

A PRINCIPLE OF LEAST CONSTRAINT

A. P. MARKEYEV

Presented here is a general dynamical theorem found by Gauss, which is known as a principle of least constraint. The modern state of investigation of the principle and its application to some mechanical problems are described.

Излагается содержание открытой Гауссом общей теоремы динамики, известной под названием принципа наименьшего принуждения. Описываются современное состояние исследования принципа и способы его применения к решению конкретных задач механики.

О ПРИНЦИПЕ НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ

А. П. МАРКЕЕВ

Московский государственный авиационный институт

ВВЕДЕНИЕ

В 1829 году в журнале “Крелле” (Crelle Journal für die reine Mathematik) был опубликован мемуар Гаусса под названием “Об одном новом общем принципе механики” (Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik).

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – крупнейший математик Германии первой половины XIX века. В его научной работе сочетались исключительно глубокие исследования в области чистой математики (алгебра, теория чисел, теория эллиптических функций, дифференциальная геометрия поверхностей, неевклидова геометрия и т.д.) с не менее глубокими исследованиями в области приложений математики к задачам астрономии, высшей геодезии, теории магнетизма и др. Высокие научные заслуги Гаусса получили всеобщее признание в ученом мире Европы. В частности, Гаусс был член-корреспондентом Петербургской академии наук с 1802 по 1824 год и ее иностранным почетным членом с 1824 года.

Упомянутый мемуар Гаусса состоял всего из четырех страниц текста. Это была его единственная работа по общей механике. В ней сформулирован новый принцип механики, который впоследствии стали называть принципом наименьшего принуждения или принципом Гаусса. Гаусс отмечал, что существенно новый принцип механики уже не может быть найден, но всегда интересно и поучительно исследовать законы природы с новой точки зрения, придем ли мы при этом к более простой трактовке того или иного частного вопроса или достигнем большей точности формулировок. Вот такая новая точка зрения и предложена в принципе наименьшего принуждения.

Этот принцип является наиболее общим принципом механики. Вместе с тем он наиболее прост при использовании. Область приложений принципа Гаусса весьма широка. Он применим в задачах механики, динамике сложных управляемых систем, динамике живых организмов, квантовой физике, теории гравитации и т.д.

Из-за общности, красоты, простоты и наглядности принципа наименьшего принуждения его без преувеличения можно назвать жемчужиной теоретической механики. “Насколько я знаю, – писал выдающийся французский математик Ж. Бертран, – не существует ни одной общей теоремы динамики, которая казалась бы более способной вызвать восхищение тонкого ума, но еще мало искушенного в

аналитических преобразованиях и породить у него желание изучить науку, которая позволила бы ему ясно воспринять ее доказательство”.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для формулировки принципа Гаусса следует предварительно дать необходимые определения и понятия из теоретической механики.

Рассмотрим систему материальных точек P_v , $v = 1, 2, \dots, N$, с массами m_v , радиусы-векторы и прямоугольные декартовы координаты которых в неподвижной системе координат обозначим через \mathbf{r}_v и x_v, y_v, z_v , через \mathbf{v}_v и \mathbf{w}_v обозначим скорость и ускорение точки P_v . Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на \mathbf{r}_v и \mathbf{v}_v , которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются *связями*. Если на систему не наложены связи, то она называется *свободной*. Системы со связями называют *несвободными*.

В общем случае связь задается соотношением $f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) \geq 0$. Если в нем реализуется только знак равенства, то связь называется *удерживающей*. Например, при движении точки P по сфере постоянного или переменного радиуса R с центром в начале координат имеем удерживающую связь $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

Если же в соотношении $f \geq 0$ реализуются как знак равенства, так и знак строгого неравенства, то связь называется *неудерживающей*. Пусть, например, две точки P_1 и P_2 связаны нерастяжимой нитью длины l . Здесь имеем неудерживающую связь, задаваемую соотношением $l^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \geq 0$, которое означает, что точки не могут находиться одна от другой на расстоянии, большем l .

Если соотношение, задающее связь, не содержит проекции скоростей точек системы, то эта связь называется *геометрической* (или *голономной*), в противном случае связь называется *дифференциальной*. Иногда дифференциальную связь можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем (как в случае геометрической связи). Тогда ее называют интегрируемой. Неинтегрируемую дифференциальную связь называют еще *неголономной*.

Точки несвободной системы не могут двигаться в пространстве совершенно произвольно. Их *кинематически возможные* (то есть допускаемые связями) координаты, скорости, ускорения и перемещения должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из уравнений связей.

Помимо перемещений, соответствующих *действительному* (истинному, реальному) движению, в механике важны еще так называемые виртуальные (воображаемые) перемещения. *Виртуальным перемещением* точки P_v называют такое ее малое перемещение $\delta \mathbf{r}_v = (\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v)$, мысленно осуществляе-

мое из данного положения при фиксированном времени t , которое с точностью до членов первого порядка малости включительно относительно $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ не нарушает связей.

Поясним это на примере. Рассмотрим систему, состоящую из одной материальной точки, которая должна оставаться на поверхности $f(x, y, z, t) = 0$. Пусть в момент времени t точка занимает положение P_0 с координатами x_0, y_0, z_0 . Мысленно дадим точке бесконечно малое перемещение $\delta \mathbf{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$. Тогда ее координаты примут значения $x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z$. Но не всякое $\delta \mathbf{r}$ не нарушает связи. Если смещенная точка остается на поверхности, то $\delta x, \delta y, \delta z$ должны удовлетворять уравнению $f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t) = 0$. Разлагая его левую часть в ряд Тейлора, получаем соотношение

$$f(x_0, y_0, z_0, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \dots = 0,$$

где частные производные вычисляются в точке P_0 , а многоточие обозначает члены выше первого порядка малости относительно $\delta x, \delta y, \delta z$. Если этими членами пренебречь и учесть, что $f(x_0, y_0, z_0, t) = 0$, то приходим к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0, \quad (1)$$

определяющему виртуальные перемещения. Уравнение (1), в частности, показывает, что в отличие от действительного перемещения, которое единственно, число виртуальных перемещений бесконечно: мы имеем одно линейное уравнение (1) относительно трех неизвестных $\delta x, \delta y, \delta z$. Любой бесконечно малый вектор, имеющий начало в точке P_0 и лежащий в плоскости, касательной к поверхности $f=0$, будет задавать виртуальное перемещение.

Бесконечно малые приращения $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ называются еще *вариациями* величин x_v, y_v, z_v . Переход при фиксированном времени t из положения системы, определяемого радиусами-векторами \mathbf{r}_v , в бесконечно близкое положение, определяемое радиусами-векторами $\mathbf{r}_v + \delta \mathbf{r}_v$, называют *синхронным варьированием*.

Если система свободная, то ускорения \mathbf{a}_v ее точек определяются из второго закона Ньютона: $m_v \mathbf{a}_v = \mathbf{F}_v$, где \mathbf{F}_v – равнодействующая сил, приложенных к точке P_v . Если же система несвободная, то на ускорения ее точек наложены вполне определенные ограничения. Величины \mathbf{a}_v не будут, вообще говоря, удовлетворять этим ограничениям, то есть ускорения \mathbf{w}_v точек P_v несвободной системы будут отличаться от их ускорений \mathbf{a}_v в случае свободной системы, у точки P_v появляется дополнительное ускорение $\mathbf{w}_v - \mathbf{a}_v$. Это ускорение возникает за счет неизвестных сил, обусловленных наличием связей. Их называют *реакциями связей*. Силы \mathbf{F}_v называют *активными* силами. Они являются известными функциями координат и

скоростей точек системы, а также, возможно, и времени t .

Обозначив через \mathbf{R}_v равнодействующую реакций связей, приложенных к точке P_v , согласно второму закону Ньютона получим $m_v(\mathbf{w}_v - \mathbf{a}_v) = \mathbf{R}_v$. Отсюда и из равенств $m_v \mathbf{a}_v = \mathbf{F}_v$ следуют уравнения движения точек системы

$$m_v \mathbf{w}_v = \mathbf{R}_v + \mathbf{F}_v, \quad v = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Связи называются *идеальными*, если работа реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях равна нулю, то есть

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{v=1}^N (R_{vx} \delta x_v + R_{vy} \delta y_v + R_{vz} \delta z_v) = 0. \quad (3)$$

Примерами систем с идеальными связями могут служить следующие системы: материальная точка на абсолютно гладкой поверхности; свободное твердое тело; тело, вращающееся вокруг неподвижной оси; два тела, соединенные точечным шарниром; два соприкасающихся тела при отсутствии проскальзывания; две точки, соединенные невесомой нерастяжимой нитью, не оказывающей сопротивления изменению ее формы (идеальная нить). Многие материальные объекты в природе и технике с приемлемой для практики точностью можно моделировать системой с идеальными связями. Далее рассматриваются только такие системы.

ФОРМУЛИРОВКА ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ

Принцип наименьшего принуждения дает признак, отличающий действительное движение от класса других движений, кинематически возможных при тех же условиях.

Гаусс дал следующую словесную формулировку своего принципа: *“Движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном, какое только возможно, согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы все они стали свободными, то есть происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения, примененного в течение бесконечно малого мгновения, принять сумму произведений масс каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она заняла бы, если бы была свободной”*.

Пусть P_v – положение v -й точки в момент времени t (рис. 1), а B_v – положение, которое заняла бы эта точка через промежуток времени dt , если бы в момент t система была освобождена от связей. Приведенный принцип утверждает, что положения A_v , которые займут точки системы в момент $t + dt$ в действительном движении, выделяются между всеми

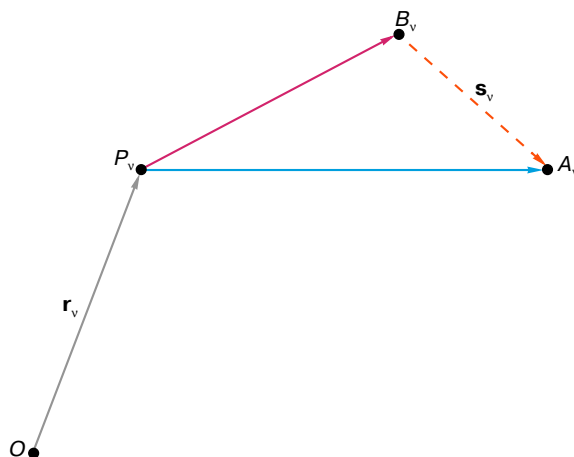


Рис. 1. P_v – положение материальной точки в момент t , A_v – положение точки несвободной системы в момент $t + dt$, B_v – положение точки системы, освобожденной от связей, в момент $t + dt$

положениями, допускаемыми связями, тем, что для них величина G , определяемая по формуле

$$G = \sum_{v=1}^N m_v s_v^2, \quad (4)$$

где s_v – длина вектора $\overline{B_v A_v}$, имеет минимальное значение.

Таким образом, мерой принуждения Гаусс называет величину (4), характеризующую отклонение системы, движущейся под действием активных сил при наложенных на нее связях, от свободного движения, которое она имела бы начиная с рассматриваемого момента, двигаясь под действием тех же активных сил, с теми же начальными скоростями в момент времени t , если бы с этого момента были устранены наложенные на систему связи.

Равновесие является частным случаем движения и также описывается принципом Гаусса. Пусть система занимает некоторое допускаемое связями положение и все ее точки имеют нулевые скорости. Тогда если каждое движение дает большее значение величине (4), то рассматриваемое положение будет положением равновесия. В этом случае состояние покоя является более близким к свободному движению, нежели любое кинематически возможное движение.

Весьма интересно, что идея отклонения системы от свободного движения в форме (4) суммы величин, пропорциональных квадратам отклонений точек системы, заимствована Гауссом в им же построенной теории ошибок. Принцип наименьшего принуждения является механическим аналогом метода наименьших квадратов, лежащего в основе всех статистических исследований. Величина (4), будучи поделенной на массу всей системы, выразит

квадрат среднего взвешенного из квадратов отклонений отдельных точек системы, причем множители m_v соответствуют “весовому” множителю в методе наименьших квадратов. Выявляя замечательную внутреннюю связь идеи принципа наименьшего принуждения с методом наименьших квадратов, Гаусс замечает, что “свободное движение, если оно при наличии имеющихся условий не может иметь места, модифицируется природой в точности таким образом, каким вычисляющий математик, пользуясь методом наименьших квадратов, выравнивает результаты эксперимента, относящиеся к величинам, связанным некоторой зависимостью”.

Следующий пример иллюстрирует принцип Гаусса.

Пример 1. Материальная точка движется под действием силы тяжести по гладкой прямой, наклоненной к горизонтальной плоскости под углом α (рис. 2). Найдем ускорение точки.

Пусть в начальный момент точка занимает положение P и имеет скорость, равную нулю. При свободном движении точка двигалась бы по вертикали и за время dt прошла бы расстояние $PB = 1/2 g(dt)^2$. В действительном несвободном движении по прямой PC точка движется с неизвестным ускорением w и за время dt проходит расстояние $PA = 1/2 w(dt)^2$.

Действительное движение наименее отклонится от свободного движения, если точка A будет основанием перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую PC . Следовательно, $PA = PB \sin \alpha$. Отсюда с учетом выражений для PA и PB находим искомое ускорение: $w = g \sin \alpha$.

Для применения принципа Гаусса к решению конкретных задач механики и физики целесообразно получить его аналитическое выражение в декартовых координатах. Пусть в момент времени t точка P_v несвободной системы имеет скорость \mathbf{v}_v , а \mathbf{F}_v — равнодействующая всех активных сил, приложенных к точке P_v . Тогда (см. рис. 1) с точностью до членов второго порядка малости относительно dt имеем

$$\overline{P_v A_v} = \mathbf{v}_v dt + \frac{1}{2} \mathbf{w}_v (dt)^2, \quad \overline{P_v B_v} = \mathbf{v}_v dt + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_v}{m_v} (dt)^2.$$

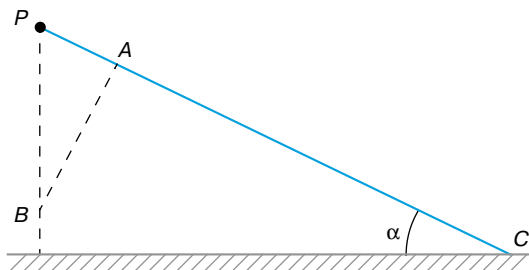


Рис. 2. Движение точки по наклонной прямой

Отклонение $s_v = \overline{B_v A_v}$ точки P_v при несвободном движении от ее положения при свободном движении вызвано действием связей, принуждающих точки системы отклоняться от движения, свойственного точкам свободной системы. Для квадрата длины вектора s_v получаем выражение

$$s_v^2 = (\overline{P_v A_v} - \overline{P_v B_v})^2 = \frac{1}{4} (dt)^4 \left(\mathbf{w}_v - \frac{\mathbf{F}_v}{m_v} \right)^2, \quad (5)$$

и функция (4), следовательно, может быть записана в виде $G = 1/2 (dt)^4 Z$, где

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\mathbf{w}_v - \frac{\mathbf{F}_v}{m_v} \right)^2. \quad (6)$$

Функция Z называется принуждением (по-немецки Zwang). От меры принуждения (4) она отличается несущественным для существования экстремума множителем $1/2 (dt)^4$.

Отбрасывая этот множитель, получаем следующую формулировку принципа Гаусса: *в каждый момент времени истинное движение системы, находящейся под действием активных сил и подверженной идеальным удерживающим связям, отличается от всех кинематически возможных движений, совершающихся из той же начальной конфигурации и с теми же начальными скоростями, тем свойством, что для истинного движения принуждение Z является минимальным.*

Математически это выражается равенством $\delta Z = 0$, причем вариация берется при неизменяемых координатах и скоростях точек системы, то есть варьируются только ускорения.

В координатной форме принуждение записывается в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left[\left(w_{vx} - \frac{F_{vx}}{m_v} \right)^2 + \left(w_{vy} - \frac{F_{vy}}{m_v} \right)^2 + \left(w_{vz} - \frac{F_{vz}}{m_v} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Рассмотрим несложный пример применения принципа наименьшего принуждения к решению задач механики.

Пример 2. Три груза массы m каждый соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 3, а). Два груза лежат на горизонтальной плоскости, а третий груз подвешен вертикально. Пренебрегая трением, найдем ускорения грузов.

Так как нить нерастяжима, то грузы движутся с одинаковыми по модулю ускорениями. Имеем

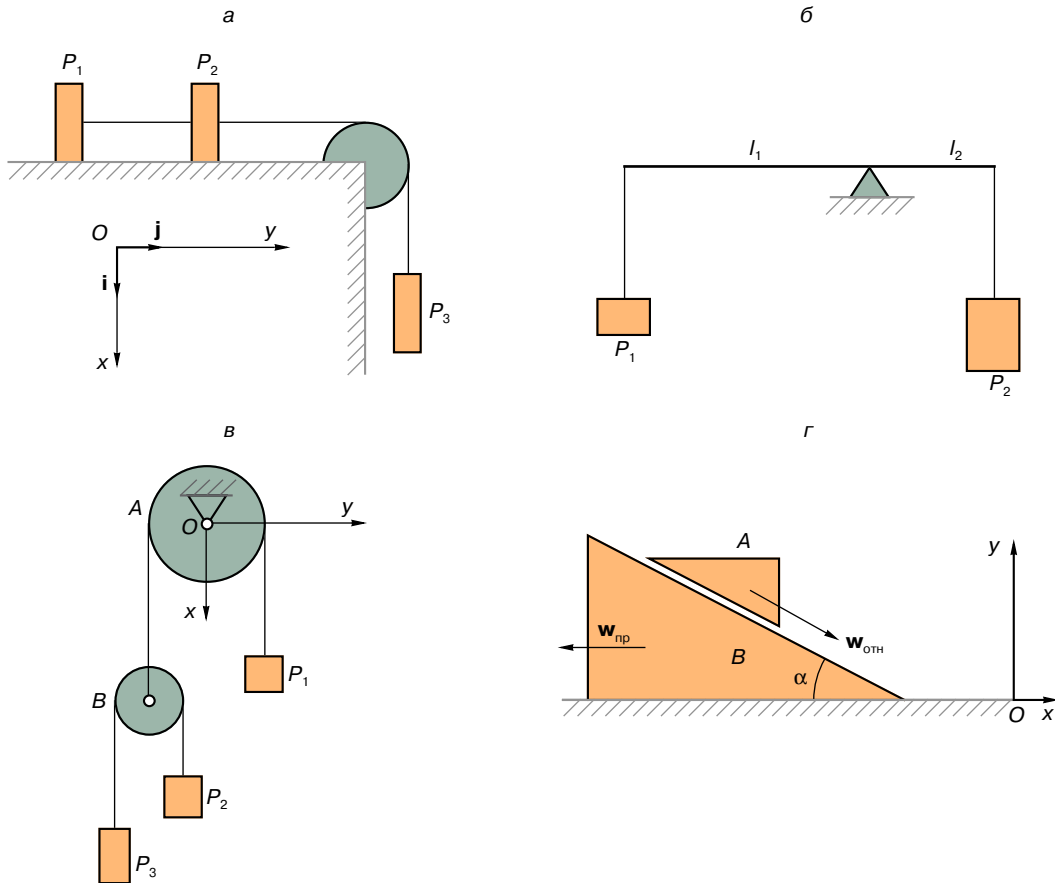


Рис. 3. а – движение трех грузов, соединенных нитью (ось Ox вертикальна, Oy горизонтальна, i, j – единичные векторы); б – равновесие невесомого горизонтального рычага с грузами на концах; в – система блоков и грузов; г – движение двух призм (вектор ускорения призмы A в неподвижной системе координат Oxy равен сумме векторов ускорения $w_{пр}$ призмы B и ускорения $w_{отн}$ призмы A относительно призмы B)

$w_1 = w_2 = wj, w_3 = wi; F_1 = F_2 = F_3 = mgi$. Для принуждения (7) получаем

$$Z(w) = \frac{1}{2}m(w^2 + g^2) + \frac{1}{2}m(w^2 + g^2) + \frac{1}{2}m(w - g)^2 = \frac{1}{2}m(3w^2 - 2gw + 3g^2).$$

Функция Z является квадратным трехчленом относительно w . Из условия его минимума получаем $w = 1/3g$.

Следующий пример иллюстрирует применимость принципа Гаусса к случаям равновесия.

Пример 3. К концам невесомого горизонтального рычага с плечами l_1 и l_2 подвешены грузы P_1 и P_2 весами m_1g и m_2g соответственно (рис. 3, б). Вначале система удерживалась в покое. Когда ее отпускают, грузы могут прийти в движение. В самом начале движения ускорения грузов будут вертикальны. Пусть ускорение w_1 груза P_1 равно w и направлено вниз. Тогда, очевидно, ускорение w_2 груза P_2 направ-

лено вверх и равно wl_2/l_1 . Для принуждения Z имеем выражение

$$Z = \frac{1}{2} \left[m_1(w - g)^2 + m_2 \left(\frac{wl_2}{l_1} + g \right)^2 \right].$$

Из условия минимума функции Z находим

$$w = \frac{m_1l_1 - m_2l_2}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2} l_1g.$$

Если веса грузов обратно пропорциональны плечам рычага, то есть $m_1/m_2 = l_2/l_1$, то $w = 0$ и рычаг находится в равновесии. В этом случае, следовательно, покой дает наименьшее отклонение от свободного движения.

Теперь используем принцип Гаусса для решения несколько более сложных задач.

Пример 4. Дана система из двух блоков, неподвижного B и подвижного A и трех грузов P_1, P_2, P_3 , подвешенных при помощи невесомых нерастяжимых нитей, как показано на рис. 3, в. Массы грузов

соответственно равны m_1, m_2, m_3 , блоки невесомы, трения нет. При $t = 0$ скорости грузов равны нулю. При каком соотношении масс грузов груз P_1 при $t > 0$ будет опускаться?

Пусть x_1, x_2, x_3 – координаты грузов P_1, P_2, P_3 , а x_B – координата центра блока B . Тогда

$$Z = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1 - g)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2 - g)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3 - g)^2,$$

а условия нерастяжимости нитей запишутся в виде равенств

$$x_1 + x_B = \text{const}, \quad x_2 + x_3 - 2x_B = \text{const}.$$

Отсюда получаем, что

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_B = 0, \quad \dot{x}_2 + \dot{x}_3 - 2\dot{x}_B = 0.$$

Следовательно, $\dot{x}_3 = -2\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ и функция Z будет функцией от двух переменных \dot{x}_1 и \dot{x}_2 :

$$Z = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1 - g)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2 - g)^2 + \frac{1}{2}m_3(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + g)^2.$$

Из условий экстремума имеем два уравнения для нахождения ускорений \ddot{x}_1, \ddot{x}_2 :

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \dot{x}_2} = 0$$

или

$$(m_1 + 4m_3)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 = (m_1 - 2m_3)g,$$

$$2m_3\ddot{x}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 = (m_2 - m_3)g.$$

Из этих уравнений находим

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}g.$$

Груз P_1 будет опускаться, если $\ddot{x}_1 > 0$. Поэтому искомое соотношение масс грузов записывается в виде неравенства

$$m_1 > \frac{4m_2m_3}{m_2 + m_3}.$$

Пример 5. Призма A массы m скользит по боковой грани призмы B массы M , образующей угол α с горизонтом (рис. 3, з). Определить ускорение $w_{\text{пр}}$ призмы B и горизонтальную w_x и вертикальную w_y составляющие ускорения призмы A . Трением пренебречь.

Так как призма A не отрывается от призмы B , то (см. рис. 3, з)

$$w_x = -w_{\text{пр}} + w_{\text{отн}} \cos \alpha, \quad w_y = -w_{\text{отн}} \sin \alpha. \quad (8)$$

Для принуждения имеем выражение

$$Z = \frac{1}{2}m[w_x^2 + (w_y + g)^2] + \frac{1}{2}M(w_{\text{пр}}^2 + g^2). \quad (9)$$

Но из (8) следует, что

$$w_y = -(w_x + w_{\text{пр}}) \text{tg} \alpha. \quad (10)$$

Поэтому

$$Z = \frac{1}{2}mw_x^2 + \frac{1}{2}m[(w_x + w_{\text{пр}})\text{tg} \alpha - g]^2 + \frac{1}{2}M(w_{\text{пр}}^2 + g^2).$$

Условия экстремума

$$\frac{\partial Z}{\partial w_x} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial w_{\text{пр}}} = 0$$

дают уравнения

$$w_x + [(w_x + w_{\text{пр}})\text{tg} \alpha - g]\text{tg} \alpha = 0, \quad (11)$$

$$Mw_{\text{пр}} + m[(w_x + w_{\text{пр}})\text{tg} \alpha - g]\text{tg} \alpha = 0. \quad (12)$$

Из системы уравнений (10)–(12) получаем искомые величины:

$$w_{\text{пр}} = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g, \\ w_x = \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g, \quad w_y = -\frac{(M + m) \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ

Перепишем уравнения движения точек системы (2) в виде

$$m_v w_v - F_v = R_v, \quad v = 1, 2, \dots, N.$$

Умножив обе части этих равенств скалярно на виртуальные перемещения δr_v и произведя затем суммирование по v с учетом условия (3) идеальности связей, получим следующее соотношение:

$$\sum_{v=1}^N (m_v w_v - F_v) \cdot \delta r_v = 0. \quad (14)$$

Сравним теперь в некоторый момент действительное движение несвободной системы с таким варьированным движением, при котором все точки системы, имея те же положения и скорости, что и в действительном движении, будут обладать ускорениями, отличающимися от действительных на любые бесконечно малые величины, согласующиеся со связями. Этот способ варьирования движения, когда варьированию подвергаются только ускорения, называют *варьированием по Гауссу*.

При таком варьировании вариации ускорений δw_v определяются теми же уравнениями, что и виртуальные перемещения δr_v . Поясним это на примере системы, представляющей собой материальную точку, движущуюся по поверхности $f(x, y, z, t) = 0$. Эта система рассматривалась в начале статьи. Дважды дифференцируя тождество $f(x(t), y(t), z(t), t) = 0$ по времени, а затем варьировав при условии $\delta x = \delta y = \delta z = 0, \delta \dot{x} = \delta \dot{y} = \delta \dot{z} = 0$, получаем соотношение,

которому должны удовлетворять проекции вариации ускорения точки:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \delta \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \delta \ddot{z} = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (1) с точностью до обозначений неизвестных.

В соотношении (14) величины $\delta \mathbf{r}_v$ можно заменить величинами $\delta \mathbf{w}_v$. Тогда получим

$$\sum_{v=1}^N (m_v \mathbf{w}_v - \mathbf{F}_v) \cdot \delta \mathbf{w}_v = 0. \quad (15)$$

Замечая, что массы точек m_v постоянны, а силы \mathbf{F}_v не зависят от ускорений точек системы, последнее равенство можно записать в виде

$$\delta Z = 0,$$

где Z – принуждение (6).

Покажем, что величина Z минимальна на действительном движении. В самом деле, пусть \mathbf{w}_{v0} – ускорения точек системы в их действительном движении, а Z_0 – соответствующее им значение величины Z . Тогда, полагая, что в сравниваемом с действительным кинематически возможным движением величина \mathbf{w}_{v0} равна $\mathbf{w}_{v0} + \delta \mathbf{w}_{v0}$, находим, что

$$Z - Z_0 = \sum_{v=1}^N (m_v \mathbf{w}_{v0} - \mathbf{F}_v) \cdot \delta \mathbf{w}_{v0} + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v (\delta \mathbf{w}_{v0})^2.$$

Первая сумма в правой части этого равенства обращается в нуль в силу уравнения (15), а вторая сумма строго положительна, так как не все величины $\delta \mathbf{w}_{v0}$ равны нулю. Поэтому $Z > Z_0$, то есть принуждение Z на действительном движении принимает наименьшее значение в классе возможных ускорений. Принцип Гаусса доказан.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА ПРИНЦИПА ГАУССА

Остановимся несколько подробнее на принципе наименьшего принуждения Гаусса. При помощи равенства (5) функция (4), о минимальном значении которой идет речь в принципе Гаусса, может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} G &= \sum_{v=1}^N m_v s_v^2 = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{s}_v \cdot \mathbf{s}_v = \\ &= \frac{1}{2} (dt)^2 \sum_{v=1}^N (m_v \mathbf{w}_v - \mathbf{F}_v) \cdot \mathbf{s}_v. \end{aligned}$$

Но, согласно уравнениям (2), выражение в круглых скобках можно заменить на равнодействующую \mathbf{R}_v реакций связей, поэтому имеем $G = 1/2(dt)^2 A$, где

$$A = \sum_{v=1}^N \mathbf{R}_v \cdot \mathbf{s}_v. \quad (16)$$

Величина (16) выражает работу реакций связей, которую вызывает в элемент времени dt отклонение несвободного движения от свободного.

Принципу наименьшего принуждения можно дать теперь такую формулировку: *действительное движение среди кинематически возможных выделяется тем, что для него работа реакций связей на путях отклонения этого движения от свободного движения в каждый данный момент есть минимум.*

Это энергетическое толкование принципа наименьшего принуждения предложено в нескольких иных терминах И.И. Рахманиновым. Сформулированное утверждение он назвал началом наименьшей потерянной работы.

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ

Физический смысл принципа Гаусса можно выразить в других терминах. Используя уравнение (2), принуждение (6) можно переписать в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N \frac{R_v^2}{m_v}. \quad (17)$$

Условие того, что величина Z минимальна для действительного движения, приводит к экстремальному свойству реакций связей: *для действительного движения реакции связей минимальны (в смысле минимума величины (17)).*

Принцип Гаусса может быть выражен теперь в следующей форме: *действительное движение есть одно из движений, совместимых со связями, для которого в каждый момент времени сумма отношений квадратов реакций в каждой отдельной точке к соответствующей массе есть минимум.*

На экстремальное свойство реакций связей впервые, по-видимому, обратил внимание М.В. Остроградский в 1836 году, через семь лет после опубликования знаменитого мемуара Гаусса.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРИНЦИПА ГАУССА

Принцип Гаусса обладает большой эвристической ценностью, благодаря которой он послужил основанием для дальнейшего развития механики. Например, механика Г. Герца возникла главным образом на основании идей, содержащихся в этом принципе. Остановимся здесь на принципе наименьшей кривизны Герца (или принципе прямейшего пути), который является обобщением первого закона Ньютона (аксиомы инерции). Этот принцип можно также трактовать как геометрическую интерпретацию принципа Гаусса.

Будем рассматривать системы, у которых нет активных сил, а связи идеальные, удерживающие и не зависят от времени. Для простоты возьмем сначала

систему из одной материальной точки, движущейся по неподвижной поверхности.

Так как активных сил нет, то

$$Z = \frac{1}{2}mw^2.$$

Но вектор ускорения точки разлагается на нормальную и тангенциальную составляющие: $w = w_n + w_\tau$. В нашем случае тангенциальное ускорение w_τ должно лежать в плоскости, касательной к поверхности. Но в силу отсутствия трения оно просто равно нулю. Величина же нормального ускорения w_n равняется $v^2/\rho = v^2k$, где ρ – радиус кривизны траектории точки, $k = 1/\rho$ – ее кривизна. Следовательно, $w^2 = w_n^2 = v^4k^2$ и принуждение принимает вид

$$Z = \frac{1}{2}mv^4k^2.$$

Поскольку из закона сохранения энергии следует, что скорость точки постоянна, то минимальность принуждения означает минимальность кривизны траектории точки. Таким образом, точка движется по прямейшему пути с постоянной скоростью.

Если система состоит из N , $N > 1$, материальных точек, то все обстоит аналогично. Здесь удобно рассматривать движение в $3N$ -мерном пространстве специальным образом выбранных координат. Движение системы тогда представляется движением одной геометрической точки в этом пространстве. По аналогии с трехмерным пространством можно ввести понятие скорости системы, траектории и ее кривизны. И из минимума принуждения будет следовать, что действительное движение системы происходит с постоянной скоростью, причем траектория системы имеет наименьшую кривизну по сравнению со всеми другими траекториями, допускаемыми связями. В этом и состоит принцип прямейшего пути Герца.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ПРИНЦИП ГАУССА

Принцип Гаусса позволяет свести получение дифференциальных уравнений движения к выписыванию условий экстремума принуждения (6), являющегося функцией второй степени относительно ускорений. Рассмотрим пример.

Пример 6. Найдем дифференциальное уравнение плоского движения математического маятника. Маятник представляет собой точечную массу, прикрепленную при помощи невесомого стержня длины l к точке O , около которой стержень может вращаться без трения в вертикальной плоскости (рис. 4).

Функция Z вычисляется по формуле

$$Z = \frac{1}{2}m \left[\left(\dot{x} - \frac{F_x}{m} \right)^2 + \left(\dot{y} - \frac{F_y}{m} \right)^2 \right].$$

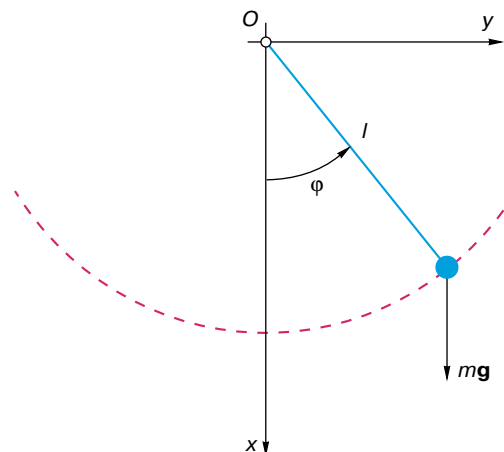


Рис. 4. Математический маятник (ось Ox вертикальна, Oy горизонтальна, точечная масса имеет координаты $x = l \cos \varphi$, $y = l \sin \varphi$)

Так как $F_x = mg$, $F_y = 0$, а

$$\ddot{x} = -l(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2),$$

$$\ddot{y} = l(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2),$$

то она может быть записана в виде

$$Z = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + 2gl\sin \varphi \ddot{\varphi}) + \frac{1}{2}m(l^2\ddot{\varphi}^4 + 2gl\cos \varphi \ddot{\varphi}^2 + g^2).$$

Из условия $\partial Z / \partial \ddot{\varphi} = 0$ получаем искомое уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

При помощи принципа Гаусса были найдены новые уравнения аналитической динамики, применимые к системам как с геометрическими, так и с дифференциальными неинтегрируемыми связями (последние системы называются неголономными). Это уравнения Гиббса–Аппеля, широко используемые, например, в динамике твердых тел, катящихся без скольжения по неподвижной или подвижной поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Принцип наименьшего принуждения Гаусса исследовали многие математики, механики и физики. Для целей разного рода теоретических исследований и решения конкретных задач принципу были даны различные модификации и обобщения.

В XIX веке благодаря трудам Г. Шеффлера, А. Риттера, Р. Липшица, Дж. Гиббса, Л. Больцмана и др. была получена аналитическая формулировка принципа Гаусса, уточнен характер варьирования

движения, дано применение принципа к системам с неударными связями, обнаружилось значение принципа Гаусса как наиболее общего принципа механики. Еще более существенное развитие принцип Гаусса получил в нашем столетии. Исследования А.И. Грдины развивали принцип Гаусса вообще и особенно применительно к динамике живых организмов. В его работах впервые рассмотрены связи, зависящие от переменных параметров, показано, что принцип Гаусса распространяется на неголономные системы с “волевыми связями”.

Е.А. Болотов обобщил принцип Гаусса на случай частичного освобождения систем от голономных и линейных по скоростям неголономных связей, расширив тем самым высказанную еще Э. Махом мысль о частичной освобождаемости в случае голономных связей. (У Гаусса все связи удерживающие и предполагается полное освобождение системы.) Обобщенный принцип Гаусса в формулировке Болотова состоит в том, что *отклонение действительного движения системы от действительного же ее движения, получающегося при отбрасывании всех не удерживающих связей и произвольного числа удерживающих, меньше, чем отклонение любого из возможных движений*. Е.А. Болотов также показал справедливость обобщенного принципа Гаусса в некоторых задачах теории удара.

Совсем недавно В.А. Сеницын получил новую форму принципа Гаусса, предполагающую освобождение системы не от всех (как у Болотова), а только от части неударных связей. Эта новая форма принципа Гаусса была применена Сеницыным при анализе проблемы ослабления неударных связей.

Н.Г. Четаев дал новое (аксиоматическое) определение понятия виртуального перемещения для неголономных систем с нелинейными по скоростям связями. Он также предложил новую точку зрения на освобождение материальных систем. Четаев показал, что при данном им определении виртуальных перемещений и освобождении принцип Гаусса справедлив и для нелинейных неголономных систем. Кроме того, Четаев дал новую энергетическую трактовку принципа Гаусса для систем с голономными и линейными неголономными связями.

В последние десятилетия принцип Гаусса получил дальнейшее развитие в работах В.В. Румянцева. Он установил принцип Гаусса для систем с неидеальными связями, обобщил его на сплошные среды, на управляемые механические системы.

Принцип наименьшего принуждения имеет не только теоретическую, но и большую практическую значимость. Область его приложений не ограничивается только задачами механики. Этот принцип находит приложения в теоретической физике и других смежных областях естествознания.

Недавно Б. Вуяновичем (B. Vujanovic, 1976) принцип Гаусса был использован для получения приближенных решений дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных). Предложен компьютерный метод моделирования динамики сложных управляемых многозвенных механических систем без вывода уравнений движения на основе прямой реализации принципа наименьшего принуждения Гаусса (А.Ф. Верещагин, 1975).

Принцип Гаусса и сейчас привлекает внимание исследователей, теоретиков и прикладников. В самом выражении “наименьшее принуждение” заключена какая-то неразгаданная тайна. Как и почему природа минимизирует принуждение? Наверное, на этот вопрос нет ответа. Возможности же практического использования идей, содержащихся в принципе наименьшего принуждения Гаусса, в прикладных задачах раскрыты далеко не полностью. Поиск продолжается...

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаусс К. Об одном новом общем принципе механики // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 170–172.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения // Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. Цыганова Н.Я. Основные этапы развития принципа наименьшего принуждения // История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 1970. Вып. 9: Механика и математика. С. 122–134.
4. Румянцев В.В. О принципах Гаусса и Четаева для систем с неидеальными связями // Теоретична и приложна механика. 1974. Т. 5, № 1. С. 9–14.
5. Сеницын В.А. О принципе наименьшего принуждения для систем с неударными связями // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 6. С. 920–925.
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
7. Веретенников В.Г., Сеницын В.А. Теоретическая механика: Дополнения к общим разделам. М.: МАИ, 1996. 340 с.

* * *

Анатолий Павлович Маркеев, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного авиационного института, главный научный сотрудник Института проблем механики РАН. Область научных интересов: аналитическая динамика, теория устойчивости и нелинейных колебаний, небесная механика. Автор более 100 статей и четырех монографий.