

ONE CLASSICAL OPTIMIZATION PROBLEM OF AERODYNAMICS

N. B. IL'INSKII

A quest for an airfoil shape providing maximal lift is a classical problem of aerohydrodynamics, which attracts attention of researches during the last century. In the present paper the up-to-date situation of the problem and its history are described as well as the several approaches to solution of the problem.

Нахождение профиля крыла с максимальным значением подъемной силы является классической задачей аэрогидродинамики, привлекающей внимание исследователей на протяжении последнего столетия. В статье изложены история и современное состояние этой проблемы, а также различные подходы к ее решению.

ОБ ОДНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ АЭРОДИНАМИКИ

Н. Б. ИЛЬИНСКИЙ

Казанский государственный университет

Современные задачи теоретической и прикладной механики требуют разработки эффективных процедур оптимизации форм различных конструкций. В связи с этим в последнее время получили значительное развитие математические подходы к проектированию форм различных объектов (см., например, [1, 2]). Существенным в этих подходах является то, что наряду с разработкой сложных численных процедур оптимизации значительное внимание уделяется их математической корректности: сходимости метода, существования и единственности решения.

Одной из классических оптимизационных задач аэрогидродинамики является задача определения формы профиля крыла самолета, обладающего максимальной подъемной силой. Интерес к этой задаче, возникший еще в начале нашего столетия в работах Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина, сохраняется до сих пор. История ее решения показательна и включает работы М.А. Лаврентьева, Р. Либика и многих других авторов, ставшие классическими и известные любому исследователю-специалисту в области аэродинамики. Тем не менее и в настоящее время различные модификации задачи максимизации подъемной силы крылового профиля являются актуальными для современной теоретической и практической аэродинамики и представляют собой идеальный полигон для применения новых аналитических и численных методов решения задач оптимизации.

В статье дается краткий обзор истории и излагаются основные подходы, применяемые для решения задачи максимизации подъемной силы крыловых профилей. Эти подходы универсальны и используются при решении многих других задач оптимизации формы.

МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ

Рассмотрим подробнее механизм образования подъемной силы, действующей на профиль. Типичная картина течения приведена на рис. 1, а. Однородный поток плотности ρ с некоторой скоростью v_∞ набегаем на профиль с гладким (за исключением задней кромки) контуром, установленный под углом атаки α . На передней кромке профиля в точке A , называемой передней критической точкой, поток

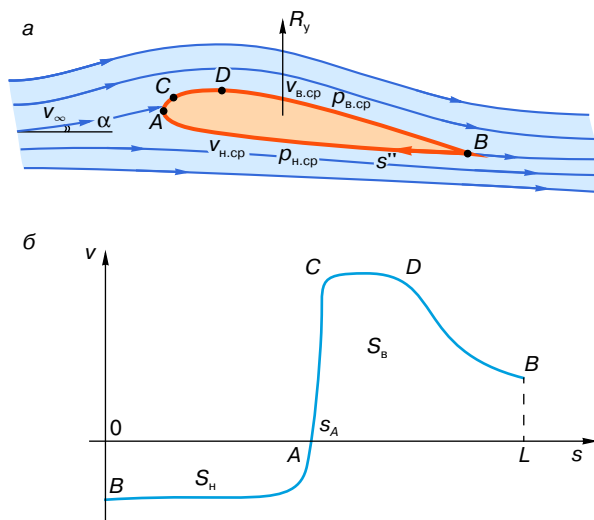


Рис. 1. Характерная картина обтекания профиля (а) и распределение скорости v на его поверхности (б)

разделяется, и часть его течет вдоль верхней поверхности до задней кромки B , а часть – вдоль нижней поверхности до той же точки B . Обозначим через s дуговую координату контура профиля, которая отсчитывается от кромки B профиля по часовой стрелке. Таким образом, верхней поверхности профиля соответствует отрезок от $s = s_A$ до $s = L$, где L – периметр контура профиля, s_A – дуговая координата точки A .

Пусть $v_{в.ср}$ – средняя скорость потока вдоль верхней поверхности, а $v_{н.ср}$ – средняя скорость потока вдоль нижней поверхности. Эти скорости можно приблизительно оценить исходя из того, что времена протекания жидкости вдоль верхней поверхности длины $L - s_A$ и вдоль нижней поверхности длины s_A равны, то есть

$$\frac{L - s_A}{v_{в.ср}} = \frac{s_A}{v_{н.ср}},$$

отсюда

$$\frac{v_{в.ср}}{v_{н.ср}} = \frac{L - s_A}{s_A}.$$

Для обычных профилей длина верхней поверхности $L - s_A$ несколько больше, чем длина нижней поверхности s_A . Следовательно, и средние скорости потока вдоль верхней поверхности выше, чем вдоль нижней: $v_{в.ср} > v_{н.ср}$. К тому же по закону Бернулли $p + \rho v^2/2 = \text{const}$, связывающему давление p и скорость v , для средних давлений вдоль верхней поверхности $p_{в.ср}$ и вдоль нижней поверхности $p_{н.ср}$ имеем

$$p_{в.ср} - p_{н.ср} = \frac{\rho(v_{н.ср}^2 - v_{в.ср}^2)}{2} < 0.$$

Таким образом, среднее давление под нижней поверхностью профиля (ее также называют напорной стороной профиля) больше, чем среднее давление над верхней стороной профиля (эту сторону профиля называют также засасывающей). Такой перепад давления и приводит к образованию подъемной силы, действующей на профиль крыла. Следовательно, для получения большей подъемной силы верхняя поверхность должна быть более протяженной, чем нижняя поверхность. Это можно наблюдать у реальных профилей, имеющих относительно плоскую нижнюю поверхность и более протяженную и выгнутую верхнюю.

ФОРМУЛА Н.Е. ЖУКОВСКОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ

Приведенные соображения носят приближенный, качественный характер и не позволяют рассчитать величину подъемной силы. Для вычисления подъемной силы недостаточно знать средние скорости потока, требуется более подробное рассмотрение изменения скоростей потока по профилю. Характерный график скорости вдоль контура профиля приведен на рис. 1, б. Рассмотрим верхнюю поверхность $ACDB$ ($s_A \leq s \leq L$). Сразу за передней критической точкой A следует участок разгона AC . Этот участок, как правило, невелик, и поток на нем разгоняется до скоростей порядка 1,5–2,5 от величины v_∞ набегающего потока. “Скорость” возрастания скорости на этом участке определяется кривизной контура профиля в точке A : чем больше кривизна контура, тем больше градиент скорости на этом участке. Участок разгона AC сменяется участком CD относительно постоянной скорости. Максимальная скорость на этом участке профиля, как правило, достигает 1,5–2,5 от v_∞ . Скорость потока в задней кромке профиля составляет обычно 0,7–0,8 от v_∞ , поэтому за участком CD постоянной скорости всегда следует участок торможения DB , где скорость потока снижается до указанной величины. С аэродинамической точки зрения это наиболее неблагоприятный участок профиля, поскольку слишком резкое падение скорости нередко приводит к отрыву потока с поверхности профиля, образованию застойной зоны, росту сопротивления и снижению подъемной силы. Поэтому профилированию этого участка обычно уделяется повышенное внимание. Распределение скорости вдоль нижней поверхности $0 \leq s \leq s_A$ (для удобства на рис. 1, б оно приведено со знаком минус) имеет аналогичное “строение”, хотя, как правило, характеризуется меньшими скоростями, что порой приводит к отсутствию участка торможения (то есть поток ускоряется по всей длине нижней поверхности).

Классическая формула, позволяющая рассчитать подъемную силу профиля по распределению скорости $v(s)$ на его поверхности, полученная Н.Е. Жуковским в 1906 году, имеет вид

$$R_y = \rho v_\infty \Gamma, \quad (1)$$

где Γ – циркуляция скорости по контуру профиля, равная разности площадей S_b графиков скорости по верхней поверхности и S_n по нижней,

$$\Gamma = S_b - S_n.$$

Формула Жуковского показывает, что, для того чтобы получить большую подъемную силу профиля, следует как можно больше увеличивать площадь S_b эпюры скорости на верхней поверхности и уменьшать площадь S_n эпюры скорости на нижней поверхности. Следовательно, наибольшей подъемной силой должен обладать экзотический “профиль”, не имеющий нижней поверхности ($s_A = 0$), что обеспечит $S_n = 0$, и с бесконечно большими скоростями вдоль верхней поверхности, что даст $S_b = \infty$ и $R_y = \infty$. Но такой профиль не существует, поскольку бесконечные скорости вдоль верхней поверхности противоречат предположению о гладкости этой части контура профиля.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ

Первое точное решение задачи о максимизации подъемной силы тонкого крылового профиля получено М.А. Лаврентьевым, работа которого [3] завершила длинный цикл работ основоположников теоретической аэродинамики Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина. Еще в начале нашего столетия Н.Е. Жуковский предложил способ построения теоретических крыловых профилей, основанный на оконтуривании дужки окружности (то есть наращивании на бесконечно тонкую дужку контура профиля). Экспериментальные исследования показали, что эти теоретические профили (называемые теперь профилями Жуковского) обладают замечательными летными качествами, и в частности большой подъемной силой. В результате профили Жуковского стали широко применяться в летном деле и стали основой общепринятой формы профиля современного крыла. Объяснение этому факту было получено лишь в 1934 году в упомянутой выше работе М.А. Лаврентьева [3]. Задача формулировалась следующим образом: среди дужек заданной длины и ограниченной кривизны необходимо найти ту, которая при условии плавного обтекания обеспечивает экстремальное значение подъемной силы. Таким тонким профилем как раз и оказалась дуга окружности, использованная Н.Е. Жуковским для построения теоретических профилей.

Развитие теории обратных краевых задач и их приложений в аэрогидродинамике [4] дало следующий импульс решению вопроса максимизации подъемной силы крыловых профилей. Напомним, что в обратных краевых задачах форма профиля крыла отыскивается по заданному на его контуре распределению скорости или давления потока. Как уже было отмечено (см. формулу Жуковского (1)),

подъемная сила профиля как раз выражается через распределение скорости $v(s)$ на профиле.

Абсолютный максимум подъемной силы в классе профилей с полностью гладким контуром заданного периметра L достигается на профиле, представляющем собой круг. Обтекается он так, что передняя критическая точка A совпадает с задней кромкой B (рис. 2, а). При этом максимальная подъемная сила

$$R_y = 2\rho v_\infty^2 L. \quad (2)$$

Оптимальное распределение скорости $v(s)$ по такому контуру представлено на рис. 2, б. Как видим, здесь действительно нет нижней поверхности, при этом максимальная скорость на профиле равна четырем скоростям набегающего потока v_∞ .

Приведенное решение представляет скорее теоретический интерес, поскольку дает величину абсолютного максимума подъемной силы, который не может быть превзойден на профилях с гладким непроницаемым контуром, обтекаемых без отрыва потока. С практической точки зрения такая форма профиля неприемлема, поскольку представленная схема обтекания круга на практике не реализуется. Обычно обтекание круга происходит с отрывом потока и образованием застойной зоны, о чем позволяют судить большие градиенты скорости в зоне торможения (см. рис. 2, а).

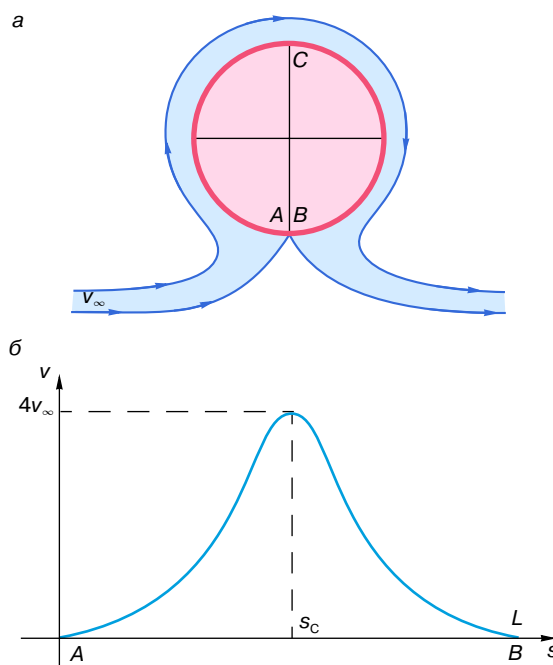


Рис. 2. Обтекание круга и распределение скорости по его контуру, при котором реализуется абсолютный максимум подъемной силы

МАКСИМИЗАЦИЯ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ ОТРЫВА ПОТОКА

Для получения физически реальных решений задачи максимизации подъемной силы следует выполнять условия, обеспечивающие отсутствие отрыва потока с поверхности профиля. Для предотвращения отрыва потока Г.Ю. Степанов и несколько позже Б. Стрэтфорд предложили использовать простые критерии отсутствия срыва потока, которые также могут быть выражены через распределение скорости потока $v(s)$. А именно, профиль крыла обтекает без отрыва потока, если выполнено неравенство

$$f(s) = \frac{av'(s)}{|v(s)|^b} \int_{s_A}^s |v(s)|^{b-1} ds > f_0, \quad (3)$$

где $f(s)$ называют форм-параметром. Приведенный критерий имеет приближенный полуэмпирический характер, так как значения констант a, b, f_0 установлены в ходе экспериментов. В частности, полагают

$$a = 1,17; \quad b = 4,35; \quad f_0 = -2.$$

В результате задача максимизации подъемной силы профиля может быть сформулирована следующим образом: требуется определить распределение скорости $v(s)$, $0 \leq s \leq L$, доставляющее максимум величине R_y из (1) при заданных значениях ρ, v_∞, s_A, L и при условии выполнения критерия (3).

Эту задачу исследовали Р. Либек, Ф. Вортманн и др. Вид оптимального распределения скорости в этом случае показан на рис. 3. Вдоль нижней поверхности профиля скорость всюду равна нулю: $v(s) = 0$, $0 \leq s \leq s_A$, чтобы обеспечить минимальное значение площади S_n . Вдоль верхней поверхности распределение скорости должно быть таким, чтобы площадь S_b была максимальна при выполнении критерия безотрывности (3). Это достигается для так называемых полочных распределений скорости, состоящих из участка постоянной скорости $v(s) = v_{\max}$ (и, следовательно, из (3) $f(s) = 0$) и участка торможения, на котором значение форм-параметра $f(s) = f_0$. При этом отношение максимальной скорости на профи-

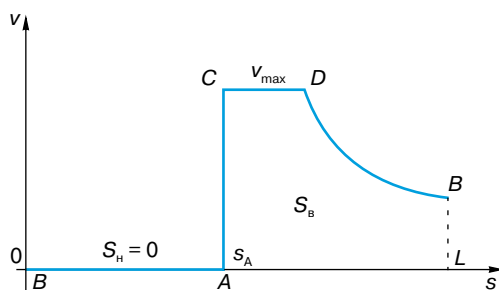


Рис. 3. Оптимальное распределение скорости с учетом условий отсутствия отрыва потока

ле (высоты “полки”) к скорости в задней кромке $v_{3,k}$ равно $v_{\max}/v_{3,k} = 2,35$. Из (1) для максимальной подъемной силы при выполнении критерия (3) имеем

$$R_y = 0,8625\rho v_\infty^2 L. \quad (4)$$

Интересно найти профиль, соответствующий указанному оптимальному распределению скорости $v(s)$, $0 \leq s \leq L$. Однако теория обратных краевых задач аэрогидродинамики приводит к выводу, что не существует профиля реальной формы, на котором реализуется оптимальное $v(s)$. Во-первых, нулевое распределение скорости вдоль нижней поверхности не позволяет обеспечить ее гладкость. Во-вторых, отсутствие участка разгона потока на верхней поверхности приводит, как отмечалось выше, к бесконечной кривизне контура профиля в передней критической точке А. И в-третьих, для получения замкнутого, самонепересекающегося контура должны быть выполнены определенные условия разрешимости, полученные в теории обратных краевых задач аэрогидродинамики. Таким образом, построение профиля сводится к отысканию некоторого распределения скорости $v(s)$, близкого к описанному выше оптимальному, которому соответствовал бы физически реальный профиль. Выбор такого распределения скорости зависит во многом от мастерства исследователя. Один из таких профилей имеет вид, изображенный на рис. 4. Максимальное

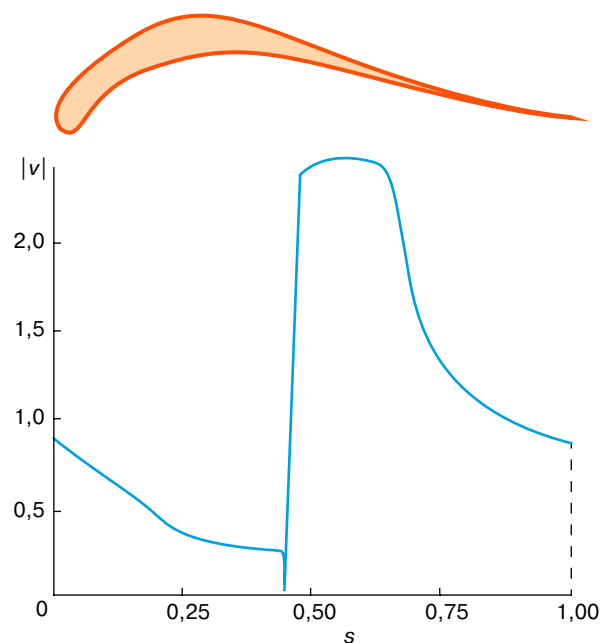


Рис. 4. Оптимальный крылового профиль и распределение скорости по его контуру, построенные с учетом условия отсутствия отрыва потока

значение подъемной силы этого профиля с учетом критерия (3) отсутствия отрыва потока

$$R_y \approx 0,75\rho v_\infty^2 L. \quad (5)$$

Замечательным является то, что передняя часть этого “оптимального” профиля по форме близка к дугке окружности, обладающей, по М.А. Лаврентьеву, экстремальными свойствами в смысле подъемной силы.

Приведем сводную таблицу (табл. 1) максимумов подъемной силы в трех рассмотренных выше случаях: абсолютного максимума при обтекании круга, максимума при выполнении критерия безотрывного обтекания и максимума для физически реальных профилей (формулы (2), (4) и (5) соответственно). Из последнего столбца таблицы видно, насколько максимум подъемной силы для реальных крыловых профилей отличается от абсолютного.

ЧИСЛЕННАЯ МАКСИМИЗАЦИЯ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ

Приведенные результаты по оптимальным в смысле подъемной силы профилям имеют в основном теоретическое значение и дают некоторую оценку сверху для величины подъемной силы крыловых профилей, которая не может быть превышена ни на каком изолированном профиле. На самом деле при проектировании реальных профилей помимо требования высокой подъемной силы необходимо обеспечить выполнение других аэродинамических и геометрических требований, которые часто не удается в простом виде выразить через распределение скорости $v(s)$ на контуре искомого профиля. В этих случаях необходима постановка и решение сложной задачи условной оптимизации, что возможно только средствами современной вычислительной техники. Имеется много работ, посвященных численным алгоритмам построения опти-

мизированных в определенном смысле крыловых профилей, однако они редко содержат строгие математические исследования таких важных проблем, как сходимость метода, его устойчивость, единственность получаемого решения.

Остановимся подробнее на описании одного из подходов к численной оптимизации формы профилей, основанного на теории обратных краевых задач аэрогидродинамики, где удалось не только разработать эффективный алгоритм получения оптимального решения, но и частично исследовать проблемы получения корректного численного решения. Такой подход основан на том, что часть важных аэродинамических и геометрических характеристик крылового профиля достаточно просто записывается через некоторую промежуточную функцию $q(\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, определяемую по распределению скорости $v(s)$ (функцию $q(\gamma)$ также называют управляющей или контрольной). Проектировочные условия (условия замкнутости и самонепересекаемости контура профиля, ограничения на толщину профиля, требования отсутствия отрыва потока с поверхности профиля и т.д.) выражаются через контрольную функцию в виде системы функциональных равенств или неравенств вида


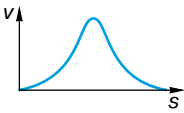
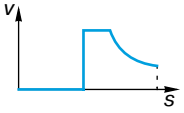

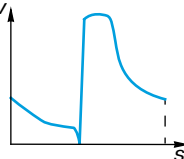
$$\begin{aligned} F_n[q(\gamma)] &= 0, & n &= 1, 2, \dots, N; \\ G_m[q(\gamma)] &> 0, & m &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (6)$$

Сама же подъемная сила выражается через управляющую функцию $q(\gamma)$ в виде функционала

$$R_y = A \left[\int_0^{2\pi} e^{q(\gamma)} d\gamma \right]^{-1}, \quad (7)$$

где A – известная константа. Таким образом, задача максимизации подъемной силы R_y сводится к нахождению функции $q^*(\gamma)$, доставляющей максимум функционалу (7) на множестве функций $q(\gamma)$, удовлетворяющих условиям (6). Если такая функция

Таблица 1

Профиль	Распределение скорости $v(s)$	Максимум	$R_y/\rho v_\infty^2 L$
		Абсолютный	2
Не существует		При условии безотрывного обтекания	0,8625
		Для реальных крыловых профилей	0,75

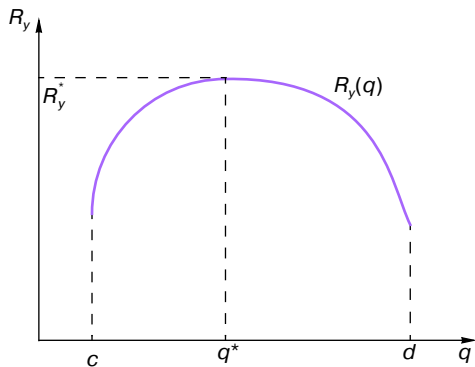


Рис. 5. Схематическое представление отыскания максимума выпуклого функционала

найдется, то соответствующий профиль легко может быть восстановлен методами обратных краевых задач аэрогидродинамики.

Сформулированная задача представляет собой стандартную задачу вариационного анализа. Поэтому для исследования ее разрешимости можно воспользоваться известными подходами этой теории. В частности, оказалось, что функционал (7) обладает свойством так называемой строгой выпуклости. Схематично это свойство представлено на рис. 5, где по оси абсцисс отложена функция $q(\gamma)$, а по оси ординат приведены соответствующие значения функционала $R_y[q(\gamma)]$. Как видим, если функционал R_y является строго выпуклым в направлении оси ординат на некотором отрезке $[c, d]$ (то есть в множестве изменения функции $q(\gamma)$, определяемом условиями (6)), то всегда существует и причем единственная точка $q^*(\gamma)$, доставляющая максимум функционалу R_y . Заметим, что изображение на рис. 5 является лишь схемой, в которой предполагается, что топология множества (6) подобна топологии отрезка прямой $[c, d]$. Выражаясь строго, множество (6) должно быть компактным, то есть ограниченным и содержать свою границу. Таким свойством обладает, например, класс функций $q(\gamma)$, соответст-

вующий профилям с замкнутыми и самонепересекающимися контурами.

Описанный подход позволил на основе численной оптимизации получить решение широкого класса задач оптимизации формы профиля с учетом различных условий, определяемых спецификой эксплуатации реальных профилей. Подробнее с результатами этих исследований можно ознакомиться в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
2. *Баничук Н.Б., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б.* Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
3. *Лаврентьев М.А.* Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. 40 с.
4. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1963. 333 с.
5. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1944. 440 с.

* * *

Николай Борисович Ильинский, доктор физико-математических наук, профессор Казанского государственного университета, главный научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева, заслуженный деятель науки Татарстана и России, член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике. Область научных интересов – обратные краевые задачи механики жидкости и газа. Соавтор трех монографий и автор и соавтор более 120 научных статей в отечественных и зарубежных журналах.