FUNCTIONAL MATHEMATICAL MODELS

V. A. BRUSIN

The definition and classification of functional mathematical models are given. The classification is based on dimension of the linear spaces, to which domains and images of the corresponding maps belong. Characteristic features of mathematical models of different classes are noted.

Даются определение и классификация функциональных математических моделей, в основу которой положены размерности линейных пространств, включающих области определения и образы соответствующих отображений. Отмечаются особенности математических моделей различных классов.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В. А. БРУСИН

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

1. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ

Общепринятым в курсе высшей математики является следующее определение понятия функции [1].

Определение 1. Пусть заданы два множества X и Y произвольной природы и подмножество D_X множества X: $D_X \subset X$. Говорят, что *на множестве X задана функция f (или отображение) с областью определения D_X*, если каждому элементу x множества D_X, $x \in D_X$, по некоторому закону f поставлен в соответствие некоторый элемент y множества Y, $y \in Y$. Это соответствие записывается в виде $y = f(x)$. При этом x называется *аргументом* или *независимой переменной функции*. Множество D_X называется *областью определения функции*. Множества X и Y будем называть *входными* и *выходными* множествами функции f.

Удобно использовать изображение функции в виде диаграммы

$$x \in D_X \subset X \xrightarrow{f} y \in Y.$$

Определение 2. *Образом функции f* будем называть множество всех ее значений. Образ является подмножеством R_Y выходного множества Y [1].

Возникает вопрос, почему в определении 1 вводятся в рассмотрение два множества: X и его подмножество D_X. Это будет использовано для классификации математических моделей. Как правило, в математических моделях множества X и Y являются линейными векторными пространствами (произвольной размерности).

Векторные пространства классифицируются по размерностям и обозначаются $\mathbf{R}^n$, где n – натуральное число, обозначающее размерность. Так, $\mathbf{R}^1$ – это числовая прямая, $\mathbf{R}^2$ – множество координат точек плоскости, $\mathbf{R}^3$ – множество координат точек пространства. Общее определение пространства $\mathbf{R}^n$ будет дано в конце этого раздела.

Пример 1. Функция $y = x^2$. Входным, выходным пространствами и областью определения является числовая прямая

$$X = Y = D_X = \mathbf{R}^1 = (-\infty, +\infty).$$

Образ R_Y состоит из всех неотрицательных чисел:

$$R_Y = \{y, y \geq 0\}.$$

Пример 2. Функция $y = \ln x$. $X = Y = R_Y = \mathbf{R}^1$, $D_X = \{x, x > 0\}$.

Пример 3. Функция $y = \mathrm{sign}\,x$. Эта функция определяется следующим соответствием $x \longrightarrow y$:

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $X = Y = D_X = \mathbf{R}^1$, а множество R_Y состоит из трех элементов – чисел –1, 0 и 1.

Важным понятием является понятие графика Γ_f функции f.

Определение 3. *Графиком* Γ_f функции $f: x \in D_X \subset \subset X \longrightarrow y \in D_Y \subset Y$ называется множество всевозможных пар (x, y) элементов $x \in D_X$ и $y \in D_Y$, таких, что $y = f(x)$.

Из определений 1 и 3 вытекает, что на множестве Γ_f не может быть двух пар (x_1, y_1) и (x_2, y_2), таких, что $x_1 = x_2$ но $y_1 \neq y_2$. Но на этом множестве могут быть пары, у которых $x_1 \neq x_2$, но $y_1 = y_2$.

Если на графике Γ_f данной функции не существует двух таких пар (x_1, y_1) и (x_2, y_2), у которых $x_1 \neq \neq x_2$, но $y_1 = y_2$, то такая функция называется взаимно однозначной. Если функция $y = f(x)$ взаимно однозначная, то у нее имеется обратная функция $x = = g(y)$. Входные и выходные пространства прямой и обратной функций меняются местами. Областью определения обратной функции D_Y является образ R_Y прямой функции, а образом обратной функции R_X – область определения D_X прямой.

Пример 4. Функция $y = x^2$ с областью определения $D_X = \mathbf{R}^1$ не является взаимно однозначной, ибо на ее графике (рис. 1) находятся разные при $x \neq 0$ пары вида (x, x^2), $(-x, x^2)$. Однако если область определения сузить, взяв в качестве D_X только неотрицательную часть числовой прямой $D_X = \{x, x \geq 0\}$, то такое новое соответствие будет взаимно однозначным. График этого нового соответствия будет состоять из правой половины параболы (включая и начало координат) (на рис. 1 это сплошная линия на параболе).

Пример 5. Функция $y = \ln x$ имеет обратную $x = = e^y$ с областью определения $D_Y = R^1$.

Пример 6. Функция $y = \mathrm{sign}\,x$ не имеет обратной.

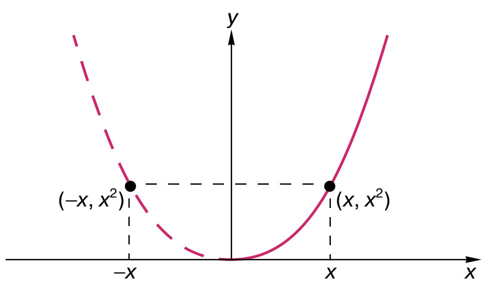

Рис. 1

Пример 7. Имеется бинарная жидкая смесь, находящаяся в равновесии с ее газообразной фазой. Концентрацию легколетучей компоненты в жидкости обозначим $C_ж$, а в газе – $C_г$. Известно, что значение $C_г$ однозначно определяется величиной $C_ж$: $C_г = = \varphi(C_ж)$.

График этой функции (рис. 2) называется кривой равновесия данной бинарной смеси. Областью определения и образом данной функции является отрезок [0, 1]. Функция является взаимно однозначной, что отражает тот факт, что разным состояниям жидкой фазы в равновесии соответствуют и разные состояния газообразной фазы.

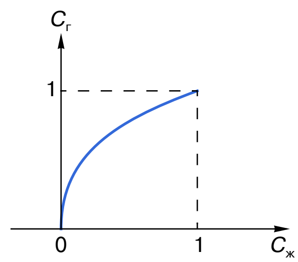

Рис. 2

В заключение раздела дадим определение пространства $\mathbf{R}^n$ [1, 3].

Определение 4. *n-мерным векторным пространством* $\mathbf{R}^n$ называется множество всевозможных упорядоченных n чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ с введенными на этом множестве операциями сложения и умножения на число. Каждый элемент x этого множества можно трактовать как вектор с координатами x_1, x_2, ..., x_n: x_1 – первая координата, x_2 – вторая и т.д.

Под суммой двух элементов x и y понимается элемент $z = x + y$, координаты которого равны сумме координат элементов x и y: $z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + + y_n)$. Если λ – произвольное число, то под элементом λx понимается $(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$. Элемент (0, 0, ..., 0) называется нулевым элементом пространства $\mathbf{R}^n$. В пространстве $\mathbf{R}^n$ можно ввести элементы геометрии, если его элементы принимать как векторы с соответствующими координатами. Так, длиной вектора $(x_1, x_2, ..., x_n)$ будет считаться число $|x_n|$, равное $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Расстояние между двумя элементами x и y, обозначаемое $\rho_n(x, y)$, будет определяться по формуле $\rho_n(x, y) = |x - y|_n$. Можно определить также косинус угла между элементами x и y по формуле (аналогичной известной формуле из векторной алгебры [2])

$$\cos(x, y) = \frac{\langle x, y\rangle_n}{|x|_n \cdot |y|_n},$$

где $\langle x, y\rangle_n = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ называется *скалярным произведением* элементов x и y. В пространстве $\mathbf{R}^n$ можно ввести и другие элементы геометрии.

Замечание. Введенное понятие "расстояние" между двумя элементами n-мерного пространства обладает двумя свойствами обычного двух- или трехмерного расстояния:

1) $\rho(x, y) \geq 0$: расстояние $\rho(x, y)$ равно нулю в том и только том случае, если два элемента совпадают: $\rho_n(x, y) = 0 \longleftrightarrow (x = y)$;

2) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ для любых трех элементов x, y, z. В двух- или трехмерном пространстве это неравенство сводится к известной теореме из геометрии о том, что сумму двух сторон любого треугольника не может превысить длина третьей стороны (причем равенство может быть только в случае вырожденного треугольника, когда все его вершины лежат на одной прямой). В высшей математике расстояние между двумя элементами может быть введено по любым другим формулам, лишь бы сохранялись свойства 1) и 2). Например, в качестве расстояния в $\mathbf{R}^n$ можно взять следующее выражение:

$$\rho_n(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|.$$

2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Большой класс функциональных математических моделей описывается функциями с отображением вида $x \in \mathbf{R}^n \longrightarrow y \in \mathbf{R}^m$. Будем считать, что числа n и m могут быть любыми натуральными числами. Однако в математике рассматриваются классы функций, где символы n и m принимают, условно говоря, значения ∞. Теорией таких бесконечномерных пространств и классов отображений занимается область математики, называемая функциональным анализом. (Расстояние в бесконечномерном пространстве вводится так, чтобы удовлетворялись изложенные выше свойства 1) и 2).) Числа n и m определяют классы функциональных математических моделей. Эти классы будем в дальнейшем называть классами $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$.

2.1. Примеры математических моделей класса $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^1$

Пример 1. Закон Ома. Согласно закону Ома, связь между силой тока i в проводнике с сопротивлением R и падением напряжения υ на его концах определяется формулой $\upsilon = Ri$. Функциональную зависимость $\upsilon \longrightarrow i = \upsilon/R$ можно считать простейшей математической моделью процесса протекания зарядов через проводник. (График этой зависимости называют вольт-амперной характеристикой проводника.) Заметим, что соответствие $\upsilon \longrightarrow i$ здесь идет от напряжения к току, отражая в определенном смысле и причинно-следственную связь явлений. Такое свойство функциональной зависимости является удобным, но не обязательным.

Итак, мы имеем простейшую математическую модель класса $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^1$. Теперь следует задаться вопросом, какова область определения данной функции. Принципиальным моментом здесь является принятие того факта, что область определения не может составлять всю числовую ось $\mathbf{R}^1$.

Закон Ома описывается линейной функцией. Графиком функции $i = \upsilon/R$ является прямая, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом [2], равным $1/R$. Однако абсолютно "линейных" проводников — проводников с постоянным сопротивлением R – в природе не существует. Только в определенном диапазоне токов это сопротивление можно считать равным значению R. Поэтому мы должны отметить факт, что зависимость $i = \upsilon/R$ справедлива лишь для определенного диапазона токов и, следовательно, напряжений: $\upsilon_0 \leq \upsilon \leq \upsilon_1$. Числовые же значения для границ υ_0, υ_1 применимости данной математической модели будут определяться ее точностью: чем выше должна быть точность описания процесса с помощью данной математической модели (в виде закона Ома с данным значением R), тем у́же будет диапазон напряжений, то есть меньше длина отрезка $[\upsilon_0, \upsilon_1]$.

Итак, математической моделью рассматриваемого процесса будет функция $\upsilon \in D_\upsilon \longrightarrow i = \upsilon/R \in R_i$, где

$$D_\upsilon = \{\upsilon, \upsilon_0 \leq \upsilon \leq \upsilon_1\}, \quad R_i = \left\{i, \frac{\upsilon_0}{R} \leq i \leq \frac{\upsilon_1}{R}\right\}.$$

Пример 2. Простейшая математическая модель вольтовой дуги. Примерами сильно "нелинейных" проводников являются электронные лампы, полупроводники, вольтова дуга [4]. В вольтовой дуге связь между силой тока i и напряжением υ описывается функцией $\upsilon = g(i)$. График этой зависимости качественно имеет вид, изображенный на рис. 3 [4]. Функция $g(i)$ класса $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^1$ с областью определения $D_i = (i, i \geq 0)$ может быть принята в качестве простейшей математической модели протекания зарядов через вольтову дугу. Отметим, что функция $g(i)$ не является взаимно однозначной и, следовательно, не имеет обратной функции, которая, как в

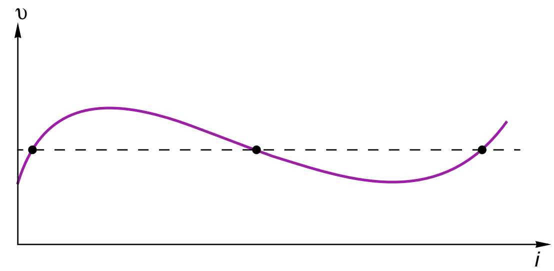

Рис. 3

предыдущем случае, значению υ ставила бы в соответствие силу тока i. Это математическое свойство отражает физическую особенность протекания зарядов через вольтову дугу. (Такая особенность существует также у характеристик электронных ламп и полупроводников.)

2.2. Примеры математических моделей классов $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^3$

Пример 3. Циклоида. *Циклоидой* [5] называется кривая в плоскости с введенными на ней прямоугольными координатами (x, y), которую описывает точка, находящаяся на окружности радиуса R, при ее качении вдоль оси абсцисс из $-\infty$ в $+\infty$ (начало координат выбрано в одном из нижних положений точки на “ободе” колеса) (рис. 4).

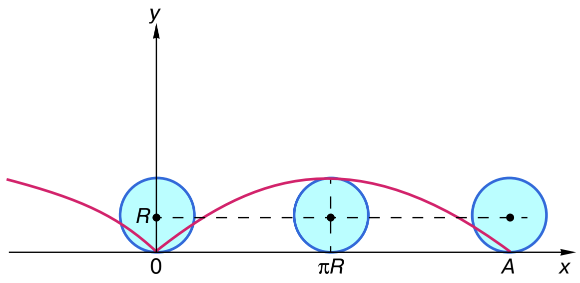

Рис. 4

Пусть окружность катится равномерно, делая один оборот за время 2π. Обозначим: t – время движения, отсчитываемое от того момента, когда отмеченная точка находилась в начале координат. (Значениям $t > 0$ будут соответствовать будущие положения точки, а значит, $t < 0$ – прошлые.) Тогда уравнение циклоиды запишется в виде [5]

$$\begin{aligned} x &= R(t - \sin t), \\ y &= R(1 - \cos t), \end{aligned} \qquad -\infty < t < +\infty. \qquad (2,1)$$

Уравнения (2,1) описывают функцию $t \in \mathbf{R}^1 \longrightarrow (x, y) \in \mathbf{R}^2$ с областью определения $D_t = \mathbf{R}^1$. Образом этой функции $R_{(x,\,y)}$ является бесконечная в обе стороны кривая, которая называется *циклоидой.* Если область определения ограничить множеством $D_t^1 = \{t, 0 \le t \le 2\pi\}$, то мы получим в качестве образа только часть циклоиды – ее “арку” от точки O до A (рис. 4). Образ данной функции имеет простую физическую интерпретацию – это траектория движения точки на окружности. Характер же движения описывается самой функцией $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ вида (2,2).

Замечание. Циклоида является графиком функции класса $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^1$, получающейся из (2,1) исключением t. Очевидно, что в явном виде $(y = f(x))$ уравнение этой функции записать не удастся.

Пример 4. *Винтовой линией* называется кривая в пространстве с координатами (x, y, z), описываемая уравнениями [5]

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \qquad -\infty < t < +\infty \\ z = \dfrac{1}{2\pi} h t, \end{cases} \qquad (2,2)$$

(величина h называется шагом винта). Эта кривая лежит на прямом круговом цилиндре радиуса R, уравнение которого $x^2 + y^2 = R^2$. Уравнения (2,2) определяют функцию $t \in \mathbf{R}^1 \longrightarrow (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Образом этой функции и будет винтовая линия. Если предположить, что величины (x, y, z), считываемые по формулам (2,3), являются координатами движущейся в пространстве точки, а величина t – это момент времени (отсчитываемый от некоторого условного начала отсчета времени), то уравнения (2,3) будут определять винтообразное движение точки по цилиндру.

Отметим одну общую особенность математических моделей класса $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, проявляющуюся в рассмотренных примерах. Такие модели возникают как описания движения точек на плоскости или в пространстве. При этом аргументы этих функций имеют смысл временных промежутков, а значения функций – текущих координат движущейся точки. Образы этих функций представляют собой траектории, описываемые точкой при ее движении.

2.3. Математические модели классов $\mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^m$, $m > 3$

Предположим, что движущаяся в пространстве точка с координатами (x, y, z) наделена дополнительным параметром, например температурой Θ. Тогда она не будет материальной точкой в том понимании, которое принято в теоретической механике. Однако ее можно рассматривать как элементарный объем, заполненный массой, положение которого описывается тремя координатами его центра масс, а Θ – его средняя температура. В этом случае, если заданы четыре уравнения, по которым можно сосчитать текущие значения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\Theta(t)$ в зависимости от времени t, эти уравнения составят математическую модель класса $t \longrightarrow \mathbf{R}^4$.

2.4. Математические модели классов $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Поверхности

Предположим, что требуется выточить на токарном станке с программным управлением некоторую поверхность. Для этого необходимо составить программу движения режущего инструмента. Для составления такой программы, в свою очередь, необходимо иметь уравнения этой поверхности, то есть ее математическую модель.

Предположим, что резец станка может передвигаться относительно заготовки в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Введем оси координат, направив их по указанным направлениям, при этом ось OZ будет перпендикулярна горизонтальной плоскости, в которой лежат оси OX и OY. Предположим также, что диапазон движений резца в горизонтальной плоскости ограничен и выражается в данной системе координат неравенствами

$$x_0 \le x \le x_1,\; y_0 \le y \le y_1. \qquad (2,3)$$

Тогда, чтобы задать уравнение поверхности, нужно задать функцию

$$z = f(x, y) \qquad (2,4)$$

класса $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^1$ с областью определения $D_{(x,\,y)}$, определяемой неравенствами (2,3).

Будем давать различные значения координатам (x, y), но так, чтобы пройти (с заданной точностью) весь прямоугольник (2,3) (это можно делать по закону движения луча в телевизионной трубке или другому закону). При каждом таком значении (x, y) резец будем поднимать или опускать на высоту z, сосчитанную по формуле (2,4). При этом с соответствующей степенью точности будет вытачиваться нужный профиль.

Однако не все поверхности могут быть описаны уравнениями вида (2,4). Так могут быть описаны, например, эллиптические параболоиды: $z = Ax^2 + Cy^2 + D$ $(AC > 0)$, седловые поверхности (гиперболические параболоиды) – то же уравнение, но $AC < 0$ [2] и многие другие. Но нельзя уравнениями (2,4) описать сферу или тороидальную поверхность. Так, сфера может быть описана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (если начало координат поместить в ее центр). Выражая z из этого уравнения, получим

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \qquad (2,5)$$

Уравнение (2,5) со знаком плюс будет отвечать верхней полусфере, а со знаком минус – нижней. Обе эти полусферы склеиваются по окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в горизонтальной плоскости $z = 0$.

Таким образом, сферу можно разбить на два куска, каждый из которых может быть описан уравнениями (2,5) вида (2,4), то есть функциями класса $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^1$. Областью определения обеих этих функций (2,5) будет круг $\{(x, y), x^2 + y^2 \le R^2\}$.

2.5. Математические модели классов $\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Скалярные и векторные поля в пространстве

Пусть в некоторой области D пространства $\mathbf{R}^3$ с введенными там координатами (x, y, z) задано скалярное поле, то есть в каждой точке этой области определена скалярная величина (давление, потенциал, температура...), не меняющаяся во времени. В этом случае можно считать, что в области D определена функция $\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^1$, являющаяся математической моделью данной стационарной физической среды.

Предположим теперь, что в области D задано векторное поле, то есть в каждой точке (x, y, z) этой области определен трехмерный вектор $\mathbf{f}$. Это может быть вектор силы, скорости течения и т.п. Обозначим: f_1, f_2, f_3 – координаты этого вектора. Тогда векторное поле можно трактовать как функцию $\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, которая каждой точке $(x, y, z) \in D$ ставит в соответствие тройку чисел (f_1, f_2, f_3).

3. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В современной математике и теории систем используются математические модели классов $\mathbf{R}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}^\infty$, являющиеся обобщением математических моделей рассмотренных ранее типов. Такие функции называют *операторами*. (Функции класса $\mathbf{R}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}^1$ называют *функционалами*.) Если $\mathbf{R}^n$ – это пространство n-мерных векторов или конечных последовательностей $(x_1, x_2, ..., x_n)$, то бесконечномерные пространства следует трактовать как пространства бесконечномерных векторов. Но что такое бесконечномерный вектор? В простейшем варианте это либо бесконечная последовательность чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ и ее член x_n – это n-я координата или это числовая функция $f(\bullet)$, отображающая некоторый числовой интервал или отрезок $T \in \mathbf{R}^1$ в прямую $\mathbf{R}^1$, при этом для конкретного аргумента $t \in T$ значение $f(t)$ можно считать "t-й координатой вектора $\mathbf{f}(\bullet)$". Однако, для того чтобы бесконечная числовая последовательность или числовая функция стали элементами векторных пространств бесконечной размерности, нужно определить для них такие элементы геометрии, как длина и расстояние. Это можно сделать различными способами [3].

Например, для последовательности $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ понятие длины $|x|$ может быть введено по формуле

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + ...} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2},$$

а расстояние $\rho(x, y)$ – по формуле $\rho(x, y) = |x - y|$. Такое определение длины будет обобщением понятия евклидова расстояния.

Бесконечное векторное пространство числовых последовательностей с таким понятием расстояния и длины обозначают пространством l_2 [3]. Очевидно, что бесконечная последовательность будет являться элементом пространства l_2 только в том случае, если ряд из квадратов его координат имеет конечную сумму. Аналогом пространства l_2 для числовых функций служит функциональное пространство $L_2(0, \infty)$. Элементами этого пространства служат функции $f(t)$ с областью определения $[0, \infty)$, для которых несобственный интеграл $\int_0^\infty f^2(t)dt$ имеет конечное значение [1]. Этот интеграл и определяет квадрат длины данного вектора.

В теории систем [6, 7] особое место занимают функции-операторы $\mathbf{R}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}^\infty$, отображающие бесконечные последовательности в бесконечные последовательности по закону

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} g_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, ..., \qquad (3,1)$$

где g_{ij} — заданные числа. При этом индексы у координат векторов x и y часто трактуются как моменты времени. Такая функция-оператор является как бы преобразователем последовательности $x = (x_1, x_2, ...$ $..., x_n, ...)$ в последовательность $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)$, работающим в определенные такты времени. Аналогичной функцией-оператором $\mathbf{R}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}^\infty$, преобразующим функциональные элементы $\{f(t), t \geq 0\}$ в функциональные элементы $\{g(t),\ t \geq 0\}$ будет функция, генерирующая функциональные элементы по закону

$$y(t) = \int_0^\infty g(t, \tau) x(\tau) d\tau, \qquad (3,2)$$

где $g(t, \tau)$ — заданная функция, называемая *ядром* данного оператора. При этом аргументы у бесконечных векторов x и y трактуются как моменты времени, а сам оператор — как преобразователь сигналов в непрерывном времени. Но для того чтобы функции-операторы действительно могли описывать реальные преобразователи сигналов, необходимо, чтобы они обладали свойством причинности, другими словами, были динамическими операторами. Это означает, что значение сигнала y в конкретный момент времени формируется без использования будущих моментов. Для приведенных выше операторов это свойство будет иметь место, если $g_{ij} = 0$ при $i < j$ для (3,1), $g(t, \tau) = 0$ при $t < \tau$ для (3,2).

Свойство взаимной однозначности для таких функций-операторов переходит в свойство идентифицируемости [6], когда по генерируемому процессу y можно однозначно восстановить исходный процесс x. Естественно, что это не всегда возможно. Свойство идентифицируемости оказывается важным в таких приложениях, как теория управления, теория кодирования, распознавание образов и диагностика [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугров Я.С.*, *Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980. 432 с.

2. *Бугров Я.С.*, *Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980. 175 с.

3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: ГИФМЛ, 1959. Т. 5. 655 с.

4. *Андронов А.А.*, *Витт А.А.*, *Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 915 с.

5. *Бермант А.Ф.*, *Араманович И.С.* Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1971. 735 с.

6. *Калман Р.*, *Фалб П.*, *Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

7. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 487 с.

* * *

Владимир Александрович Брусин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета, член-корреспондент РАЕН. Область научных интересов – математические проблемы теории устойчивости и теории управления. Автор более 150 научных статей и учебного пособия.