используя известные формулы сопротивления материалов, представить в виде двух неравенств на изгибающие моменты в наиболее опасных сечениях: в точке X для стержней XP, XP' и в точке O для стержня OX . Получим для вариантов 1, 2 соответственно неравенства

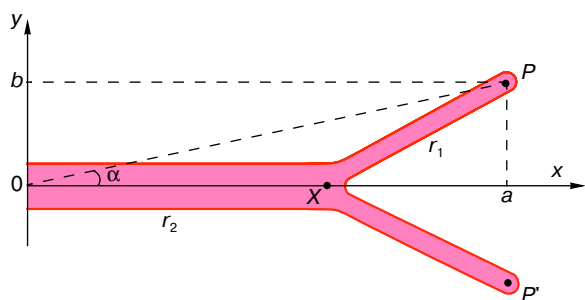


Рис. 2. Ветвящаяся стержневая структура

$$4F[(a-x)^2 + b^2]^{1/2} \leq \pi \sigma_0 r_1^3; \quad 8Fa \leq \pi \sigma_0 r_2^3; \quad (15a)$$

$$2\rho g [(a-x)^2 + b^2] \leq \sigma_0 r_1; \quad (15b)$$

$$2\rho g \{ 2r_1^2 [(a-x)^2 + b^2]^{1/2} (x+a) + r_2^2 x^2 \} \leq \sigma_0 r_2^3.$$

Здесь ρ – объемная плотность материала, g – ускорение силы тяжести.

Задача свелась к определению величин x, r_1, r_2 , доставляющих минимум объему (14) при ограничениях (15). Опуская ход решения, приведем окончательные результаты – параметры оптимальной конструкции.

Введем безразмерные величины (см. рис. 2)

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{r_1}{r_2}, \quad v = \frac{\Omega}{\Omega_0}.$$

Здесь Ω – объем оптимальной конструкции; Ω_0 – объем конструкции из двух отдельных стержней OP

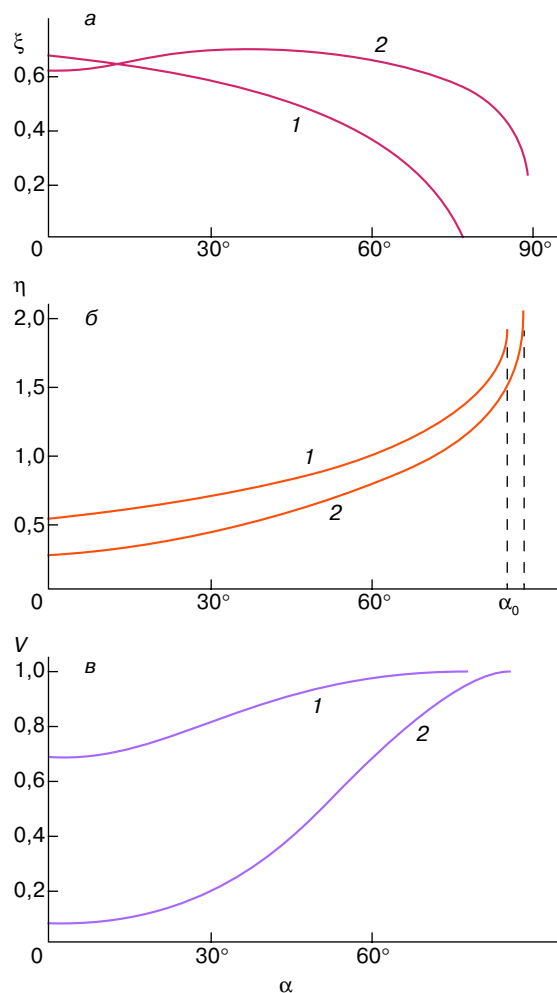


Рис. 3. Зависимость положения точки ветвления (а), радиусов стержней (б) и безразмерного объема оптимальной конструкции (в) от угла α

и OP' , удовлетворяющих условию прочности (то есть Ω_0 – объем конструкции при отсутствии развилки, когда $x = \xi = 0$). На рис. 3 представлены полученные зависимости $\xi(\alpha)$, $\eta(\alpha)$ и $v(\alpha)$ для обоих случаев нагрузки 1, 2.

Отметим некоторые качественные особенности оптимальных конструкций. При возрастании угла α в случае 1 величина ξ монотонно убывает, то есть развилка смещается ближе к началу координат. В случае 2 зависимость $\xi(\alpha)$ немонотонна и имеет максимум, несколько меньший 0,7 (см. рис. 3, а). Зависимости $\eta(\alpha)$ и $v(\alpha)$ в обоих случаях монотонны. При некотором значении α_0 угла α величина ξ становится равной нулю, а v – равной единице. Это означает, что при $\alpha < \alpha_0$ оптимальная конструкция имеет развилку, а при $\alpha > \alpha_0$ оптимальная конструкция состоит из двух отдельных стержней OP и OP' , здесь точка X на рис. 2 совпадает с O . Угол α_0 весьма близок к 90° и равен $83,8^\circ$ в случае 1 и $89,8^\circ$ в случае 2, так что оптимальной практически всегда будет конструкция с развилкой.

Оценим максимальную относительную экономию материала для оптимальной ветвящейся конструкции по сравнению с конструкцией без развилки. Эта экономия равна $1 - v(0)$ и составляет свыше 31% в случае 1 и свыше 91% в случае 2 (см. рис. 3, в). Приведенные результаты делают понятной выгоду ветвящихся конструкций и качественно объясняют структуру горизонтальных ветвей деревьев. Полное изложение результатов второй части исследования дано в работе [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные результаты иллюстрируют некоторые качественные и количественные особенности оптимальных ветвящихся структур. Оптимальные ветвящиеся трубопроводы являются примером фрактальных структур, которые в последние годы являются предметом пристального внимания и глубокого изучения [6]. Отметим, что более подробно с

данными по оптимальным биомеханическим структурам можно ознакомиться по книге [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Singhal S., Henderson R., Horsfield K. et al. Morphometry of the Human Pulmonary Arterial Tree // *Circulat. Res.* 1973. Vol. 33, № 2. P. 190–197.
2. Horsfield K., Cumming G. Angles of Branching and Diameters of Branches in the $n \rightarrow h$ Human Bronchial Tree // *Bull. Math. Biophys.* 1967. Vol. 20. P. 245–259.
3. Werner W.N., Wilson T.A. Distribution of End-Points of a Branching Network with Decaying Branch Length // *Bull. Math. Biol.* 1976. Vol. 38, № 3. P. 219–237.
4. Черноусько Ф.Л. Оптимальная структура ветвящихся трубопроводов // *Прикл. математика и механика.* 1977. Т. 41, вып. 2. С. 376–383.
5. Черноусько Ф.Л. Некоторые оптимальные конфигурации ветвящихся стержней // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1979. № 3. С. 174–181.
6. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов: Обзоры комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
7. Образцов И.Ф., Ханин М.А. Оптимальные биомеханические системы. М.: Медицина, 1989. 272 с.

* * *

Феликс Леонидович Черноусько, доктор физико-математических наук, профессор Московского физико-технического института, главный научный сотрудник Института проблем механики РАН, академик РАН, лауреат Государственной премии СССР, премии Ленинского комсомола и международной премии Кербера за развитие европейской науки (Германия). Область научных интересов: теория управления, механика, прикладная математика. Автор девяти монографий и более 250 научных статей.