ROTATION OF PLANAR VECTOR FIELD

A. D. MYSHKIS

The notion of rotation of planar vector field and connected with it notion of index of a singular point of such field form a basis of a series of recent qualitative methods of mathematical analysis. Some of their applications in algebra, fixpoint theory and theory of differential equations are shown.

Понятие вращения плоского векторного поля и связанное с ним понятие индекса особой точки такого поля лежат в основе некоторых современных качественных методов математического анализа. В статье показаны применения этих понятий в алгебре, теории неподвижных точек и теории дифференциальных уравнений.

ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

А. Д. МЫШКИС

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

1. КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Разницу между аналитическими и качественными методами в математике легко понять на простом примере. Пусть мы хотим выяснить, сколько корней имеет уравнение

$$x^2 + x - 1 = 0 \qquad (1,1)$$

на интервале [0, 1].

Первый метод. Согласно формуле для корней квадратного уравнения, уравнение (1,1) имеет два решения: $x_{1,\,2} = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Из них на отрезке [0, 1] лежит только одно: $(-1 + \sqrt{5})/\approx 0{,}618$.

Второй метод. Обозначив левую часть уравнения (1,1) через $f(x)$, получаем, что $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, поэтому непрерывная функция f должна на интервале [0, 1] обратиться в нуль по крайней мере один раз. Но эта функция на данном интервале возрастающая, поэтому такой нуль может быть только один.

Второе рассуждение не связано с точными аналитическими формулами. Оно по существу использует наглядное соображение: если точка плоскости, непрерывно перемещаясь вверх, переходит с одной стороны горизонтальной оси на другую, то эта точка пересекает ось ровно один раз. Подобные методы доказательства, не основанные на анализе точных количественных формул, называются *качественными*. По сравнению с аналитическими методами они существенно менее пригодны для отыскания численных значений величин, но зато часто имеют гораздо более широкую область применения. Так, если в уравнении (1,1) заменить x^2 на x^5, то окажется, что формула для точного решения отсутствует, тогда как второе рассуждение сохраняется без изменения.

На первых порах идеология математического анализа была сугубо аналитической, и крупнейшим представителем этого направления был один из величайших математиков – Леонард Эйлер (1707–1783). В XIX веке стали постепенно возникать качественные методы математического анализа, отчетливо осознанные в трудах великих математиков А. Пуанкаре (1854–1912), А.М. Ляпунова (1857–1918), Д. Биркгофа (1884–1944) и др. Выдающийся вклад в развитие современных качественных методов нелинейного (то есть изучающего нелинейные дифференциальные, интегральные и другие уравнения) математического анализа принадлежит М.А. Красносельскому (1920–1997).

Сейчас качественные методы математического анализа активно развиваются и успешно применяются в сочетании с аналитическими и численными методами.

Теория вращения векторных полей лежит в основе некоторых современных качественных методов нелинейного математического анализа. Многие идеи этой теории настолько прозрачны, что доступны даже любознательному школьнику. Мы приведем некоторые понятия и идеи, относящиеся к вращению векторных полей на плоскости. Изложение будет проводиться на наглядном уровне, достаточном для уяснения этих идей. Более подробное обоснование, а также многочисленные менее элементарные результаты и приложения читатель может найти в специальной литературе, из которой я отмечу лишь книги [1, 2]. В частности, в книге [2] теория вращения векторного поля распространяется на пространство любой конечной размерности.

2. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ

Пусть задано *плоское векторное поле* $\mathbf{A}$, то есть в каждой точке M плоскости (или некоторой ее части) определен вектор $\mathbf{A}(M)$, также лежащий в этой плоскости. Такое поле проще всего представлять себе как поле скоростей частиц газа или жидкости при стационарном течении в узком слое, но оно может иметь и другой физический смысл (гравитационное поле, электрическое поле и т.д.).

Будем считать, что вектор $\mathbf{A}(M)$ непрерывно зависит от точки M, за исключением, быть может, отдельных точек, в которых поле может быть и не определено. Точка M, в которой поле не определено, или теряет непрерывность, или равно нуль-вектору (и тем самым направление поля в ней не определено), называется *особой точкой* этого поля. Будем считать, что таких точек имеется лишь конечное число.

Векторные линии поля $\mathbf{A}$ – это линии, которые в каждой своей точке M идут по направлению поля, то есть касаются вектора $\mathbf{A}(M)$. Для поля скоростей при стационарном течении газа это траектории частиц газа, для силового поля это силовые линии. При некоторых разумных предположениях можно доказать, что через каждую неособую точку проходит ровно одна векторная линия. Направление векторов поля определяет также ориентацию векторных линий, которая обозначается стрелкой.

Вблизи неособой точки M_0 векторные линии напоминают слегка искривленную совокупность параллельных, одинаково направленных отрезков (рис. 1). В окрестности особой точки M_0 картина векторных линий может быть весьма разнообразной. Так, основные примеры, появляющиеся в гидродинамике, показаны на рис. 2. Из законов движения

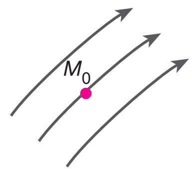

Рис. 1. Окрестность неособой точки

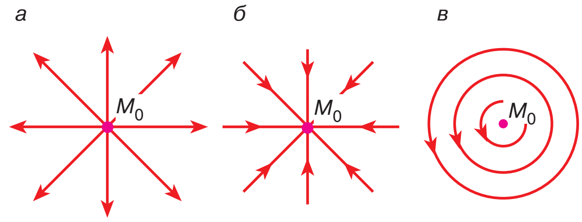

Рис. 2. Примеры окрестностей особых точек: *а* – источник, *б* – сток, *в* – вихревая точка

жидкости вытекает, что в этих примерах $|\mathbf{A}(M)| \longrightarrow \infty$ при $M \longrightarrow M_0$.

Векторные линии можно найти с помощью решения дифференциального уравнения, введя на плоскости систему координат. Например, если применяются декартовы координаты x, y, то, обозначив координаты точки M через x, y, а проекции вектора $\mathbf{A}(M)$ через $P(x, y)$, $Q(x, y)$, получаем дифференциальное уравнение векторных линий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

В математике обычно плоское векторное поле трактуют как поле скоростей точек на плоскости. Тогда движение этих точек определяется системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y), \tag{2,1}$$

где точка над буквой означает производную по времени t. Обратно, пусть мы исходим из системы (2,1); такая система, для которой в правые части не входит независимая переменная t, называется *автономной*. Тогда независимо от смысла величин x, y мы можем трактовать их как координаты точек на плоскости (в этом случае она называется *фазовой плоскостью*), а решения – как законы движения этих точек; при этом траектории точек являются векторными линиями поля $\mathbf{A} = (P, Q)$. Если функции P и Q непрерывные, то особыми точками поля являются точки (x_0, y_0), в которых $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$; им отвечают решения вида $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, и поэтому они называются *точками покоя* для системы (2,1). Наиболее распространенные типы поведения траекторий вблизи точки покоя M_0 показаны на рис. 3. Отметим, что траектории на рис. 3, *а*, отличные от точки покоя M_0 (точка покоя тоже траектория), не

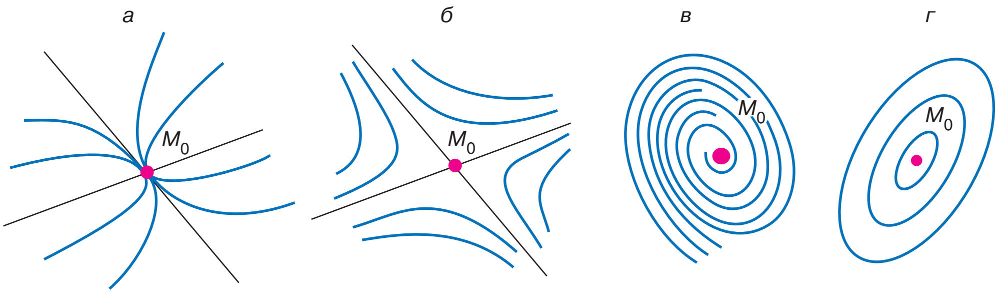

Рис. 3. Примеры окрестностей точек покоя: *а* – узел, *б* – седло, *в* – фокус, *г* – центр

проходят через нее, а асимптотически приближаются к M_0 при $t \longrightarrow \infty$ или $t \longrightarrow -\infty$. То же относится к траекториям на рис. 3, *в* и к четырем траекториям на рис. 3, *б*.

3. ВРАЩЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть задано плоское векторное поле **A** и дана ориентированная (то есть указано, в каком направлении она проходится) конечная линия L, не проходящая через особые точки поля. Тогда *вращением поля* **A** *вдоль линии* L называется деленный на 2π угол, на который поворачивается вектор $\mathbf{A}(M)$, когда точка M проходит линию L в соответствии с ее ориентацией. При этом поворот против часовой стрелки считается положительным, а по ней – отрицательным. Если же вектор вращается то в одну, то в другую сторону, то соответствующие углы поворота суммируются с их знаками (как если бы речь шла о заводе спиральной пружины). Будем обозначать вращение поля **A** вдоль линии L через $\gamma(L; \mathbf{A})$ или просто $\gamma(L)$, если ясно, о каком поле идет речь.

(Отметим еще, что общепринятый термин “вращение векторного поля” не совсем удачен: конечно, само поле **A** не вращается, вращается вектор $\mathbf{A}(M)$, когда точка M движется.)

Приведем некоторые свойства вращения с краткими пояснениями.

1. *При изменении ориентации линии L на противоположную значение $\gamma(L; \mathbf{A})$ умножается на* -1.

2. *Если линия L разбита на несколько частей, ориентированных в соответствии с ориентацией L, то вращение поля вдоль L равно сумме его вращений вдоль всех частей.*

3. *Если линия L замкнутая, то $\gamma(L; \mathbf{A})$ – целое число, не зависящее от того, какая точка на L была принята за начальную.*

4. *Если замкнутая линия L непрерывно деформируется так, что в любой момент процесса деформации она не проходит через особые точки поля, то вращение поля вдоль деформируемой линии остается неизменным.*

Действительно, в той части плоскости, которую покрывает рассматриваемая линия в процессе деформации, направление вектора $\mathbf{A}(M)$ непрерывно зависит от точки M. Поэтому если бы вращение поля вдоль линии менялось в процессе ее деформации, то это изменение было бы непрерывным. Но величина, меняющаяся непрерывно и принимающая только целочисленные значения (см. свойство 3), должна оставаться постоянной.

5. *Если на замкнутой линии L и внутри нее нет особых точек поля* **A**, *то* $\gamma(L; \mathbf{A}) = 0$.

В самом деле, выберем какую-либо точку M_0 внутри линии L. Тогда эту линию можно путем непрерывной деформации стянуть к M_0, причем так, чтобы в каждый момент деформируемая линия не выходила за пределы области, ограниченной линией L. В силу свойства 4 в процессе деформации вращение поля вдоль линии остается неизменным. Но когда деформируемая линия окажется в достаточно малой окрестности неособой точки M_0, то вектор поля не может сделать полный оборот, и потому вращение, будучи целым числом, равно нулю.

4. ИНДЕКС ОСОБОЙ ТОЧКИ. ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ

Пусть M_0 – особая точка поля **A**. Так как по предположению раздела 2 особых точек имеется лишь конечное число, то в некоторой окрестности точки M_0 других особых точек поля **A** нет. Выберем какую-либо замкнутую линию L, внутри которой из особых точек содержится только M_0, например в качестве L можно взять окружность с центром в M_0 и с достаточно малым радиусом. Ориентируем L в положительном направлении и рассмотрим вращение $\gamma(L; \mathbf{A})$ поля **A** вдоль линии L. Из свойства 4 вращения следует, что это вращение не зависит от конкретного выбора линии L, так как ясно (и может быть доказано строго), что любые две такие линии можно непрерывно продеформировать одну в другую, не переходя через особые точки в процессе деформации.

Таким образом, указанное вращение зависит только от поля **A** и выбора особой точки M_0. Это вращение называется *индексом особой точки* M_0 поля **A**. Мы будем обозначать его $\gamma(M_0; \mathbf{A})$ или просто $\gamma(M_0)$, если ясно, какое поле рассматривается.

В силу свойства 3 $\gamma(M_0; \mathbf{A})$ – целое число. Нетрудно проверить, что для всех особых точек, показанных на рис. 2 и 3, индекс равен 1, за исключением рис. 3, *б* (седло), где индекс равен –1. В качестве упражнения предлагаем читателю с помощью картинки векторных линий показать, что индекс особой точки более сложного вида может равняться любому наперед заданному целому числу.

Пусть теперь на замкнутой линии L, ориентированной в положительном направлении, нет особых точек поля **A**, а внутри нее имеются особые точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Тогда

$$\gamma(L; \mathbf{A}) = \gamma(M_1; \mathbf{A}) + \gamma(M_2; \mathbf{A}) + \ldots + \gamma(M_k; \mathbf{A}). \quad (4,1)$$

Это важное утверждение называется *теоремой Пуанкаре об индексах* векторного поля. Его доказательство для $k = 3$ показано на рис. 4:

$$\gamma(M_1) + \gamma(M_2) + \gamma(M_3) =$$
$$= \gamma(ABCA) + \gamma(ACDA) + \gamma(ADBA) =$$
$$= [\gamma(AB) + \gamma(BC) + \gamma(CA)] + [\gamma(AC) + \gamma(CD) +$$
$$+ \gamma(DA)] + [\gamma(AD) + \gamma(DB) + \gamma(BA)] =$$
$$= \gamma(AB) + \gamma(BC) - \gamma(AC) + \gamma(AC) + \gamma(CD) - \gamma(AD) +$$
$$+ \gamma(AD) + \gamma(DB) - \gamma(AB) = \gamma(BCDB) = \gamma(L);$$

в общем случае доказательство аналогичное.

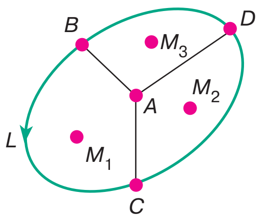

Рис. 4. Доказательство формулы (4,1)

Свойство 5 вращения можно считать частным случаем формулы (4,1): если $k = 0$ (особых точек внутри L нет), то правая часть этой формулы равна нулю.

Дальнейший текст посвящен разнообразным приложениям формулы (4,1).

5. ТЕОРЕМА О НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНА. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

Пусть на комплексной плоскости z (или на некоторой ее части) задана функция $z \longmapsto f(z)$, принимающая комплексные значения и непрерывная, за исключением, быть может, конечного числа точек. Как известно, комплексное число можно изображать не только в виде точки, но и в виде вектора. Поэтому, если каждой точке z поставить в соответствие вектор $f(z)$, получаем плоское векторное поле; будем писать: поле f. Особые точки поля f – это точки z_0, в которых либо функция f не определена, либо она теряет непрерывность, либо $f(z_0) = 0$.

Пусть $f(z)$ – многочлен степени n, то есть $f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$, где все a_j – комплексные числа, причем $a_0 \neq 0$. Как известно, значение $z = z_0$ называется *нулем кратности* k, $k = 1, 2, \ldots, n$, этого многочлена, если многочлен можно представить в виде $f(z) = (z - z_0)^k f_1(z)$, где $f_1(z)$ – многочлен степени $n - k$, причем $f_1(z_0) \neq 0$. Если z обходит вокруг точки z_0, то есть

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad \rho = \mathrm{const} > 0,$$

то $(z - z_0)^k = \rho^k e^{ik\varphi}$, то есть вектор $(z - z_0)^k$ совершает k полных оборотов в положительном направлении. Если $\rho = |z - z_0|$ достаточно мaлó, то множитель $f_1(z)$, как угодно близкий к $f_1(z_0)$, не может повлиять на их число. Таким образом, индекс $\gamma(z_0; f)$ равен k, то есть кратности корня z_0 многочлена $f(z)$.

Представим теперь $f(z)$ в виде

$$f(z) = z^n(a_0 + a_1z^{-1} + \ldots + a_nz^{-n}).$$

Из этого представления видно, что если в качестве L взять окружность $|z| = R$ с достаточно большим R, то все нули многочлена $f(z)$ лежат внутри L. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем, что $\gamma(L; f) = n$. Но особыми точками поля f, где f – многочлен, могут быть только его нули. Значит, если $z_1, \ldots, z_j$ – все нули многочлена f (нетрудно доказать, что их может быть лишь конечное число) с кратностями $k_1, \ldots, k_j$, то

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_j = n.$$

Итак, *у многочлена степени n имеется ровно n комплексных нулей, если каждый нуль считать со своей кратностью* (то есть рассматривать нуль кратности k как k нулей, совпавших друг с другом). Когда-то это утверждение называли *основной теоремой алгебры*.

Для читателя, знакомого с понятием полюса аналитической функции, отметим, что доказанное утверждение является частным случаем следующего более общего, имеющего название *принцип аргумента*:

Пусть функция $z \longmapsto f(z)$ является аналитической на замкнутой линии L и всюду внутри нее, кроме, быть может, конечного числа полюсов, причем $f(z) \neq 0$ на L. Тогда $\gamma(L; f) = N - P$, где N и P – общее число нулей и соответственно полюсов, расположенных внутри L, причем все они берутся со своей кратностью.

Эта формула также непосредственно следует из теоремы Пуанкаре, если заметить, что аналитическую функцию f в окрестности ее нуля z_0 кратности k можно представить в виде $(z - z_0)^k f_1(z)$, а в окрестности полюса z_0 кратности k – в виде $(z - z_0)^{-k}f_1(z)$, причем в обоих случаях функция f_1 аналитическая, включая $z = z_0$, а $f_1(z_0) \neq 0$.

6. ТЕОРЕМА БОЛЯ–БРАУЭРА

При непрерывном отображении круга в себя по крайней мере одна точка переходит в себя (то есть остается неподвижной).

В самом деле, пусть каждой точке M круга K отвечает точка $f(M)$ этого же круга, причем отображение f непрерывное. Поставив в соответствие каждой такой точке M вектор $\mathbf{A}(M)$ с началом в M и концом в $f(M)$, получим на K непрерывное векторное поле $\mathbf{A}$. Особыми точками этого поля служат точки, для которых $\mathbf{A}(M) = \mathbf{0}$, то есть точки, переходящие в себя. Если таких точек на границе L круга K нет, то наглядно ясно, что, когда точка M обойдет L, вектор $\mathbf{A}(M)$, направленный все время внутрь K, совершит один оборот в том же направлении, то есть $\gamma(L; \mathbf{A}) = 1$. Отсюда в силу свойства 5 вращения вытекает наличие особой точки поля $\mathbf{A}$, то есть наше утверждение доказано.

Из доказанного утверждения следует, что оно справедливо и для любой фигуры Φ, топологически эквивалентной кругу K, то есть для которой существует взаимно однозначное отображение g круга K на Φ, причем как g, так и обратное отображение g^{-1} непрерывны. В самом деле, если дано непрерывное отображение f такой фигуры Φ в себя, то соотношение $M \longmapsto g^{-1}(f(g(M)))$ определяет непрерывное отображение круга K в себя. Значит, по доказанному выше существует точка M_0 в K, для которой $g^{-1}(f(g(M_0))) = M_0$. Но тогда $f(g(M_0)) = g(M_0)$, то есть для точки $M_1 = g(M_0)$ фигуры Φ справедливо соотношение $f(M_1) = M_1$.

Можно указать многие фигуры, топологически эквивалентные кругу. Например, таковыми являются все ограниченные выпуклые фигуры на плоскости (граница фигуры в нее включается), не вырождающиеся в отрезок или точку. Но имеются и плоские фигуры, неэквивалентные в этом смысле кругу, например кольцо. Для таких фигур “с отверстиями” приведенное утверждение о неподвижной точке неверно.

Доказанная теорема справедлива и для тел, топологически эквивалентных n-мерному шару, для любой конечной размерности n. В этом состоит фундаментальная теорема Боля–Брауэра, лежащая в основе многих качественных методов математического анализа.

7. ТЕОРЕМА О ЕЖЕ

Векторное поле $\mathbf{A}$ можно определить не только на плоскости, но и на любой гладкой поверхности, в частности на сфере S. При этом каждой точке M сферы должен соответствовать вектор $\mathbf{A}(M)$, касательный к S. Понятия векторных линий и особых точек для таких полей вводятся так же, как на плоскости.

Интересным фактом является следующая теорема: *на сфере не существует векторного поля без особых точек.* Ее иногда называют теоремой о невозможности причесать ежа, как бы истолковывая векторы поля на сфере как иглы у свернувшегося в клубок ежа.

Эту теорему можно получить из частного случая теоремы Пуанкаре, охватываемого свойством 5 вращения (см. раздел 3), с помощью следующего наглядного рассуждения. Будем считать, что направления векторов поля показывают маленькие стрелки, нарисованные на прозрачной сфере. Пусть M_0 – какая-либо неособая точка заданного поля $\mathbf{A}$ на сфере S. Проделаем в S около M_0 маленькое отверстие Q, тогда на границе L этого отверстия векторы поля почти параллельны (на рис. 5, *а* отверстие увеличено). Растягивая теперь границу отверстия, вывернем с помощью непрерывной деформации

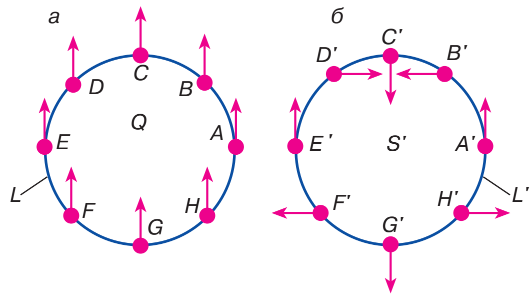

Рис. 5. Сфера с отверстием до (*а*) и после (*б*) разворачивания

сферу с отверстием наизнанку так, что она превратится в круг S', а линия L перейдет в его границу L'. При этой деформации векторы поля как бы приклеены к поверхности, а особые точки все время остаются особыми, и их индексы и вообще структура их окрестностей не меняются. Направления векторов, изображенные на рис. 5, *а*, после описанной деформации показаны на рис. 5, *б*. Проследив на этом рисунке за направлением поля на L', видим, что вращение деформированного поля вдоль L' равно 2. Значит, особые точки поля должны существовать. Более того, если это точки типов, показанных на рис. 2 и 3, то этих точек должно быть не менее двух.

Мы предоставляем читателю доказать такое следствие из теоремы о еже: *если сфера непрерывно отображена в себя, то при этом отображении по крайней мере одна точка перейдет либо в себя, либо в диаметрально противоположную точку.*

Любопытно, что на сфере с k ручками (приделанными как у гири) непрерывное векторное поле без особых точек невозможно, если $k \geq 2$, и возможно, если $k = 1$.

8. ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ–БЕНДИКСОНА. БИФУРКАЦИИ

Будем считать, что векторное поле на плоскости задается с помощью системы дифференциальных уравнений (2,1), как это описано в разделе 2, с непрерывно дифференцируемыми функциями P и Q. Тогда через каждую точку плоскости проходит ровно одна траектория этой системы: либо разомкнутая линия, либо замкнутая (цикл), либо точка покоя – особая точка поля. Теорема Пуанкаре–Бендиксона утверждает, что *внутри каждого цикла имеется по крайней мере одна точка покоя.*

В самом деле, вдоль любой траектории, не являющейся точкой покоя, вектор поля $\mathbf{A} = (P, Q)$ направлен по касательной. Обозначим буквой L какой-либо цикл, проходимый в положительном направлении (независимо от направления движения по траекториям, определяемым системой (2,1)). Тогда если точка M пройдет L, то вектор поля $\mathbf{A}(M)$ совершит один оборот в том же направлении, то есть $\gamma(L; \mathbf{A}) = 1$. Поэтому приведенное утверждение сразу следует из свойства 5 вращения.

Формула (4,1) в некоторых случаях дает возможность получить более конкретное утверждение. Например, если система (2,1) имеет точки покоя только типов, показанных на рис. 3, то внутри замкнутой траектории число седел на единицу меньше общего числа точек покоя остальных типов.

Допустим теперь, что правые части системы (2,1) непрерывно зависят от некоторого параметра λ. При изменении λ поле $\mathbf{A}_\lambda = (P_\lambda, Q_\lambda)$ меняется и могут существовать такие значения $\lambda = \tilde{\lambda}$, при переходе через которые поле меняется не только количественно, но и качественно, принципиально. Мы не будем давать здесь точное определение такого изменения в общем случае, а разберем пример.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^2 + y^2 - \lambda(y + 1). \end{aligned} \qquad (8,1)$$

Можно проверить, что при $0 < \lambda < 4$ совокупность ее траекторий имеет вид, примерно показанный на рис. 6, *а*, то есть здесь имеются две точки покоя: $M_1(-\lambda^{1/2}, 0)$ типа фокус и $M_2(\lambda^{1/2}, 0)$ типа седло. При уменьшении λ они сближаются и при $\lambda = 0$ совпадают с началом координат (рис. 6, *б*), а когда λ становится отрицательным, они пропадают (рис. 6, *в*). Таким образом, при переходе λ через значение $\lambda = 0$ происходит качественное изменение векторного поля. В общем случае качественное изменение объекта, зависящего от параметра, при переходе этого параметра через некоторое значение называется *бифуркацией* данного объекта.

Итак, при $\lambda = 0$ векторное поле, определенное системой уравнений (8,1), испытывает бифуркацию.

При обратном изменении λ, то есть при его возрастании, бифуркация поля (8,1) при $\lambda = 0$ состоит в том, что при этом значении возникает особая точка, которая затем сразу же расщепляется на две: фокус и седло.

Несложно построить аналогичные примеры, в которых "из ничего" возникает особая точка, расщепляющаяся на узел и седло или на центр и седло (см. рис. 3). Какую роль здесь играет седло? Может ли возникнуть только одна особая точка из указанных на рис. 3 (мы упоминали, что именно эти особые точки типичны для полей, определенных системами вида (2,1))? Могут ли возникнуть два узла или два седла?

Ответ на эти вопросы дает теорема Пуанкаре (4,1). Допустим, что при $\lambda < 0$ поле $\mathbf{A}_\lambda$ особых точек не имеет, а при $\lambda = 0$ в начале координат возникает особая точка, которая при возрастании λ как-то непрерывно эволюционирует, быть может расщепляясь на

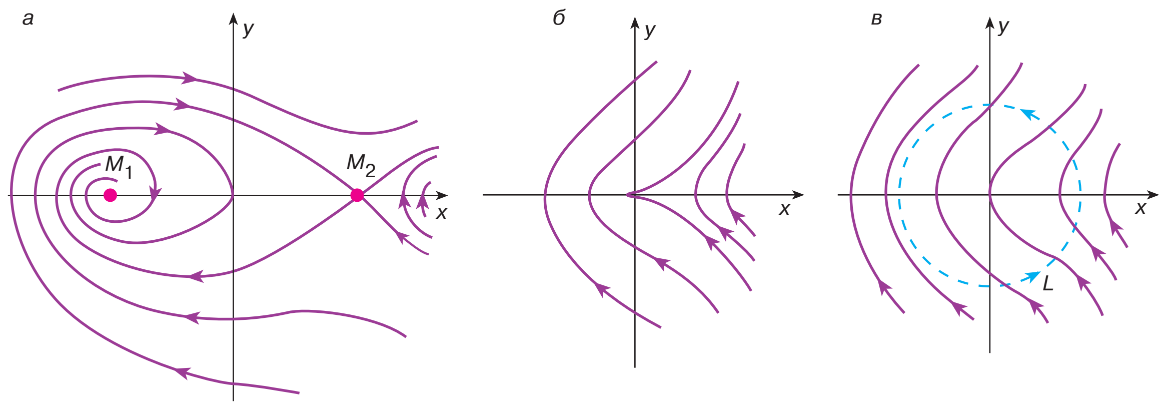

Рис. 6. Траектории системы (8,1) при $0 < \lambda < 4$ (*а*), $\lambda = 0$ (*б*) и $\lambda < 0$ (*в*)

несколько. Пусть L – окружность с центром в начале координат (рис. 6, *в*), ориентированная в положительном направлении. Тогда при $\lambda < 0$ имеем $\gamma(L; \mathbf{A}_\lambda) = 0$ в силу свойства 5 вращения (см. раздел 3). При изменении λ поле $\mathbf{A}_\lambda$ на L меняется непрерывно, поэтому, пока на L не попадает особая точка поля $\mathbf{A}_\lambda$, значение $\gamma(L; \mathbf{A}_\lambda)$ не меняется (это доказывается так же, как свойство 4 вращения). Мы предположили, что при малых значениях $\lambda > 0$ возникшие особые точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$ расположены в как угодно малой окрестности начала координат. Поэтому из формулы (4,1) следует, что при таких λ имеем

$$\gamma(M_1; \mathbf{A}_\lambda) + \gamma(M_2; \mathbf{A}_\lambda) + \ldots + \gamma(M_k; \mathbf{A}_\lambda) = \gamma(L; \mathbf{A}_\lambda) = 0.$$

Вспомнив об индексах точек, изображенных на рис. 3, приходим к выводу, что если при переходе параметра через некоторое значение на “пустом месте” возникают особые точки типов, показанных на рис. 3, то число этих точек четно, причем число седел равно общему числу особых точек остальных типов. На практике в такой ситуации обычно возникают две особые точки.

Мы предоставляем читателю разобрать другой распространенный случай бифуркации, когда неподвижная особая точка существует при всех значениях параметра, но при некотором значении из нее рождаются другие особые точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Наука, 1963.

2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

* * *

Анатолий Дмитриевич Мышкис, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, академик Академии нелинейных наук. Область научных интересов: дифференциальные уравнения и смежные вопросы, математические проблемы механики, математическое моделирование. Автор и соавтор более 280 научных статей и 16 книг.