THE OPTIC-MECHANICAL ANALOGY FOR SCHOLARS

E. D. TRIFONOV

An elementary derivation of Hamilton's optic-mechanical analogy which states a connection between mechanics and the geometrical optics is presented. A meaning of variational principles in optics and mechanics is clarified.

Приводится элементарное доказательство оптико-механической аналогии Гамильтона, раскрывающей связь механики с геометрической оптикой. Разъясняется смысл вариационных принципов в механике и оптике.

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ В ИЗЛОЖЕНИИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Е. Д. ТРИФОНОВ

Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена

ВВЕДЕНИЕ

Оптико-механическая аналогия – это сходство траектории движения частицы в потенциальном силовом поле с траекторией лучей в оптически неоднородной среде. Траектория материальной точки и траектория светового луча совпадают при определенном соответствии потенциальной энергии и переменного в пространстве показателя преломления среды. Этот факт был теоретически открыт выдающимся ирландским математиком и физиком У. Р. Гамильтоном (1805–1865) в 1834 году [1] и уже в нашем столетии оказал влияние на установление связи между волновой оптикой и волновой (квантовой) механикой.

Практическое значение оптико-механической аналогии связано с использованием ее в электронной оптике, которая занимается формированием и фокусировкой пучков электронов (или ионов) для получения с их помощью изображений и созданием на этой основе электронных и ионных микроскопов и проекторов.

Обычное доказательство оптико-механической аналогии достаточно сложно. Поэтому мы сочли целесообразным изложить этот вопрос простым образом, чтобы познакомить школьника с этой чрезвычайно красивой и важной теоремой физики. Наше изложение будет носить чисто методический характер и сопровождаться краткими историческими комментариями.

ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ В ОПТИКЕ

Закон преломления является одним из основных законов геометрической оптики:

Луч падающий и луч преломленный лежат в одной плоскости с нормалью к границе раздела двух сред. При прохождении света из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно обратному отношению показателей преломления:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{1}$$

или

$$n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2. \tag{1a}$$

Первая попытка установить количественно закон преломления принадлежала, по-видимому, греческому астроному К. Птолемею (II в. н.э.). Птолемей объяснял изменение видимого относительного углового положения небесных светил преломлением световых лучей в атмосфере, то есть атмосферной рефракцией. Составленные им таблицы оказались достаточно точными, но так как его измерения относились к сравнительно небольшим углам наблюдения, то он пришел к неправильному заключению о пропорциональности углов (а не синусов) падения и преломления. Эта ошибка была замечена только через тысячу лет (!) арабским ученым Альгазеном (965–1039), но правильного выражения закона он дать не смог.

Около 1270 года итальянский монах Вителиус написал десятитомную(!) оптическую энциклопедию. В ней, в частности, содержались таблицы углов падения и преломления при переходе световых лучей из воздуха в стекло, из воздуха в воду и из воды в стекло. Однако приведенные там данные были неточными. Они ввели в заблуждение И. Кеплера (1571–1630), пытавшегося найти форму поверхности, которая преломляет параллельный пучок так, чтобы он сходился в одной точке. Кеплер был близок к правильному результату – гиперболической поверхности вращения, но отказался от него, так как он не согласовывался с данными Вителиуса.

Честь открытия закона преломления принадлежит голландскому физику В. Снеллиусу (1580–1626) и французскому математику, физику и философу Р. Декарту (1596–1650). К сожалению, книга Снеллиуса, которая содержала этот закон, была вскоре утрачена, так что "Диоптрика" Декарта является первым сохранившимся изданием, содержащим закон преломления. После смерти Декарта была поставлена под сомнение независимость его открытия. Утверждали, что Декарт видел книгу Снеллиуса. Возможно, что это было и так, однако сравнительно недавние исследования показали, что Декарт знал закон преломления еще до своей поездки в Голландию, где он познакомился со Снеллиусом.

Закон преломления в форме (1) для двух сред, разделенных плоской поверхностью, легко обобщается на случай неоднородной среды с изменяющимся в пространстве показателем преломления. Именно такую среду представляет собой атмосфера. Неоднородность показателя преломления в атмосфере связана с неоднородностью плотности воздуха. Будем считать ради простоты, что слой воздуха плоский и что показатель преломления зависит только от высоты. Тогда мы можем мысленно разбить этот слой воздуха на тонкие параллельные слои, в каждом из которых показатель преломления будем приближенно считать постоянным и изменяющимся скачком от слоя к слою (рис. 1). С уменьшением толщины этих вспомогательных слоев и увеличением их числа мы будем приближаться к реальной ситуации. При переходе из одного слоя в другой луч света будет испытывать преломление в соответствии с законом (1):

$$n_i \sin\alpha_i = n_{i+1}\sin\alpha_{i+1}. \qquad (2)$$

На каком-то k-м шаге луч может испытать и полное внутреннее отражение, если окажется, что $\sin\alpha_k = \pi/2$. Если же полного внутреннего отражения не происходит, то читатель может без труда доказать, используя (2), что угол преломления в i-м слое полностью определяется углом падения в нулевом слое и наоборот:

$$\sin\alpha_i = \frac{n_0}{n_i}\sin\alpha_0. \qquad (3)$$

Поэтому истинное угловое положение светила α_∞, которое исследовал Птолемей, может быть определено по наблюдаемому положению α_0 с помощью уравнения

$$\sin\alpha_\infty = \frac{n_0}{n_\infty}\sin\alpha_0. \qquad (4)$$

Напомним, что у поверхности Земли показатель преломления $n_0 = 1{,}0003$, а n_∞ полагается равным точно 1. Конечно, простая формула (4) справедлива только для светил, высоко стоящих над горизонтом, когда луч света проходит плоский слой атмосферы и можно пренебречь шарообразностью Земли (рис. 2).

Изменение плотности воздуха (и вместе с ней показателя преломления) с высотой оказывается выраженным гораздо сильнее, если имеет место сильный перепад температуры с высотой. Например, в холодных странах плотность воздуха понижается с высотой более резко, чем в странах с умеренным климатом. Наоборот, в жарких странах сильное нагревание воздуха у поверхности Земли приводит к тому, что воздух внизу оказывается более разреженным, чем при несколько больших высотах. Поэтому в первом случае имеется область, в которой показатель преломления уменьшается с высотой, а

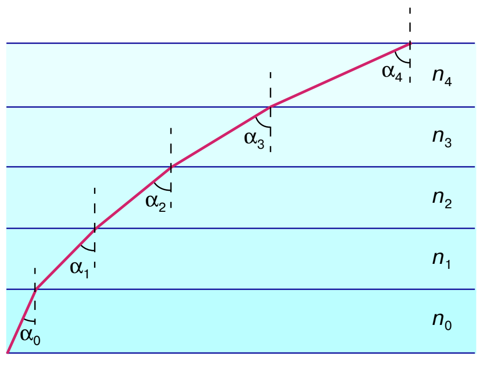

Рис. 1. Траектория луча в плоском слое неоднородной оптической среды. Показатель преломления зависит только от высоты

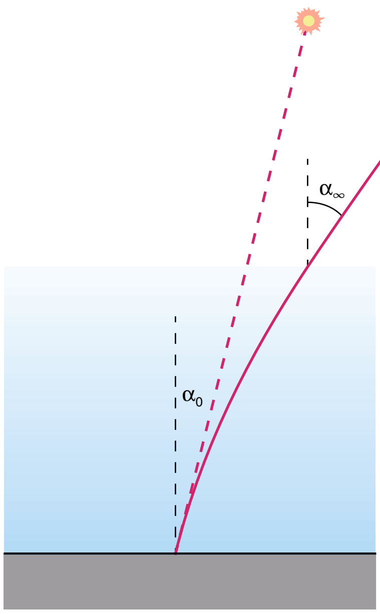

Рис. 2. Атмосферная рефракция. Луч света, идущий от небесного светила, преломляется в атмосфере. В результате наблюдаемое угловое положение светила α_0 отличается от истинного α_∞

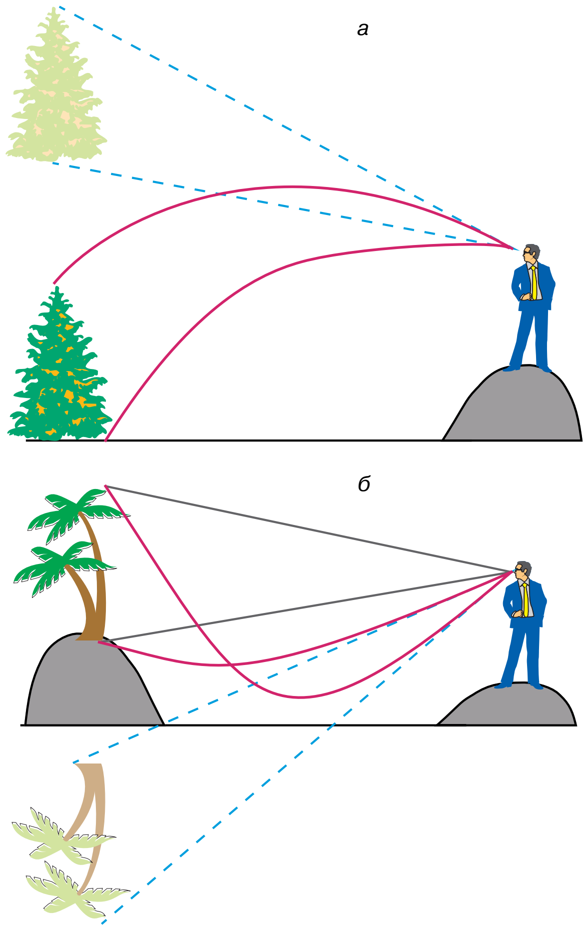

Рис. 3. Ход лучей при наблюдении миража: *а* – верхний мираж, *б* – нижний мираж

во втором увеличивается. При достаточно резком изменении показателя преломления может возникнуть мираж, обусловленный полным внутренним отражением лучей. Чтобы объяснить это явление, предположим для определенности, что показатель преломления убывает с высотой. Тогда луч, исходящий от какого-то предмета на поверхности Земли, испытает полное внутреннее отражение на высоте h, которую можно найти, согласно (3), из уравнения

$$n(h) = n(0)\sin\alpha_0, \qquad (5)$$

где $n(0)$ – показатель преломления воздуха на нулевой высоте; α_0 – угол, определяющий начальное направление луча относительно вертикали; $n(h)$ – показатель преломления на высоте h. Наблюдателю тогда будет казаться, что предмет находится наверху – это так называемый верхний мираж (рис. 3, *а*). Если же показатель преломления возрастает с высотой, то может возникнуть нижний мираж: наряду с истинным изображением предмета появится изображение внизу и в перевернутом виде, как это поясняется на рис. 3, *б*. Даже в наших не слишком жарких условиях мы часто наблюдаем нижний мираж: блестящие пятна на нагретом шоссе – отражение неба.

Оптически неоднородные среды представляют и большой практический интерес. Их используют для конструирования так называемых абсолютных оптических приборов, то есть оптических систем, дающих резкое (без аберрации) изображение трехмерного предмета. Они имеют широкое применение для создания безоболочечных световодов – так называемых сельфоков. В частности, имеются сельфоки, созданные на основе кварцевого стекла с параболической зависимостью показателя преломления от радиуса (показатель преломления максимален на оси световода). Интересно, что при диаметре такого световода 0,1 мм и длине 1 км по нему можно передать изображение с разрешающей способностью 500 линий/мм.

ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

Мы рассмотрели пока лишь вопрос о траектории луча в оптически неоднородной среде и сформулировали алгоритм расчета этой траектории. Теперь рассмотрим, как определяется траектория материальной точки массы m, движущейся в потенциальном поле $U(x, y, z)$. Ее полная энергия складывается из кинетической и потенциальной и сохраняется (в силу закона сохранения энергии) в процессе движения

$$E = \frac{mV^2}{2} + U(x, y, z), \tag{6}$$

где V – абсолютная величина мгновенной скорости.

Напомним, что потенциальная энергия определяется как работа по перемещению тела из данного положения в некоторую другую точку, в которой потенциальная энергия принимается за нуль. В простейшем, известном из школьного курса случае для потенциальной энергии в однородном поле тяжести имеем

$$U(z) = mgz. \tag{7}$$

Здесь координата z определяет высоту подъема над поверхностью Земли, принимаемую за уровень, для которого потенциальная энергия полагается равной нулю. Более точное выражение для потенциальной энергии тела над поверхностью Земли следует из закона всемирного тяготения

$$U = -\gamma\frac{mM}{r+R}, \tag{8}$$

где γ – постоянная всемирного тяготения, m – масса тела, M – масса Земли, R – радиус Земли, r – расстояние от поверхности Земли. В данном случае нуль потенциальной энергии выбирается в бесконечно удаленной точке.

Для нас будет важно в дальнейшем, что при движении в потенциальном поле при заданном начальном значении энергии абсолютная величина скорости однозначно определяется, согласно (6), положением материальной точки в пространстве:

$$V(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x, y, z))}. \tag{9}$$

Для простоты дальнейшего изложения рассмотрим случай, когда сила, действующая на материальную точку, всюду имеет одинаковое направление, как в первом примере, но может изменяться по величине, как во втором примере. В этом случае потенциальная энергия будет зависеть только от одной координаты, которая отсчитывается вдоль направления, по которому направлена сила.

Аналогично тому, как мы делали при рассмотрении траектории луча, разобьем пространство на слои в направлении, перпендикулярном направлению силы. В каждом слое скорость материальной точки будем считать приближенно постоянной.

Пусть материальная точка массы m, имеющая скорость $\mathbf{V}_1$, пересекает границу первого и второго слоев. Во втором слое скорость частицы $\mathbf{V}_2$. Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{\Delta t_1} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \tag{10}$$

где Δt_1 – время прохождения первого слоя.

Заметим, что, согласно (10), составляющая скорости, перпендикулярная силе, не изменяется. Поэтому движение частицы будет происходить в одной плоскости, проходящей через направление начальной скорости и направление силы. Это утверждение представляет собой аналог первой части закона преломления.

Выберем в плоскости движения декартову систему координат (x, y), причем ось Oy выберем вдоль направления силы. Тогда из (10) следует

$$V_{2x} = V_{1x},$$
$$V_{2y} = V_{1y} + \frac{F}{m}\Delta t, \tag{11}$$

где V_{1x}, V_{1y}, V_{2x}, V_{2y} – проекции скорости в первом и втором слоях на выбранные оси координат, F – составляющая силы вдоль оси Oy. Первое уравнение (11) можно заменить на

$$V_2\sin\alpha_2 = V_1\sin\alpha_1, \tag{12}$$

где α_1 и α_2 – углы, которые образуют скорости в первом и втором слоях с направлением силы. А это как раз аналог второй части закона преломления, выражаемой формулой (1а).

Напомним еще раз, что в каждом слое абсолютная величина скорости однозначно определена. Поэтому угол α_i, под которым скорость направлена к действующей силе в каждом слое, может быть найден с помощью закона преломления (12) по углу α_{i-1}. Таким образом, для определения траектории материальной точки получается тот же алгоритм, что и для определения траектории луча (рис. 4).

Отметим, что роль показателя преломления в рассматриваемом случае играет величина скорости. Очевидно, что траектория луча и траектория частицы будут в точности совпадать, если показатель преломления пропорционален скорости и направление луча в начальной точке совпадает с направлением скорости. Согласно (9), первое условие может быть выражено равенством

$$n(y) = \beta\sqrt{E - U(y)}, \tag{13}$$

где β – произвольный положительный коэффициент пропорциональности.

Если мы хотим найти одно из возможных потенциальных полей, в котором частица движется по такой же траектории, что и луч в заданной неоднородной среде, то это проще сделать для случая $E = 0$. Тогда

$$U(y) = -\frac{n(y)}{\beta^2}. \tag{14}$$

При этом потенциальная энергия $U(y)$ должна быть отрицательной. Величина β произвольна. Из сказанного выше следует, что она не должна влиять на траекторию. На что же она влияет? Так как показатель преломления является безразмерной величиной, то очевидно, что β зависит от выбираемой единицы энергии. Если масштаб координаты

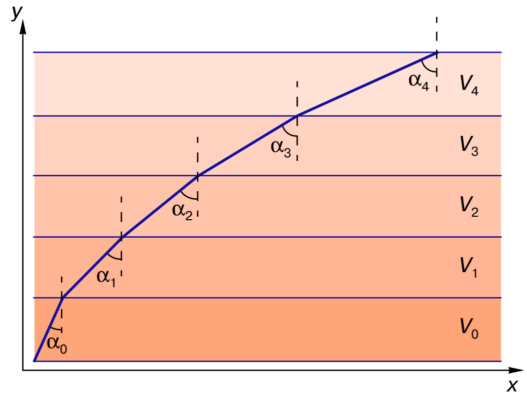

Рис. 4. Построение траектории движения материальной точки методом геометрической оптики. Каждый слой характеризуется определенным значением скорости V_i. Угол падения для i-го слоя находится по углу падения для (i – 1)-го слоя с помощью закона преломления (12)

фиксирован, то изменение единиц энергии можно достичь изменяя единицы массы и времени. Таким образом, изменение β можно интерпретировать как переход к случаям движения частиц с другими массами или при фиксированной массе в другом масштабе времени (быстрее или медленнее). При определенном выборе единиц величину β можно положить равной 1.

Таким образом, сформулированная выше оптико-механическая аналогия доказана. Правда, она доказана для случая силы, имеющей постоянное направление в пространстве. Но это не умаляет общности результата, поскольку в достаточно малой окрестности направление силы можно считать фиксированным, а оптическую среду – слоисто-однородной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы не будем углубляться в подробности геометрической оптики и классической механики, чтобы не затушевать главный результат, заключающийся в том, что классическую механику можно рассматривать как аналог геометрической оптики. Это открытие У.Р. Гамильтона объяснило, в частности, почему волновая теория Гюйгенса и корпускулярная теория Ньютона одинаково хорошо описывали явления отражения и преломления света. Отметим только, что еще до работ Гамильтона начиная с XVII века настойчивые поиски оптико-механической аналогии такими выдающимися учеными, как Р. Декарт, П. Ферма, Х. Гюйгенс, И. Ньютон и др., способствовали активному развитию как оптики, так и классической механики [3, 4]. Так, известный вариационный принцип Ферма в оптике был использован Я. Бернулли для формулировки первого вариационного принципа в механике, что в конце концов привело к созданию такой важной области математики, как вариационное исчисление. Подробнее мы расскажем об этом в другой статье.

Гамильтон не только установил конструктивную связь между геометрической оптикой и классической механикой, но и выяснил соответствие между геометрической оптикой и волновой оптикой. К сожалению, первоначально работы Гамильтона были опубликованы в малоизвестных “Трудах Ирландской академии наук”, и поэтому идеи Гамильтона не сразу оказали влияние на развитие физики. Только немногие из английских физиков, в частности Дж.К. Максвелл и Рэлей, знали работы Гамильтона по оптике и применяли его методы. Фактически в исследованиях Гамильтона содержалось предсказание возможности волновой механики. В 20-х годах нашего века эти идеи Гамильтона были развиты Луи де Бройлем и Э. Шрёдингером при создании концепции корпускулярно-волнового дуализма, что в итоге привело к созданию современной квантовой механики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гамильтон У.* Избранные труды. М.: Наука, 1994. 560 с. (Классики науки).

2. *Кудрявцев П.С.* История физики. М.: Учпедгиз, 1948. Т. 1. 535 с.

3. *Меркин Д.Р.* Краткая история классической механики. М.: Наука, 1994. 160 с.

4. Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С. Полака. М.: ГИФМЛ, 1959. 932 с.

* * *

Евгений Дмитриевич Трифонов, доктор физико-математических наук, профессор Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. Область научных интересов: теория твердого тела, квантовая нелинейная оптика. Автор более 100 работ и двух монографий.