SETS FRACTAL DIMENTIONS

M. I. VISHIK

The sets of fractal dimension are defined in the article. The fractal dimensions of Cantor discontinuum, Serpinski serviette and other sets are calculated. The attractor notion is introduced also in the article. Attractors of concrete differential equations systems are found. Fractal dimensions of these attractors are given. The Lorentz system attractor fractal dimension is estimated from above.

Дается определение фрактальной размерности множеств в евклидовом пространстве. В качестве примеров вычисляется фрактальная размерность канторова множества, салфетки Серпинского и других множеств. Кроме того, вводится понятие и находятся аттракторы конкретных систем дифференциальных уравнений. Приводятся фрактальные размерности этих аттракторов. Для системы уравнений Лоренца дается оценка сверху фрактальной размерности аттрактора этой системы.

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВ

М. И. ВИШИК

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Как известно, размерность отрезка на прямой равна единице, размерность квадрата на плоскости – двум, размерность шара в трехмерном пространстве – трем и т.д. Однако в математике и научном естествознании уже давно известны множества точек, размерность которых выражается не целым числом, а действительным положительным числом. Отсюда название фрактальной размерности таких множеств, точное определение которой дается ниже. В статье приводятся примеры множеств, которые обладают фрактальной размерностью, не являющейся целым числом. Отметим, что этой проблематике посвящена также статья [1]. Большое значение имеет оценка фрактальной размерности аттракторов дифференциальных уравнений. При этом под аттрактором подразумевается множество точек, к которому стремятся решения рассматриваемого дифференциального уравнения при $t \longrightarrow +\infty$. Некоторое представление об этой тематике дается ниже.

1. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВ НА ОСИ *x*

Пусть A – замкнутое, ограниченное множество точек на оси x. Множество A называется замкнутым, если из того, что $x_n \in A$ и $x_n \longrightarrow x$ при $n \longrightarrow +\infty$ следует, что $x \in A$. Множество A называется ограниченным, если существует такое число R, что $|x| \le R$ для любого $x \in A$. Обозначим через $B_\varepsilon(x_0)$ интервал $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. $B_\varepsilon(x_0)$ называют ε-окрестностью точки x_0. Говорят, что окрестности $B_\varepsilon(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, M$, покрывают множество A, если их объединение содержит множество A внутри:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_\varepsilon(x_i). \qquad (1)$$

Под ε-*фрактальной d-мерой множества A* подразумевается число

$$\mu(A, d, \varepsilon) = \min M \cdot \varepsilon^d \equiv \varepsilon^d N(\varepsilon), \qquad (2)$$

где $N(\varepsilon) = \min M$, причем $\min M$ берется по всевозможным покрытиям (1) множества A. Так, например, если $A_1 = [0, 1]$ является единичным отрезком на оси x, то $N(\varepsilon) = [1/2\varepsilon] + 1$, где $[1/2\varepsilon]$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное $1/2\varepsilon$. Так как M – целые положительные числа, то такой минимум $N(\varepsilon)$ существует. *Фрактальной d-мерой* $\mu_F(A, d)$ множества A называется

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\sup\mu(A, d, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\sup\varepsilon^d N(\varepsilon) \equiv \mu_F(A, d). \quad (3)$$

Часто в конкретных примерах

$$\mu_F(A, d) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^d N(\varepsilon). \quad (4)$$

Так, например, если $A_1 = [0, 1]$, то при $d = 1$

$$\mu_F(A_1, 1) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^1 N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1\right) = \frac{1}{2}.$$

В то же время для $d > 1$

$$\mu_F(A_1, d) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^d\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1\right) = 0,$$

для $d < 1$

$$\mu_F(A_1, d) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^d\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1\right) = +\infty.$$

В общем случае замкнутого, ограниченного множества A на оси x легко видеть, что если $\mu_F(A, d') < +\infty$, то $\mu_F(A, d) = 0$ для любого $d > d'$. Если же $\mu_F(A, d) > 0$, то для любых $d < d'$ выполнено $\mu_F(A, d) = +\infty$. Следовательно, существует такое число $d_0 \in [0, +\infty)$, что $\mu_F(A, d) = 0$ при $d > d_0$ и $\mu_F(A, d) = +\infty$ при $d < d_0$, в то время как $\mu_F(A, d_0)$ может быть любым числом полуоси $[0, +\infty)$. Очевидно,

$$d_0 = \inf d, \qquad \text{для которых } \mu_F(A, d) = 0. \quad (5)$$

Определение. Число d_0, удовлетворяющее (5), называется *фрактальной размерностью множества A*. Оно обозначается $d_F(A)$: $d_F(A) = d_0 = \inf d$ (см. (5)).

Если $A_1 = [0, 1]$, то, как было показано выше, $\mu_F(A_1, d) = 0$ при $d > 1$, $\mu_F(A_1, d) = +\infty$ при $d < 1$ и $\mu_F(A_1, 1) = 1/2$. Следовательно, $d_F(A_1) = 1$.

Пусть для $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, A)$ (см. (2)) выполнены неравенства

$$0 < C_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \le N(\varepsilon) \le C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d, \quad (5')$$

где постоянные C_1 и C не зависят от ε. Тогда для фрактальной меры $\mu_F(A, d)$ имеют место неравенства

$$0 < C_1 \le d_F(A, d) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\sup N(\varepsilon)\varepsilon^d \le C < +\infty. \quad (5'')$$

Отсюда, из (5) и сделанных выше замечаний следует, что

$$d = d_F(A). \quad (6)$$

Таким образом, если выполнено (5'), то показатель d в (5') совпадает с фрактальной размерностью $d_F(A)$.

Отметим еще, что если имеет место (5'), то можно дать явную формулу для фрактальной размерности $d_F(A)$. Действительно, взяв логарифм от всех членов неравенства (5'), имеем

$$\log C_1 + d\log\frac{1}{\varepsilon} \le \log N(\varepsilon) \le \log C + d\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Отсюда

$$\frac{\log C_1}{\log\frac{1}{\varepsilon}} + d \le \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \le \frac{\log C}{\log\frac{1}{\varepsilon}} + d.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \longrightarrow 0+$ в этих неравенствах, получаем

$$d = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Пример 1.1. Фрактальная размерность множества $A = \{\frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{0\}$

Рассмотрим покрытие точек $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p-1}, \frac{1}{p}$ окрестностями $B_{\varepsilon_p}(\frac{1}{k})$, $k = 1, 2, \ldots, p$, где

$$\varepsilon_p = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{9}\frac{1}{p(p-1)},$$

$$B_{\varepsilon_p}\left(\frac{1}{k}\right) = \left\{\frac{1}{k} - \varepsilon_p < x < \frac{1}{k} + \varepsilon_p\right\}.$$

Очевидно, эти окрестности не пересекаются, следовательно, согласно (2), с $d = 1/2$

$$\mu(A, 1/2, \varepsilon_p) \ge p\cdot\varepsilon_p^{1/2} = p\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{p^{1/2}(p-1)^{1/2}}.$$

Отсюда вытекает, что фрактальная мера

$$\mu_F(A, 1/2) \ge \frac{1}{3}\lim_{p\to+\infty}\frac{p}{p^{1/2}(1-p)^{1/2}} = \frac{1}{3}. \quad (7)$$

Следовательно, $\mu_F(A, 1/2) > 0$.

Кроме того, мы можем покрыть все множество $A = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p}\} \cup \{\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p+2}, \ldots\} \cup \{0\}$ прежней системой окрестностей $B_{\varepsilon_p}(\frac{1}{k})$, $k = 1, 2, \ldots, p$, а точки множества A, лежащие на отрезке $[0, \frac{1}{p+1}]$, – окрестностями $B_{\varepsilon_p}(x_i)$, где $i = 1, \ldots, [\frac{1}{p+1}/2\varepsilon_p] + 1$, $x_i \in [0, \frac{1}{p+1}]$, $\varepsilon_p = \frac{1}{9}\frac{1}{p(p-1)}$. Следовательно, число ε_p-окрестностей, которыми мы покрыли все множество A, равно $p + [\frac{9p(p-1)}{2(p+1)}] + 1 = M_p \le Cp$. Следовательно, наименьшее число ε_p-окрестностей $B_{\varepsilon_p}(x_j)$, покрывающих множество A, допускает оценку

$$N(\varepsilon_p) \le M_p = p + \left[\frac{9p(p-1)}{2(p+1)}\right] + 1 \le Cp,$$

где C не зависит от p. Аналогично (7) получаем

$$N(\varepsilon_p)\cdot\varepsilon_p^{1/2} \le Cp\varepsilon_p^{1/2} = Cp\frac{1}{3p^{1/2}(p-1)^{1/2}},$$

$$\mu_F(A, 1/2) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} N(\varepsilon_p) \cdot \varepsilon_p^{1/2} \le \frac{C}{3} \lim_{p \to +\infty} \frac{p}{p^{1/2}(p-1)^{1/2}} = \frac{C}{3}. \quad (8)$$

Из оценок (7), (8) и (5'), (6) следует, что

$$d_F(A) = 1/2.$$

Пример 1.2. Канторово множество и его фрактальная размерность

Канторово множество $K = A$ получается из отрезка $[0, 1] = \Delta_0$ с помощью следующей конструкции. На первом шаге удаляем из отрезка $[0, 1] = \Delta_0$ интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Остаются два отрезка $\Delta_1^1 = [0, \frac{1}{3}]$, $\Delta_1^2 = [\frac{2}{3}, 1]$. На втором шаге из каждого из отрезков $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$ удаляем его серединную треть, то есть интервалы $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)$ и $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\right)$. Остаются 2^2 отрезка: $\Delta_2^1 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right]$, $\Delta_2^2 = \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right]$, $\Delta_2^3 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\right]$, $\Delta_2^4 = \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}, 1\right]$ и т.д. На каждом шаге мы удаляем по серединной трети из оставшихся отрезков (рис. 1).

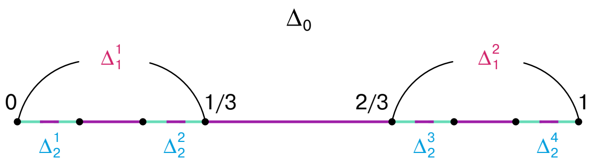

Рис. 1. Построение канторова множества

Канторово множество есть пересечение всех указанных выше отрезков, полученных на каждом шаге построения:

$$K = \Delta_0 \cap \{\Delta_1^1 \cup \Delta_1^2\} \cap \{\Delta_2^1 \cup \Delta_2^2 \cup \Delta_2^3 \cap \Delta_2^4\} \cap \ldots,$$

K – замкнутое множество (как пересечение вложенных друг в друга замкнутых множеств). Далее легко убедиться в том, что K состоит из точек x отрезка $[0, 1]$, которые в троичном разложении имеют вид $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot 3^{-i}$, где $\alpha_i = 0$ или $\alpha_i = 2$.

Теорема 1. *Фрактальная размерность $d_F(K)$ канторова множества K*

$$d_F(K) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Приведем идею доказательства этой формулы. Воспользуемся свойством самоподобия канторова множества K: часть множества K, расположенная на отрезке $[0, \frac{1}{3}]$, подобна всему множеству K. Точнее, эта часть, которую обозначим K_1^1, получается из K с помощью умножения на $\frac{1}{3}$ всех точек множества K. Аналогично часть K_1^2 канторова множества K, расположенная на отрезке $[\frac{2}{3}, 1]$, подобна всему множеству и получается из всего K сжатием в три раза с центром в точке 1.

Если $N(\varepsilon, K)$ – наименьшее число ε-окрестностей, покрывающих K, а $N(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^1)$ и $N(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^2)$ есть наименьшее число ε-окрестностей, покрывающих соответственно K_1^1 и K_1^2, то из свойства самоподобия имеем

$$N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^1\right) = N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^2\right) = N(\varepsilon, K).$$

Отсюда следует, что

$$N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K\right) = N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^1\right) + N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K_1^2\right) = 2N(\varepsilon, K)$$

$$\text{при} \quad \varepsilon \le \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Для упрощения последней части доказательства допустим, что

$$N(\varepsilon, K) \sim C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d, \quad (10)$$

где ~ означает, что отношение величин слева и справа стремится при $\varepsilon \longrightarrow 0+$ к 1. (Заметим, что сделанное предположение не совсем точное, но приводит к верному результату.) Имеем из (10) и (9)

$$2C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \sim 2N(\varepsilon, K) = N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K\right) \sim C\left(\frac{1}{\varepsilon/3}\right)^d.$$

Отсюда

$$\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^d \sim 2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \quad \text{и} \quad d = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

2. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть A – замкнутое ограниченное множество на плоскости $\Re^2$. Пусть $B_\varepsilon(x_0) = \{x = (x_1, x_2) \in \Re^2 | (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 < \varepsilon^2\}$ – круг с центром в точке $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ радиуса ε. $B_\varepsilon(x_0)$ называется ε-окрестностью точки x_0 на плоскости. Определение фрактальной размерности $d_F(A)$ аналогично определению в случае множеств A на оси x. Следует лишь под ε-окрестностью точки x_0 понимать круг $B_\varepsilon(x_0)$. Пусть $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, A)$ – наименьшее число окрестностей, которое требуется для покрытия множества A. Ограничимся для краткости лишь тем случаем, когда для $N(\varepsilon)$ имеет место оценка (5'). Тогда аналогично (5'), (5''), (6) фрактальная размерность определяется по формуле (6), где $d_F(A)$ – показатель в оценке (5').

Пример 2.1. Фрактальная размерность квадрата

Пусть $A = \{x = (x_1, x_2) \in \Re^2 | 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$ – квадрат на плоскости $\Re^2$. Очевидно, наименьшее число ε-окрестностей $B_\varepsilon(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon)$, которые покрывают квадрат A, допускает оценки

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \le N(\varepsilon) \le C\frac{1}{\pi\varepsilon^2}, \qquad (11)$$

так как площадь квадрата равна 1, а $\pi\varepsilon^2$ – площадь ε-окрестности. Из (5'), (6) и (11) следует, что $d = d(A) = 2$ (так как $d = 2$ в (11)).

Пример 2.2. Фрактальная размерность салфетки Серпинского

Опишем сначала замкнутое множество A на плоскости, которое называют салфеткой Серпинского. Рассмотрим замкнутый равносторонний треугольник Δ (то есть объединение его внутренних точек и его сторон). На первом шаге удалим из исходного треугольника открытый треугольник (без сторон), который имеет вершины в серединах сторон исходного треугольника. Мы получим три замкнутых треугольника $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3$ (рис. 2). На следующем шаге мы аналогично удаляем из каждого треугольника $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3$ равносторонние открытые треугольники – середины этих треугольников (см. рис. 2). Этот процесс мы продолжаем неограниченно. Пересечение полученных на каждом шаге объединений оставшихся треугольников называется салфеткой Серпинского S:

$$S = \Delta \cap \{\Delta_1^1 \cup \Delta_1^2 \cup \Delta_1^3\} \cap \{(\Delta_2^1 \cup \Delta_2^2 \cup \Delta_2^3) \cup$$
$$\cup (\Delta_2^4 \cup \Delta_2^5 \cup \Delta_2^6) \cup (\Delta_2^7 \cup \Delta_2^8 \cup \Delta_2^9)\} \cap \ldots$$

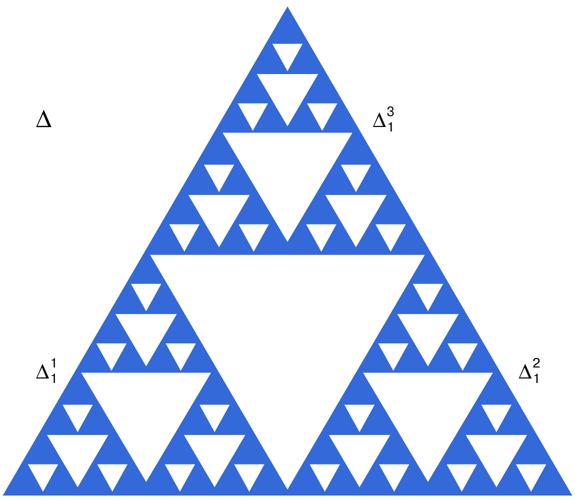

Рис. 2. Салфетка Серпинского

Теорема 2. *Фрактальная размерность салфетки Серпинского S*

$$d_F(S) = \frac{\log 3}{\log 2}. \qquad (12)$$

Приведем лишь вкратце идею доказательства. Салфетка Серпинского обладает, как и канторово множество, свойством самоподобия: часть салфетки Серпинского S, находящаяся в Δ_1^1 (а также в Δ_1^2 и Δ_1^3), подобна с коэффициентом $\frac{1}{2}$ всей салфетке Серпинского. Поэтому, обозначая через $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, S)$ наименьшее число ε-окрестностей, покрывающих салфетку Серпинского, имеем $N(\frac{\varepsilon}{2}, S \cap \Delta_1^1) = N(\varepsilon, S) = N(\varepsilon)$. Тогда

$$N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = N\left(\frac{\varepsilon}{2}, S\right) \le N\left(\frac{\varepsilon}{2}, S \cap \Delta_1^1\right) + N\left(\frac{\varepsilon}{2}, S \cap \Delta_1^2\right) +$$
$$+ N\left(\frac{\varepsilon}{2}, S \cap \Delta_1^3\right) = 3N(\varepsilon). \qquad (*)$$

Кроме того, можно установить еще такое неравенство снизу:

$$N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \ge 3(N(\varepsilon) - 4). \qquad (**)$$

Предполагая для упрощения дальнейшего доказательства (с теми же оговорками, что и при нахождении фрактальной размерности канторова множества), что $N(\varepsilon) \sim C(\frac{1}{\varepsilon})^d$, из (*) получаем

$$C\left(\frac{1}{\varepsilon/2}\right)^d \sim N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \le 3N(\varepsilon) \sim 3C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d.$$

Отсюда

$$2^d \le 3, \qquad d \le \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Аналогично из (**) имеем

$$d \ge \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Из полученных оценок для d следует (12).

Заметим, что фрактальная размерность салфетки Серпинского больше единицы, но меньше двух.

3. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ АТТРАКТОРОВ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Проиллюстрируем на примерах, что подразумевается под аттрактором дифференциального уравнения. Кроме того, найдем фрактальную размерность аттракторов конкретных дифференциальных уравнений или приведем оценку этой размерности.

Пример 3.1. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = -x_1,$$
$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = -2x_2. \qquad (13)$$

Общее решение этой системы задается формулами

$$x_1(t) = C_1e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2e^{-2t}, \qquad C_1, C_2 = \text{const}. \quad (14)$$

Если заданы начальные условия $x_1(0)$ и $x_2(0)$, то траектория (то есть решение системы (13)), выходящая из этой точки, задается формулами

$$x_1(t) = e^{-t}x_1(0), \qquad x_2(t) = e^{-2t}x_2(0).$$

Очевидно, любая траектория при $t \longrightarrow +\infty$ стремится к точке (0, 0). В этом простейшем случае говорят, что точка (0, 0) является аттрактором A системы (13) (или решений системы (13)): $A = (0, 0)$. Фрактальная размерность аттрактора A $d_F(A) = 0$.

Пример 3.2. Аттрактор, являющийся предельным циклом

Пусть дана система двух дифференциальных уравнений, которая в полярных координатах (ρ, φ) на плоскости $\Re^2$ имеет вид

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho(t)}{dt} = \rho(1-\rho^2), \qquad (15)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\rho(t)}{dt} = 1. \qquad (16)$$

Из уравнения (16) следует, что

$$\varphi(t) = t + C_1. \qquad (17)$$

Легко видеть, что окружность

$$\rho(t) = 1 \qquad (18)$$

является решением уравнения (15). Действительно, $\dot{\rho} = 0$ и правая часть уравнения (15) при $\rho = 1$ обращается в нуль: $\rho(1-\rho^2)|_{\rho=1} = 0$ (см. [4]).

Таким образом, окружность (17), (18) является решением системы (15), (16), и притом периодическим с периодом 2π. Действительно, полярная координата φ обладает этим свойством: точки с полярными координатами (1, φ) и (1, φ + 2π) изображают одну и ту же точку на окружности ρ = 1.

Теперь заметим, что если (ρ(t), φ(t)) – решение системы (15), (16) и $0 < \rho(t) < 1$, то из уравнения (15) следует, что $\dot{\rho}(t) = \rho(t)(1-(\rho(t))^2) > 0$, то есть функция ρ($t$) возрастает, приближаясь к значению ρ = 1, а траектория (ρ(t), φ(t)) = (ρ(t), $t + C_1$) совершает спиралеобразное движение внутри окружности ρ = 1 (рис. 3).

Если же решение $(\rho_1(t), \varphi(t)) = (\rho_1(t), t + C_1)$ в некоторый момент t имеет $\rho_1(t) > 1$, то, согласно уравнению (15), $\dot{\rho}_1(t) = \rho_1(t)(1-(\rho_1(t))^2) < 0$ и $\rho_1(t)$ убывает с возрастанием t. В этом случае кривая $(\rho_1(t), t + C_1)$ спиралеобразно приближается при $t \longrightarrow +\infty$ к окружности ρ = 1 извне этой окружности.

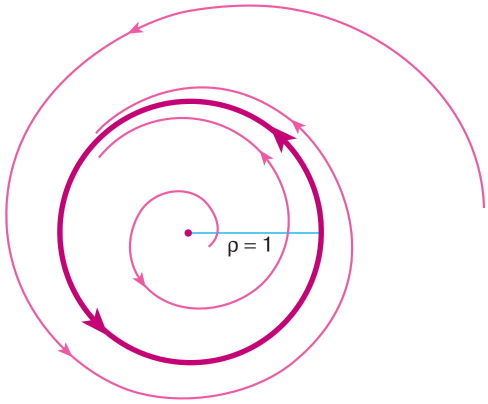

Рис. 3. Предельный цикл на плоскости

Таким образом, решения (ρ(t), φ(t)) системы, находящиеся вне и внутри окружности, и сама окружность имеют вид, изображенный на рис. 3.

Мы показали, что все траектории системы уравнений (кроме начала координат ρ = 0, являющегося неподвижной точкой системы (15), (16)) притягиваются (стремятся) при $t \longrightarrow +\infty$ к окружности {ρ = 1} = A. Поэтому эта окружность называется предельным циклом системы (15), (16) (см. [5, 6]). Такой предельный цикл (притягивающий) называют еще аттрактором системы (15), (16). Фрактальная размерность этого аттрактора равна 1: $d_F(A) = 1$.

Пример 3.3. Система уравнений Лоренца и оценка фрактальной размерности ее аттрактора

При изучении аппроксимации системы уравнений Бусинеска, описывающей конвекцию жидкости, подогреваемой снизу, возникла система обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца, который впервые ее вывел и изучал. Эта система имеет вид (см. [3])

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y,$$
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \qquad (19)$$
$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = -bz + xy,$$

где σ, r и b – некоторые положительные параметры.

Можно показать, что любые решения $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ системы (19) при $t \geq 0$ ограничены в трехмерном пространстве. Точнее, имеет место оценка

$$|u(t)|^2 \leq e^{-2lt}|u(0)|^2 + C(1-e^{-2lt}), \qquad (20)$$

где $|u|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$, $l = \min(1, \sigma)$, C – некоторая постоянная, выражающаяся через l, b и σ. Из (20) следует, что при ограниченных начальных условиях: $|u(0)| \leq M$, траектории (решения) $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ системы (19), выходящие из $u(0) = (x(0), y(0), z(0))$, ограничены при всех $t \geq 0$:

$$|u(t)|^2 \leq R(M) = M^2 + C \qquad \forall t \geq 0. \qquad (21)$$

Следуя общей теории аттракторов дифференциальных уравнений, из (20) и (21) выводится, что система уравнений Лоренца (19) обладает аттрактором A. Точнее, существует такое замкнутое ограниченное множество A в $\mathfrak{R}^3$, которое притягивает любые семейства траекторий системы (19). Это означает, что при $|u(0)|^2 = |x(0)|^2 + |y(0)|^2 + |z(0)|^2 \leq M_1$ (где M_1 – любая фиксированная константа) соответствующее таким $\{u(0)\}$ семейство траекторий $\{u(t)\}$, $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$, при $t \longrightarrow +\infty$ равномерно стремится к множеству A, называемому аттрактором: $\{u(t)\} \longrightarrow A$ при $t \longrightarrow +\infty$. Доказано (см. [3]), что, например, при значениях $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ фрактальная размерность

$$d_F(A) \leq 2{,}538...$$

Заметим, что примеры 3.1 и 3.2 имели аттракторы (точка и окружность), для описания которых не требуется введения понятия фрактальной размерности. Но, как показывает пример 3.3, уже в трехмерном пространстве $\mathfrak{R}^3$ поведение траекторий системы (с виду довольно простой) на самом деле достаточно сложно и фрактальная размерность притягивающего все решения множества (аттрактора) может быть больше двух, но меньше трех – размерности самого фазового пространства. В таких ситуациях (то есть при большом значении фрактальной размерности аттрактора) говорят, что наблюдается явление, подобное явлению турбулентности течений жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жиков В.В.* Фракталы // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 12. С. 109–117.

2. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.

3. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. B.: Springer-Verlag, 1988. 500 c.

4. *Вишик М.И.* Поля направлений и соответствующие им траектории // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 2. С. 111–117.

5. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1952. 232 с.

6. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1961. 311 с.

* * *

Марко Иосифович Вишик, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, главный научный сотрудник Института проблем передачи информации РАН. Автор 242 научных работ и четырех монографий.