## GENERALIZED FUNCTIONS

M. I. VISHIK

***The article is an introduction to the theory of generalized functions. The strict definition of a generalized function is given. The main attention is devoted to delta function. Some examples of delta-shaped sequences are considered. The derivative of a generalized function is defined. It is proved that the derivative of the Heaviside function is the delta function.***

***Статья содержит введение в теорию обобщенных функций. Приводится строгое определение обобщенной функции. Особое внимание уделено дельта-функции. Приведены примеры дельтаобразных последовательностей функций. Дано определение производной от обобщенной функции. Доказано, что производная функции Хевисайда равна дельта-функции.***




# ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ


М. И. ВИШИК

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*


Новые задачи физики и математики, возникшие в XX столетии, привели к определению нового понятия функции – обобщенной функции или распределения. Обычное понятие функции, которое ставит в соответствие каждому значению $x$ (из некоторой области определения этой функции) соответствующее ему значение $y$, оказалось недостаточным. В физике уже давно употребляются сингулярные функции, которые не могут быть корректно определены в рамках классической теории функций. Простейшим примером сингулярной функции является дельта-функция $\delta(x - x_0)$: она, по определению физиков, равна нулю всюду, кроме одной точки $x_0$, в которой она равна бесконечности, и обладает интегралом по всей оси $x$, равным единице. Очевидно, такое определение неприемлемо для математиков. Цель статьи – дать строгое определение некоторого класса обобщенных функций, привести примеры и результаты из теории обобщенных функций.

Строгая математическая теория обобщенных функций была построена С.Л. Соболевым, Л. Шварцем и другими математиками. С.Л. Соболев впервые разработал теорию обобщенных функций в связи с исследованием гиперболических уравнений (1937, см. [5]). Л. Шварц, развивая теорию обобщенных функций (которые он называл распределениями), построил теорию их преобразования Фурье. Большое внимание он уделил их приложениям к математическому анализу и дифференциальным уравнениям (1950). В настоящее время эта теория нашла приложения почти во всех областях математики и ее приложений, физике и других областях естествознания (см. [1, 2]).

## РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ОБЫЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Скажем, что $y = f(x)$ является *обычной функцией*, если каждому $x$, $-\infty < x < +\infty$, поставлено в соответствие некоторое значение $y$. При этом предполагается, что функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) она непрерывна для всех значений $x$, кроме, быть может, конечного числа точек $x_i$, являющихся ее точками разрыва; 2) функция $f(x)$ ограничена на любом конечном интервале $[a, b]$: $|f(x)| \leq \leq M(a, b)$ при $a \leq b$; $M$ – постоянная. Мы ограничились для простоты функциями $y = f(x)$, заданными на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Будем называть *пробной* или *основной функцией* всякую непрерывную финитную функцию $\varphi(x)$, определенную при $-\infty < x < +\infty$ (функция $\varphi(x)$

называется финитной, если она обращается в нуль вне конечного интервала $[c, d]$: $\varphi(x) = 0$ при $-\infty < x \le c$ и при $d \le x < +\infty$, $c < d$, причем постоянные $c$ и $d$ зависят от $\varphi(x)$).

Совокупность таких основных функций $\varphi(x)$ обозначим через $C_0$ ($\varphi(x) \in C_0$). Если $f(x)$ – обычная функция, то для любой основной функции $\varphi(x) \in C_0$ определен и конечен интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \varphi(x) dx \equiv l_f(\varphi). \tag{1}$$

На самом деле интеграл берется в конечных пределах, так как $\varphi(x) = 0$ вне конечного интервала. Таким образом, каждой пробной функции $\varphi(x) \in C_0$ с помощью формулы (1) сопоставляется число (которое мы обозначим $l_f(\varphi)$), равное значению интеграла от функции $f(x) \cdot \varphi(x)$. Величина $l(\varphi)$, сопоставляющая каждой основной функции $\varphi(x) \in C_0$ некоторое число $l(\varphi)$, называется *функционалом*. Таким образом, величина $l_f(\varphi)$, заданная формулой (1), является функционалом от $\varphi \in C_0$. Функционал $l_f(\varphi)$ вида (1) называется *регулярным функционалом*.

Отметим, что регулярный функционал $l_f(\varphi)$ вида (1) обладает свойством линейности:

$$l_f(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x))dx =$$

$$= c_1\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)dx + c_2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)dx =$$

$$= c_1 l_f(\varphi_1) + c_2 l_f(\varphi_2) \tag{2}$$

для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Функционал $l_f(\varphi)$ также обладает следующим свойством непрерывной зависимости от $\varphi \in C_0$:

$$\text{если } \varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x) \quad \text{в} \quad C_0,$$
$$\text{то} \quad l_f(\varphi_n) \longrightarrow l_f(\varphi), \qquad n \longrightarrow +\infty. \tag{3}$$

При этом $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ в $C_0$, если выполнены два условия: а) $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, обращаются в нуль вне некоторого конечного интервала $[A, B]$, не зависящего от $n$; б) $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно по $x$ сходятся к $\varphi(x)$ (то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ при $n \ge N$ и любого $-\infty < x < +\infty$). Легко видеть (см.[3]), что для $l_f(\varphi)$, определенного (1), соотношение (3) выполнено.

Функционалы $l(\varphi)$, обладающие свойствами (2) и (3), называются короче *линейными непрерывными функционалами*.

Легко доказать, что если известны значения (1) регулярного функционала $l_f(\varphi)$ для всех $\varphi \in C_0$, то ими однозначно определяется обычная функция $f(x)$. Точнее, две обычные функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, различные хотя бы в одной точке $x_0$, в которой они обе непрерывны, порождают несовпадающие функционалы $l_{f_1}(\varphi)$, $l_{f_2}(\varphi)$ (см. [1, 2]). Кроме того, если регулярные функционалы $l_{f_3}(\varphi) = l_{f_4}(\varphi)$, $\forall\varphi \in C_0$, то $f_3(x) = f_4(x)$ для любых $x$, кроме, быть может, точек разрыва $f_3(x)$ и $f_4(x)$.

Таким образом, обычную функцию $y = f(x)$ можно задать другим способом, а именно задав соответствующий ей функционал $l_f(\varphi)$ по формуле (1) при любых пробных функциях $\varphi(x) \in C_0$, то есть задав значения интеграла (1) при всех $\varphi(x) \in C_0$.

## ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ

*Обобщенной функцией* называется любой линейный непрерывный функционал $l(\varphi)$, заданный на $C_0$, обладающий свойствами, аналогичными (2) и (3):

$$l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 l(\varphi_1) + c_2 l(\varphi_2),$$
$$\forall c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_0 \tag{4}$$

(свойство линейности),

$$l(\varphi_n) \longrightarrow l(\varphi), \quad \text{если} \quad \varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x) \quad \text{в} \quad C_0 \tag{5}$$

(свойство непрерывности).

Не всякая обобщенная функция $l(\varphi)$ является регулярной, то есть может быть представлена в виде (1). Известно большое количество сингулярных обобщенных функций, не допускающих представление в виде интеграла (1). Таковой является, например, обобщенная функция $l(\varphi)$, задаваемая формулой

$$l(\varphi) = \varphi(0) \qquad \forall \varphi(x) \in C_0. \tag{6}$$

Проверим, что такой функционал удовлетворяет условиям (4), (5). Свойство линейности (4) для функционала (6), очевидно, выполнено:

$$l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\varphi_1(0) + c_2\varphi_2(0) = c_1 l(\varphi_1) + c_2 l(\varphi_2).$$

Свойство непрерывности (5) по $\varphi$ функционала $l(\varphi)$ (6) также имеет место: если $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$, $n \longrightarrow +\infty$, в $C_0$, то, в частности, $\varphi_n(0) \longrightarrow \varphi(0)$ при $n \longrightarrow +\infty$. Следовательно,

$$l(\varphi_n) = \varphi_n(0) \longrightarrow \varphi(0) = l(\varphi).$$

Таким образом, функционал $l(\varphi) = \varphi(0)$ является обобщенной функцией. Этот функционал принято в физике и математике называть *дельта-функцией* и обозначать $\delta(\varphi)$ или $\langle\delta(x), \varphi(x)\rangle$:

$$\varphi(0) = l(\varphi) = \delta(\varphi) = \langle\delta(x), \varphi(x)\rangle \qquad \forall \varphi(x) \in C_0. \tag{7}$$

Следует, однако, помнить, что любое из этих обозначений выражает лишь тот факт, что $\delta$-функция при пробной функции $\varphi(x) \in C_0$ равна $\varphi(0)$, например,

$$\langle\delta(x), \varphi(x)\rangle = \varphi(0). \tag{8}$$

Ниже мы укажем геометрические и физические примеры, приводящие к понятию дельта-функции.

По аналогии с обозначением (7) и (8) дельта-функции любую обобщенную функцию $l(\varphi)$ записывают в одном из следующих видов:

$$l(\varphi) = \langle l, \varphi\rangle = \langle l(x), \varphi(x)\rangle. \tag{9}$$

Вместо "обобщенная функция $l(\varphi)$" часто говорят "обобщенная функция $l$ или $l(x)$".

## ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Пусть дана последовательность обобщенных функций $\{l_n\}$ (то есть функционалов $\{l_n(\varphi)\}$). По определению, эта последовательность сходится к обобщенной функции $l$, если для любой основной функции $\varphi(x) \in C_0$ выполнено $l_n(\varphi) \longrightarrow l(\varphi)$ или $\langle l_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle l, \varphi\rangle$ при $n \longrightarrow +\infty$. Аналогично семейство обобщенных функций $l_\varepsilon$, зависящих от параметра $\varepsilon$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, сходится при $\varepsilon \longrightarrow 0$ к обобщенной функции $l_0$, если $l_\varepsilon(\varphi) \longrightarrow l_0(\varphi)$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$ для любой $\varphi \in C_0$.

## ДЕЛЬТАОБРАЗНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Можно многими способами строить последовательности регулярных функционалов $l_{f_n}(\varphi)$, сходящихся при $n \longrightarrow +\infty$ к дельта-функции.

**Пример 1.** Пусть $f_n(x)$, $n = 1, 2, ...,$ – обычная функция, задаваемая формулой

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{при} \quad -\dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > \dfrac{1}{n}. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно,

$$f_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow +\infty \qquad \forall x \ne 0, \tag{11}$$

$$f_n(0) \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{12}$$

Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2}dx = \frac{n}{2}\left[\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right)\right] = 1. \tag{13}$$

Покажем, что отвечающие этим обычным функциям функционалы $l_{f_n}(\varphi) = \langle f_n, \varphi\rangle$, задаваемые формулой (1), сходятся к дельта-функции $\langle \delta, \varphi\rangle$:

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle.$$

Для доказательства последнего предельного соотношения заметим, что по теореме о среднем из интегрального исчисления (см. [3])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x)dx =$$

$$= \frac{n}{2}\varphi(c_n)\left[\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right)\right] = \varphi(c_n), \qquad -\frac{1}{n} < c_n < \frac{1}{n}. \tag{14}$$

При $n \longrightarrow +\infty$ имеем $c_n \longrightarrow 0$ и в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ ($\varphi(x) \in C_0$)

$$\varphi(c_n) \longrightarrow \varphi(0) \quad \text{при} \quad n \longrightarrow +\infty \; (c_n \longrightarrow 0). \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \int_{-1/n}^{1/n} f_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(c_n) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle \tag{16}$$

при $n \longrightarrow +\infty$. Иногда эту формулу записывают короче:

$$f_n(x) \longrightarrow \delta(x) \quad \text{при} \quad n \longrightarrow +\infty,$$

понимая под этим выполнение предельного соотношения (16).

**Пример 2.** Рассмотрим семейство обычных функций

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{17}$$

(Предлагается нарисовать графики функций $f_\varepsilon(x)$ при малых значениях $\varepsilon > 0$.)

Докажем, что

$$f_\varepsilon(x) \longrightarrow \delta(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \longrightarrow +0, \tag{18}$$

то есть при любой $\varphi(x) \in C_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \xrightarrow{\varepsilon \to +0} \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

Действительно, пусть $0 < \gamma < 1$, $A > 0$. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-A\varepsilon^\gamma} + \int_{-A\varepsilon^\gamma}^{A\varepsilon^\gamma} + \int_{A\varepsilon^\gamma}^{+\infty}\right)\left(\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\right)\varphi(x)dx. \tag{19}$$

Заметим, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{A\varepsilon^\gamma}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\varphi(x)dx\right| \le \max_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)|\frac{1}{\pi}\int_{A\varepsilon^\gamma}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}dx. \tag{20}$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $\frac{x}{\varepsilon} = y$, $dx = \varepsilon\, dy$ и обозначив $\max\limits_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)| = \|\varphi\|$, получим, что правая часть (20) равна

$$\frac{1}{\pi}\|\varphi\|\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{A/\varepsilon^{1-\gamma}}^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{\pi}\|\varphi\|\operatorname{arctg} y\Big|_{A/\varepsilon^{1-\gamma}}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\|\varphi\|\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon^{1-\gamma}}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \longrightarrow +0. \quad (21)$$

При этом мы воспользовались формулой Ньютона–Лейбница и тем, что

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}.$$

Аналогично доказывается, что первый интеграл в (19)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A\varepsilon^\gamma}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx \longrightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \longrightarrow +0. \quad (22)$$

Второй интеграл в (19)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A\varepsilon^\gamma}^{A\varepsilon^\gamma}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx = \frac{1}{\pi}\varphi(c_\varepsilon)\int\limits_{-A\varepsilon^\gamma}^{A\varepsilon^\gamma}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\varphi(c_\varepsilon)\int\limits_{-A/\varepsilon^{\gamma-1}}^{A/\varepsilon^{\gamma-1}}\frac{1}{1+y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\varphi(c_\varepsilon)\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon^{1-\gamma}} - \operatorname{arctg}\frac{-A}{\varepsilon^{1-\gamma}}\right)\xrightarrow{\varepsilon\to+0}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\varphi(0)\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \varphi(0) = \langle\delta(x), \varphi(x)\rangle. \quad (23)$$

При этом в первом равенстве в (23) мы воспользовались теоремой о среднем для определенных интегралов, причем

$$-A\varepsilon^\gamma < c_\varepsilon < A\varepsilon^\gamma, \quad \text{следовательно,} \quad c_\varepsilon \longrightarrow 0$$

$$\text{при } \varepsilon \longrightarrow +0. \quad (24)$$

Во втором равенстве мы, как и выше, сделали замену переменной $\frac{x}{\varepsilon} = y$, $dx = \varepsilon dy$. В третьем равенстве мы воспользовались формулой Ньютона–Лейбница. Кроме того, в силу (24) $c_\varepsilon \longrightarrow 0$ при $\varepsilon \longrightarrow +0$, откуда следует, что $\varphi(c_\varepsilon) \longrightarrow \varphi(0)$ при $\varepsilon \longrightarrow +0$.

Из (19), (21)–(23) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A\varepsilon^\gamma}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A\varepsilon^\gamma}^{A\varepsilon^\gamma}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{A\varepsilon^\gamma}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx =$$

$$= 0 + \varphi(0) + 0 = \varphi(0) = \langle\delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

Следовательно, функции $f_\varepsilon(x)$, заданные в (17), образуют при $\varepsilon \longrightarrow +0$ дельтаобразную последовательность, то есть выполнено (18).

**Пример 3.** Рассмотрим теперь семейство функций, зависящих от $t$:

$$f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}, \qquad t > 0, \qquad -\infty < x < +\infty. \quad (25)$$

(Изобразите график функций $f_t(x)$ при малых значениях $t$.) Отметим, что для функций $f_t(x)$, заданных формулой (25), справедливы соотношения (11)–(13) с заменой $n$ на $t$ и $n \longrightarrow +\infty$ на $t \longrightarrow +0$. С помощью выкладок, аналогичных выкладкам, проведенным в примере 2, устанавливается, что обычные функции

$$f_t(x) \longrightarrow \delta(x) \qquad \text{при} \quad t \longrightarrow +0. \quad (26)$$

Это эквивалентно тому, что для любой основной функции $\varphi(x) \in C_0$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{4t}}\varphi(x)dx \longrightarrow \varphi(0) = \langle\delta(x), \varphi(x)\rangle$$

$$\text{при } t \longrightarrow +0.$$

Отметим, что формула (26) имеет следующий физический смысл. Рассмотрим бесконечный стержень, совпадающий с осью $x$, обладающий изолированной от внешнего пространства боковой поверхностью. Допустим, что в начале координат (то есть при $x = 0$) в момент времени $t = 0$ имеется единичный источник тепла, а все остальные точки стержня при $t = 0$ имеют температуру $T = T(0, x) \equiv \equiv 0$ ($t = 0$, $t$ – время). Тогда, как доказано в теории теплопроводности [4], при времени $t > 0$ в точке стержня с координатой $x$ температура $T = T(t, x)$ совпадает с функцией (25):

$$T(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = f_t(x) \qquad (\text{см. [4]}).$$

(При этом предполагается, что коэффициент теплопроводности равен единице.) Соотношение (26) означает тот физический факт, что при времени $t \longrightarrow +0$ распределение температуры $T(t, x) = f_t(x)$ в стержне стремится к дельта-функции. Последняя описывает такое распределение температуры, когда вне начала координат температура равна нулю, а в $x=0$ помещен единичный источник тепла.

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Известно, что обычные функции не всегда допускают операцию дифференцирования: существует большое количество функций, не имеющих производной в обычном смысле слова. В противоположность этому мы покажем, что обобщенные функции всегда имеют производную, которая также является обобщенной функцией. Для того чтобы подойти к определению производной обобщенной функции, напомним сначала формулу интегрирования по частям для обычных функций, обладающих непрерывной производной.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и обладают непрерывной первой производной $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ при $-\infty < x < +\infty$. Кроме того, предполагается, что функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала $(a, b)$, то есть при $-\infty < x \le a$ и $b \le x < +\infty$, $b > a$. Тогда, как известно из интегрального исчисления,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx =$$

$$= f(x)\varphi(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx, \quad (27)$$

так как $\varphi(x) = 0$ при $x = a$ и при $x = b$. При этом мы воспользовались тем, что $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \le a$ и $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \ge b$. Выполнение формулы (27) для любых описанных выше функциях $\varphi(x)$ мы положим в основу определения производной от обобщенной функции.

Обозначим через $C_0^1$ совокупность всех непрерывных функций $\varphi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, обладающих непрерывной производной $\varphi'(x)$, $-\infty < x < +\infty$, причем каждая из функций $\varphi(x)$ обращается в нуль вне какого-нибудь конечного интервала, зависящего от $\varphi(x)$ (напомним, что такие функции мы называем финитными). Обозначим: $l_1(\varphi)$ – линейный непрерывный на $C_0^1$ функционал. Иными словами, предполагается, что для $l_1(\varphi)$ выполнено условие (4) линейной зависимости $l_1(\varphi)$ от $\varphi \in C_0^1$ и условие (5) непрерывности $l_1(\varphi)$ по $\varphi \in C_0^1$. Точнее, из $\varphi_n(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi(x)$ в $C_0^1$ следует $l_1(\varphi_n) \longrightarrow l_1(\varphi)$. При этом $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ в $C_0^1$, если $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ в $C_0$ и $\varphi_n'(x) \Rightarrow \varphi'(x)$ в $C_0$. Говорят, что $l_1(\varphi)$ является *обобщенной функцией на* $C_0^1$.

Пусть задан линейный непрерывный функционал $l(\varphi_0)$ на $C_0$ ($l(\varphi_0)$ – обобщенная функция на $C_0$), $\varphi_0 \in C_0$. Производной этой обобщенной функции $l(\varphi_0)$ называется такой линейный непрерывный функционал $l_1(\varphi)$ на $C_0^1$ ($l_1(\varphi)$ – обобщенная функция на $C_0^1$), $\varphi \in C_0^1$, для которой выполнена формула

$$l_1(\varphi) = -l(\varphi') \qquad \forall\varphi \in C_0^1. \quad (28)$$

Если воспользоваться обозначениями $l_1(\varphi) = \langle l', \varphi\rangle$, $l(\varphi') = \langle l, \varphi'\rangle$, то формулу (28) можно переписать так:

$$\langle l', \varphi\rangle = -\langle l, \varphi'\rangle \qquad \forall\varphi \in C_0^1. \quad (29)$$

В такой записи эта формула является аналогом формулы интегрирования по частям (27), которую можно записать короче следующим образом:

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle.$$

При этом мы воспользовались следующим обозначением для интегралов, стоящих слева и справа в формуле (27):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot h(x)dx = \langle g, h\rangle.$$

Таким образом, коротко можно сказать так: функционал $l'$ является производной функционала $l$, если для этих функционалов имеет место формула (29), являющаяся аналогом формулы интегрирования по частям (27).

**Пример 4.** Производная дельта-функции.

По определению (29) производной $l' = \delta'(x)$ обобщенной функции $l = \delta(x)$ имеем

$$\langle\delta'(x),\ \varphi(x)\rangle = -\langle\delta(x),\ \varphi'(x)\rangle = -\varphi'(0).$$

Таким образом, производной дельта-функции (в смысле обобщенных функций) является функционал, ставящий в соответствие любой функции $\varphi \in C_0^1$ значение ее производной в нуле с противоположным знаком. Напомним, что $\delta'(x)$ как производная обобщенной функции $\delta(x)$ есть функционал на пространстве $C_0^1$ функций, имеющих непрерывную производную. Поэтому, во-первых, $\varphi'(0)$ определено и, во-вторых, $\langle\delta', \varphi_n\rangle = -\varphi_n'(0) \longrightarrow -\varphi'(0) = \langle\delta', \varphi\rangle$, если $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ в $C_0^1$, то есть $\delta'(x)$ – непрерывный функционал на $C_0^1$.

**Пример 5.** Производная функции Хевисайда.

Функция Хевисайда $\theta(x)$ является обычной функцией, определяемой следующим образом:

$$\theta(x) = 0 \quad \text{при } x < 0, \qquad \theta(x) = 1 \quad \text{при } x \ge 0.$$

Очевидно, эта функция имеет разрыв в точке $x_0 = 0$. Производная $\theta'(x)$ этой функции при $x \ne 0$ равна нулю: $\theta'(x) = 0$ при $x \ne 0$. Однако при $x = 0$ функция $\theta(x)$ не имеет производной. Функция Хевисайда $\theta(x)$

является обычной функцией, следовательно, ей соответствует регулярный функционал

$$\theta(\varphi) = \langle \theta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx$$

$$\forall \varphi(x) \in C_0.$$

Найдем производную $\theta'(\varphi)$ функционала $\theta(\varphi)$ в смысле приведенного выше определения. Имеем, согласно (29), для $\varphi \in C_0^1$

$$\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \qquad (30)$$

(при вычислении последнего интеграла мы воспользовались формулой Ньютона–Лейбница и тем, что $\varphi(x) \equiv 0$ при больших $x$). Согласно (30),

$$\theta'(x) = \delta(x).$$

Таким образом, в смысле теории обобщенных функций производная $\theta'$ функции Хевисайда равна дельта-функции, а не нулю.

Отметим в заключение, что подробное изложение теории обобщенных функций дано, например, в книгах [1, 2].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Гостехиздат, 1958. 439 с.

2. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 327 с.

3. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1955. 440 с.

4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1951. 659 с.

5. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.


* * *


Марко Иосифович Вишик, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, главный научный сотрудник Института проблем передачи информации РАН. Автор 242 научных работ и четырех монографий.