

COMPOSED DYNAMIC SYSTEM, SLIDING MODELS AND PROBABILITY

V. A. BRUSIN

The dynamic peculiarities of systems, whose phase portraits are composed of parts of phase portraits of ordinary systems, are explained on the example of a simple model of body course stabilization. The appearance of special dynamic regimes in these systems, named as sliding modes, and their probabilities, are explained.

На примере простой модели стабилизации курса управляемого тела объясняются особенности динамики систем, фазовые портреты которых составлены из частей фазовых портретов динамических систем. Объясняется возникновение особых движений в такого рода системах, получивших название скользящих режимов, и описываемых в вероятностных терминах.

“СКЛЕЕННЫЕ” ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ И ВЕРОЯТНОСТЬ

В. А. БРУСИН

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

ОБЩИЙ ВЗГЛЯД НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ “ВЕРОЯТНОСТИ”

Как известно, о вероятности речь возникает в ситуациях, когда проводится (человеком или природой) серия из большого числа экспериментов (испытаний, измерений), независимых друг от друга, проводимых при одних и тех же условиях, в результате которых событие A может появиться или не появиться [1]. В конце каждой такой серии испытаний определяется величина ν — частота появления этого события. Это будет случайная величина, которая в другой серии может принять другое значение. Событие A называется стохастически устойчивым, если при увеличении количества испытаний в серии эта величина становится сколь угодно близкой к некоторому числу $p \in [0, 1]$, которое и называется вероятностью события A .

До недавнего времени считалось, что событие стохастически устойчиво тогда, когда в его формировании участвует большое число независимо друг от друга действующих факторов [2]. Например, броуновское движение частицы создается благодаря очень большому числу столкновений с разными молекулами, совершающихся в каждый момент времени. По этой же причине молекулярная физика описывается вероятностными моделями и является составной частью статистической физики. Многие ученые (например, А. Эйнштейн) считали, что вероятностная природа квантовой механики объясняется теми же причинами. Хотя основная точка зрения в этом вопросе заключается в том, что “вероятность” лежит в основе “мироздания” и не является результатом процесса осреднения взаимодействий.

В современной математике господствует теория вероятностей, построенная на аксиоматике Колмогорова—Дуба. Она основана на том, что с каждым случайным событием или процессом связан некий абсолюте — абстрактное топологическое пространство с мерой, которые изучались в функциональном анализе с момента его появления [1]. Однако в физических кругах эта аксиоматика не стала популярной. В последнее время и у математиков появилось желание изменить основы построения теории вероятностей. Во-первых, с точки зрения аксиоматики Колмогорова—Дуба к числу случайных процессов можно причислить и регулярные процессы.

С житейской же точки зрения случайным мы считаем только такой процесс, который нельзя предсказать по известным его измерениям (настоящим и прошлым), причем увеличение этих измерений не приводит к уменьшению точности прогнозирования.

Во-вторых, с 60-х годов появились результаты теории динамических систем, из которых следовало, что такого рода нерегулярные процессы могут возникать в детерминированных динамических системах не очень большой размерности, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, начиная с третьего порядка [3, 4]. Хотя эти примеры носили чисто математический характер и с реальными процессами в природе их связать было трудно, они произвели революцию в сознании как математиков, так и физиков в той части, которая касалась понимания возникновения случайностей.

Параллельно (возможно, даже немного раньше) был открыт и другой механизм возникновения вероятности в дифференциальных уравнениях, оставшийся в тени. Это так называемый скользящий режим в разрывных (мы их называем склеенными) системах, о котором будет идти речь ниже.

Существенным (может быть, и главным) обстоятельством этого механизма является то, что скользящий режим является рабочим режимом большого класса систем автоматического регулирования. Как показывают публикации и конференции последних лет по теории управления, исследования в области использования скользящих режимов не только не сокращаются, но в связи с обнаружением их новых возможностей и усиливаются.

Ниже в доступной форме на простом примере мы объясняем природу скользящих режимов, их вероятностные свойства и роль, которую они играют в системах управления.

Напомним, что мы придерживаемся следующей трактовки понятия вероятности. Обозначим через $\nu_N(A)$ частоту появления события A серии из N независимых испытаний.

Событие A называется стохастически устойчивым, если при увеличении числа N частота $\nu_N(A)$ приближается к некоторому числу $p \in (0, 1)$. Это число и будет вероятностью появления события A в данном испытании. Такое определение вероятности иногда называют эмпирическим.

“СКЛЕЕННАЯ” СИСТЕМА НА ПРИМЕРЕ АВТОРУЛЕВОГО

Простейшее уравнение динамики отклонения управляемого судна от заданного курса (рис. 1) имеет вид [5]

$$J\ddot{x} + h\dot{x} = M_p(\varphi), \quad (1)$$

где x – угол отклонения оси судна от курса, отсчитываемый по часовой стрелке, φ – угол отклонения руля от нейтрального положения, J – момент инерции

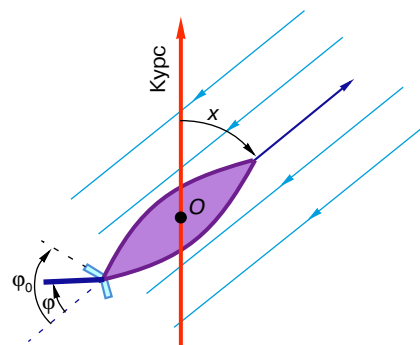


Рис. 1

судна относительно его центра масс, h – коэффициент момента сил сопротивления вязкой среды, M_p – вращающий момент, создаваемый поворотом руля.

Следует учитывать, что данная математическая модель описывает реальное движение судна только при относительно малых углах и скоростях. Следуя [5], будем предполагать, что момент M_p пропорционален углу:

$$M_p = -l\varphi, \quad l > 0. \quad (2)$$

Далее предположим, что движение руля управляется авторулевым по закону реле [5]

$$\varphi = \begin{cases} +\varphi_0, & \text{если } \sigma = \alpha\dot{x} + x > 0, \\ -\varphi_0, & \text{если } \sigma < 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi_0 > 0,$$

где α – некоторый положительный параметр, $\pm\varphi_0$ – предельные углы поворота руля. Тем самым предполагается, что руль мгновенно переключается в правое крайнее положение, если $\sigma > 0$, и в крайнее левое, если $\sigma < 0$.

Мы хотим проследить динамику отклонения судна от его курса. Точнее, мы желаем выяснить, как будет вести себя процесс $x(t)$, если он подчиняется уравнениям (1)–(3).

Систему (1)–(3) можно записать в упрощенном виде

$$\dot{x} + ax = -k\psi, \quad (4)$$

$$\psi = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma > 0, \quad \sigma = \alpha\dot{x} + x, \\ -1, & \text{если } \sigma < 0, \end{cases} \quad (5)$$

где обозначено $\psi = \varphi/\varphi_0$, $a = h/J$, $k = l/J$.

Сразу же возникает вопрос о том, что система (4), (5) недоопределена, в ней есть неопределенность: в законе (5) отсутствует значение $\sigma = 0$. Наша первая задача – раскрыть эту неопределенность на основе двух физически очевидных условий: процесс, описывающий динамику отклонения судна, должен быть непрерывным и угол отклонения руля должен находиться в интервале $[-\varphi_0, \varphi_0]$ и, следовательно, $|\psi| \leq 1$.

С этой целью рассмотрим фазовые портреты [5, 6] системы (4) на плоскости XOY , $y = \dot{x}$ отдельно для случаев, когда $\psi = +1$ и $\psi = -1$. Разрежем эти плоскости по линии $\sigma = 0$ и склеим так, чтобы траектории системы (4), $\psi = +1$, находились на полуплоскости $\sigma > 0$, а траектории системы (4), $\psi = -1$, — на полуплоскости $\sigma < 0$. Обозначим первую полуплоскость Π_+ , а вторую Π_- . Получим картину, изображенную на рис. 2.

Теперь, глядя на этот рисунок, зададимся вопросом: получается ли в результате такой процедуры склейки новый фазовый портрет, на котором можно проследить движение любой фазовой точки с произвольного начального положения до произвольного будущего, то есть при $t \rightarrow +\infty$? Очевидно, нет: если фазовая точка приходит на отрезок $[A, A']$ прямой $\sigma = 0$ ¹, дальнейшее ее движение не определено: выйти в полуплоскости Π_+ и Π_- ей не позволяют направления фазовых траекторий, идущих в этой зоне навстречу друг другу. Попытаемся раскрыть эту неопределенность. Для этого разрежем фазовую плоскость системы (4), $\psi = +1$, по линии $\sigma = -\Delta$, а систему (4), $\psi = -1$, по линии $\sigma = +\Delta$. Обозначим через Π_+ полуплоскость $\sigma \geq -\Delta$ с траекториями системы (4), $\psi = +1$, а через Π_- полуплоскость $\sigma \leq \Delta$ с траекториями системы (4), $\psi = -1$, и перенесем их на одну плоскость XOY . При этом часть полуплоскости Π_+ наложится на часть полуплоскости Π_- (рис. 3). Таким образом мы приходим к двулистной фазовой плоскости [5], где верхним листом (условно) является Π_+ , а нижним — Π_- (рис. 4).

¹ В точке $A (A')$ фазовые траектории при $\psi = -1 (+1)$ касаются прямой $\sigma = 0$. Координаты точек A и A' следующие:

$$A = \left(-\frac{\alpha^2 k}{1 - \alpha\alpha}, \frac{\alpha k}{1 - \alpha\alpha} \right), \quad A' = \left(\frac{\alpha^2 k}{1 - \alpha\alpha}, -\frac{\alpha k}{1 - \alpha\alpha} \right).$$

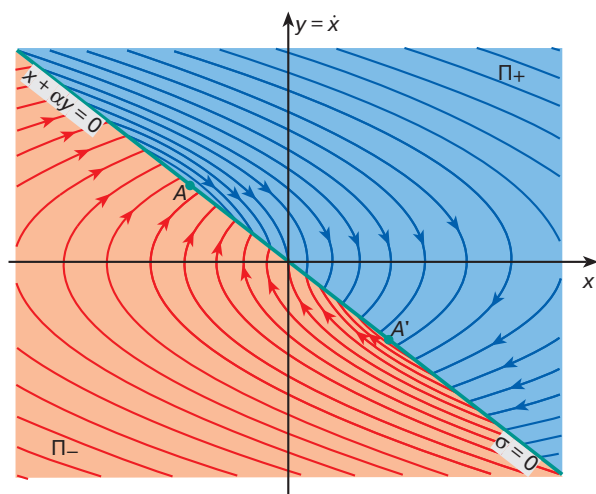


Рис. 2

Движение фазовой точки при этом определяется вполне однозначно по непрерывности: при движении ее по верхнему листу она может прийти до его края и перейти на нижний лист с сохранением текущих координат, и продолжить двигаться по траекториям нижнего листа опять до попадания на его границу и т.д.

Изучая движение фазовых точек, замечаем, что в окрестности отрезка $[A, A']$ прямой $\sigma = 0$ образуется пограничный слой толщины 2Δ , в котором фазовая точка делает перескоки с одного листа на другой². Мы видим также, что при малых Δ частота таких колебаний-перескоков будет велика, а амплитуда мала. В то же время фазовая точка будет медленно перемещаться в направлении линии $x + \alpha y = 0$. При очень малых $\Delta \ll 1$ глаз зафиксирует только это медленное движение вдоль линии $x + \alpha y = 0$. Таким образом, в пределе при $\Delta \rightarrow 0$ получается вполне определенное движение по линии склейки $\sigma = 0$ — это и есть скользящий режим по терминологии А.А. Андропова [5].

Выведем теперь уравнение скользящего режима. Впервые для широкого класса систем автоматического управления такие уравнения получены Ю.И. Неймарком в 1955 году. Доступное изложение этих результатов можно найти в книге [3].

УРАВНЕНИЯ СКОльзяЩИХ РЕЖИМОВ И ВЕРОЯТНОСТЬ

Для определенности назовем систему, фазовый портрет которой представлен на рис. 3, допредельной. Уравнения допредельной системы можно записать в виде

² Этот процесс легко смоделировать на компьютере и наблюдать на экране.

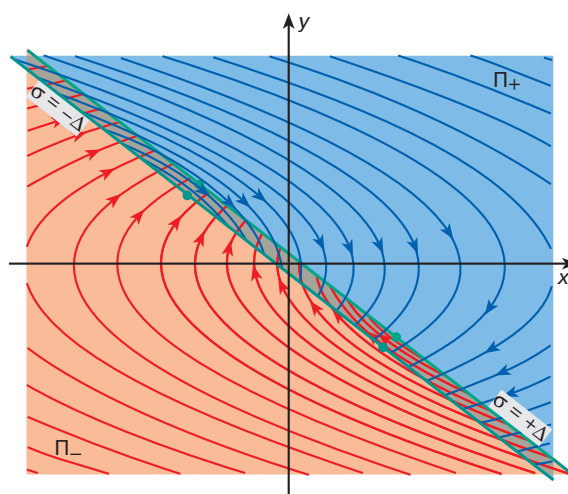


Рис. 3

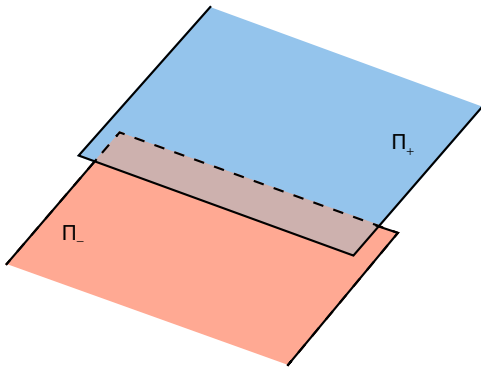


Рис. 4

$$\ddot{x} + a\dot{x} = -k\Psi_{\Delta}(\sigma), \quad \sigma = x + \alpha\dot{x}, \quad (6)$$

где $\Psi_{\Delta}(\bullet)$ – нелинейность гистерезисного типа, описывающая закон переключения в данной системе (рис. 5). Стрелками на рис. 5 обозначены направления переходов с одной ветви гистерезисной кривой на другую.

Введем оператор осреднения по интервалу длины $\delta > 0$ и будем его обозначать чертой сверху с индексом δ :

$$(\bar{\Psi}_{\Delta})_{\delta}(t) = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} \Psi_{\Delta}(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$\bar{x}_{\delta}(t) = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} x_{\Delta}(\tau) d\tau$$

и т.п. Эти функции назовем осредненными.

Применяя этот оператор к уравнению (6), приходим к уравнению

$$\ddot{\bar{x}}_{\delta} + a\dot{\bar{x}}_{\delta} = -k(\bar{\Psi}_{\Delta})_{\delta}. \quad (8)$$

Если связать режим $\varphi_{\Delta} = 1$ (рис. 4) с замыканием некоторого контакта А (событие А), а режим $\varphi_{\Delta} = -1$ с замыканием контакта Б (событие Б), то функция $(\bar{\Psi}_{\Delta})_{\delta}(t)$ будет представляться как осредненный процесс переключения контактов, а функция $P_{\Delta, \delta}(t) := \frac{1}{2}(\bar{\Psi}_{\Delta})_{\delta}(t) + \frac{1}{2}$ – как частота появления события А на временном интервале $(t, t + \delta)$.

Другими словами, если бы мы проводили серию экспериментов по реализации одного и того же решения системы (6) и проводили бы измерение величины $\Psi_{\Delta, \delta}$ в один и тот же момент времени t , то, конечно, получили бы один и тот же результат: +1 или -1 (замкнут контакт А или Б). Но поскольку момент измерения абсолютно точно определить нельзя и он определяется с точностью до малой величины δ , то в разных экспериментах мы обнаружили бы либо событие А, либо событие Б, причем частота появления события А определяется указанной выше функ-

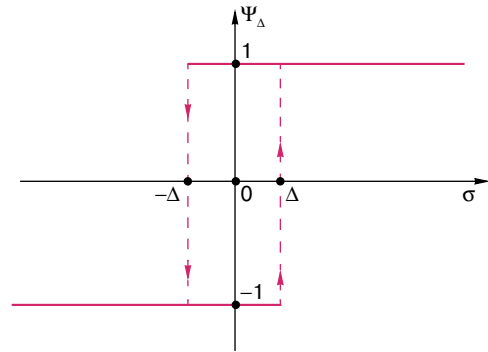


Рис. 5

цией. Заметим, что вне гистерезисной петли эта вероятность будет равна либо 1, либо 0.

Теперь устремим величины Δ и δ к нулю. Оказывается, и это устанавливается различными теориями, функция $\bar{\Psi}_{\Delta, \delta}(t)$ и другие осредненные функции из (7) будут иметь предельные значения, а уравнение (6) перейдет в уравнение

$$\ddot{\bar{x}} + a\dot{\bar{x}} = -k\bar{\Psi}(t), \quad \bar{\Psi} \in [-1, 1],$$

$$\bar{\Psi} = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \Delta \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} \Psi_{\Delta}(\tau) d\tau. \quad (9)$$

В предельных функциях в отличие от допредельных индексы Δ , δ опущены. При этом функции $\bar{x}(t) = x(t)$, $\dot{\bar{x}} = \dot{x}$ будут описывать осредненные процессы в предельной системе. Так, функция $P(t) = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(t) + \frac{1}{2}$ будет описывать вероятность появления события А в момент t в предельной ($\Delta = 0$) системе.

Одновременно мы получаем, что в скользящем режиме осредненное решение предельной системы ($\Delta = 0$) будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{\bar{x}} + \alpha\bar{x} = 0, \quad (10)$$

откуда следует, что $\bar{x}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Уравнение (10) и есть уравнение скользящих режимов для рассматриваемой склеенной системы, изображенной на рис. 2. Если к траекториям из рис. 2 добавить траектории скользящих режимов, описываемых уравнением (10), то мы получим фазовый портрет склеенной системы. Эта система описывает динамику движения судна с авторулевым, в котором закон переключения определяется соотношением (5).

Подставляя соотношение (10) в уравнение (9), мы можем определить динамику изменения функции $\bar{\Psi}$, а значит, и $P(t)$. Нужно только помнить, что при переходе в обычный режим функция $\bar{\Psi}$ будет

принимать постоянное значение, равное 1 или 0, а закон (10) уже не действует.

НЕЙТРАЛИЗАЦИЯ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ С АВТОРУЛЕВЫМ

В заключение проиллюстрируем важное в системах автоматического регулирования свойство скользящих режимов нейтрализовать неизвестные постоянно действующие возмущения. Возьмем снова в качестве примера регулирование курса судна. Предположим теперь, что на судно действует внешнее возмущение, момент которого относительно центра масс описывается непрерывной функцией $F(t)$. Уравнение движения в этом случае примет вид

$$J\ddot{x} + h\dot{x} = -l\Psi + F(t)$$

или в упрощенном виде

$$\ddot{x} + a\dot{x} = -k\Psi + f(t), \quad (11)$$

где $f(t) = \frac{1}{J}F(t)$.

Предположим, что интенсивность возмущения не может превысить некоторое значение, так что

$$|f(t)| \leq C, \quad (12)$$

где C – некоторая константа.

Задача авторулевого – стабилизировать курс и в этих условиях. Кажется, что это невозможно без измерения и прогноза функции $f(t)$. И это будет верно, если иметь в виду классические решения дифференциальных уравнений и обычные режимы. Однако на помощь приходит скользящий режим. Сначала приведем уравнение (11) к виду

$$A\dot{\sigma} + B\sigma = Bx - k\Psi + f(t), \quad (13)$$

где

$$\sigma = x + \alpha\dot{x}, \quad A = \frac{1}{\alpha} > 0, \quad B = \frac{a-A}{\alpha} = \frac{a\alpha-1}{\alpha^2}.$$

Выберем α так, что

$$a > \frac{1}{\alpha}, \quad B > 0. \quad (14)$$

Теперь определим алгоритм действия авторулевого:

$$\Psi = lx - \Delta\Psi, \quad l = \frac{B}{k}, \quad (15)$$

$$\Delta\Psi = \frac{C + \Delta C}{k}\varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma > 0, \\ -1, & \text{если } \sigma < 0, \end{cases}$$

где ΔC – произвольное неотрицательное число¹. Запишем уравнение движения системы (13), (14) в осредненных функциях

$$A\dot{\bar{\sigma}} + B\bar{\sigma} = -(C + \Delta C)\bar{\varphi}(t) + f(t). \quad (16)$$

¹ При реализации на компьютере в качестве $\varphi(\sigma)$ можно взять $\text{sign}\sigma$, то есть считать $\varphi(\sigma) = 0$ при $\sigma = 0$.

Так как $f(t)$ – непрерывная функция, то ее осредненное значение $\bar{f}(t)$ равно ей самой. Из указанных выше свойств осредненной функции Ψ и из (16) следует

$$\bar{\sigma}(t)\bar{\varphi}(t) = |\bar{\sigma}(t)|. \quad (17)$$

Умножим равенство (16) на $\bar{\sigma}(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от $t = 0$ до $t = T > 0$. Тогда с учетом (15), (17) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}A(\bar{\sigma}^2(T)) - \frac{1}{2}A(\bar{\sigma}^2(0)) + B \int_0^T (\bar{\sigma}^2(t)) dt = \\ & = -(C + \Delta C) \int_0^T |\bar{\sigma}(t)| dt + \int_0^T f(t)\bar{\sigma}(t) dt \leq \\ & \leq -(C + \Delta C) \int_0^T |\bar{\sigma}(t)| dt + C \int_0^T |\bar{\sigma}(t)| dt = -\Delta C \int_0^T |\bar{\sigma}(t)| dt < 0, \end{aligned}$$

откуда, устремляя $T \rightarrow \infty$, получаем (с учетом (14))

$$\begin{aligned} & \sup_t |\bar{\sigma}(t)| \leq |\sigma(0)|, \\ & \int_0^\infty (\bar{\sigma}(t))^2 dt \leq \frac{A}{2B}, \quad \int_0^\infty |\bar{\sigma}(t)| dt \leq \frac{\Delta C}{B}. \end{aligned} \quad (18)$$

Соотношения (18), в свою очередь, влекут соотношение $\bar{x}(t) = x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ (см. по этому поводу приложение из [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 446 с.
2. Эткинс П. Порядок и беспорядок в природе. М.: Мир, 1987. 244 с.
3. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.
4. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 926 с.
6. Белых В.Н. Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 1. С. 115–121.
7. Брусин В.А. Об управлении динамическими системами в условиях неопределенности // Там же. 1996. № 6. С. 115–121.

* * *

Владимир Александрович Брусин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета, член-корреспондент РАЕН. Область научных интересов – математические проблемы теории устойчивости и теории управления. Автор более 150 научных статей и учебного пособия.