

**NONSMOOTH ANALYSIS
ON THE PLANE. Part II**

V. F. DEMYANOV

One of the tools used in non-smooth analysis (the quasidifferential) is introduced and discussed. Some elements of quasidifferential calculus – a generalization of the classical differential calculus – are described. Necessary and sufficient conditions for a minimum and a maximum are formulated. Numerical examples illustrate the theory.

Вводится и обсуждается понятие квазидифференциала – одного из понятий негладкого анализа. Описываются элементы квазидифференциального исчисления, являющегося обобщением классического дифференциального исчисления. Формулируются необходимые и достаточные условия минимума и максимума. Приводятся численные примеры.

НЕГЛАДКИЙ АНАЛИЗ НА ПЛОСКОСТИ. Часть II

В. Ф. ДЕМЬЯНОВ

Санкт-Петербургский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

В первой части статьи [1] мы выяснили, что в случае дифференцируемых по направлениям функций производная по направлениям выполняет роль, которую в гладком случае играл градиент. На примере функций максимума мы видели, что производная по направлениям имеет вид

$$f'(z, g) = \max_{v \in \underline{\partial}f(z)} (v, g), \quad (1)$$

где $\underline{\partial}f(z)$ – выпуклый многоугольник (в общем случае выпуклое множество). Множество $\underline{\partial}f(z)$ называется субдифференциалом функции f в точке z . Задача нахождения и хранения субдифференциала сводится к разысканию (по определенным правилам) вершин многоугольника. При этом необходимые условия максимума и минимума формулируются в терминах $\underline{\partial}f(z)$. Оказывается, что производная по направлениям имеет вид (1) не только в случае функций максимума, но и для многих других функций. Функция, у которой производная по направлениям имеет вид (1), называется субдифференцируемой. К сожалению, произведение, частное и разность субдифференцируемых функций уже не являются субдифференцируемыми функциями.

Рассмотрим функцию минимума. Пусть $f_i(x, y)$, $i \in I = 1, 2, \dots, N$, – непрерывно дифференцируемые функции. Положим

$$f(z) = f(x, y) = \min_{i \in I} f_i(z). \quad (2)$$

Как и в случае функции максимума, получим, что f является дифференцируемой по направлениям, причем

$$f'(z, g) = \min_{i \in Q(z)} (f'_i(z), g),$$

где $Q(z) = \{i \in I \mid f'_i(z) = f'(z)\}$. Нетрудно видеть, что

$$f'(z, g) = \min_{v \in \bar{\partial}f(z)} (v, g), \quad (3)$$

где $\bar{\partial}f(z) = \text{co}\{f'_i(z) \mid i \in Q(z)\}$. Напомним, что $\text{co}A$ обозначает выпуклую оболочку, натянутую на множество A , следовательно, $\bar{\partial}f(z)$ – выпуклый многоугольник, натянутый на точки $f'_i(z)$. Из (3) и необходимых условий минимума и максимума дифференцируемых по направлениям функций вытекают необходимые условия минимума и максимума функции (2):

Для того чтобы функция (2) достигала своего наименьшего значения в точке z^* , необходимо, чтобы

$$f'_i(z^*) = 0_2 \quad \forall i \in Q(z). \quad (4)$$

Для того чтобы функция (2) достигала своего наибольшего значения в точке z^{**} , необходимо, чтобы

$$0_2 \in \bar{\partial}f(z^{**}). \quad (5)$$

Изучение суммы функции максимума и функции минимума привело к понятию квазидифференцируемой функции [2].

1. КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Функция $f(z) = f(x, y)$ называется квазидифференцируемой в точке z , если функция f дифференцируема в точке z по всем направлениям и если существуют выпуклые ограниченные замкнутые множества $\partial f(z)$ и $\bar{\partial}f(z) \subset R^2$ (для простоты будем предполагать, что $\partial f(z)$ и $\bar{\partial}f(z)$ – выпуклые многоугольники), такие, что

$$f'(z, g) = \max_{v \in \partial f(z)} (v, g) + \min_{w \in \bar{\partial}f(z)} (w, g). \quad (6)$$

Пара множеств $Df(z) = [\partial f(z), \bar{\partial}f(z)]$ называется квазидифференциалом функции f в точке z .

Оказывается, что множество квазидифференцируемых функций является достаточно богатым.

Из (6) и необходимых условий минимума и максимума для дифференцируемых по направлениям функций можно получить необходимые условия для квазидифференцируемых функций.

Для того чтобы квазидифференцируемая функция f достигала своего наименьшего значения в точке z^* , необходимо, чтобы

$$-\bar{\partial}f(z^*) \subset \partial f(z^*). \quad (7)$$

Для того чтобы функция f достигала своего наибольшего значения в точке z^{**} , необходимо, чтобы

$$-\partial f(z^{**}) \subset \bar{\partial}f(z^{**}). \quad (8)$$

Точка z^* , удовлетворяющая (7), называется inf-стационарной точкой функции f , а точка z^{**} , удовлетворяющая (8), называется sup-стационарной.

Для негладких функций можно сформулировать и достаточные условия минимума и максимума.

Если функция f липшицева в окрестности точки z^* (мы не обсуждаем здесь понятие липшицевости, это естественное обобщение понятия непрерывности) и при этом оказалось, что

$$-\bar{\partial}f(z^*) \subset \text{int } \partial f(z^*) \quad (9)$$

(то есть множество $-\bar{\partial}f(z^*)$ находится строго внутри множества $\partial f(z^*)$), то точка z^* является точкой строгого локального минимума функции f , то есть найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$f(z) > f(z^*) \quad \forall z \neq z^*, \quad \|z - z^*\| \leq \varepsilon.$$

Аналогично, если функция f липшицева в окрестности точки z^{**} и при этом

$$-\partial f(z^{**}) \subset \text{int } \bar{\partial}f(z^{**}), \quad (10)$$

то точка z^{**} является точкой строгого локального максимума, то есть найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$f(z) < f(z^{**}) \quad \forall z \neq z^{**}, \quad \|z - z^{**}\| \leq \varepsilon.$$

В гладком случае с помощью градиента никаких достаточных условий сформулировать мы не могли, условия (9) и (10) справедливы лишь для негладких функций.

Гладкая функция тоже является квазидифференцируемой. Действительно, если f – дифференцируемая функция, то ее производная по направлению имеет вид

$$f'(z, g) = (f'(z), g).$$

Ясно, что если взять

$$\partial f(z) = \{f'(z)\}, \quad \bar{\partial}f(z) = \{0_2\}, \quad (11)$$

то $f'(z)$ будет представлено в виде (6). Таким образом, гладкая функция – это такая квазидифференцируемая функция, у которой в качестве квазидифференциала можно взять пару множеств, каждое из которых содержит по одной точке. Так как одна точка не может быть строго внутри другой точки, то в гладком случае соотношения (9) и (10) невозможны.

С помощью квазидифференциала мы можем не только проверить необходимые и достаточные условия минимума и максимума, но также и найти направления наискорейшего спуска и подъема. Пусть в точке z_0 (рис. 1)

$$\partial f(z_0) = \text{co} \{a_i \mid i \in 1, 2, \dots, m\},$$

$$-\bar{\partial}f(z_0) = \text{co} \{\bar{b}_j \mid j \in 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{где } m, n \geq 1.$$

Для каждого \bar{b}_j найдем ближайшую точку многоугольника ∂f , то есть найдем

$$\min_{v \in \partial f(z_0)} \|\bar{b}_j - v\| = c_j. \quad (12)$$

Если $c_j = 0 \quad \forall j \in 1, 2, \dots, n$, то это значит, что $\bar{b}_j \in \partial f(z_0) \quad \forall j$, то есть $-\bar{\partial}f(z_0) \subset \partial f(z_0)$, и точка z_0 является inf-стационарной. Если при этом все вершины лежат строго внутри многоугольника $\partial f(z_0)$, то точка z_0 является точкой строгого локального минимума.

Если же

$$\max_{j \in 1, 2, \dots, n} c_j = c_{j_0} = \|\bar{b}_{j_0} - v_{j_0}\| > 0, \quad (13)$$

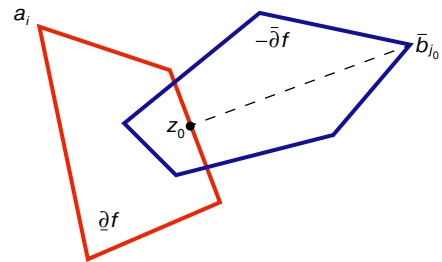


Рис. 1

то направление $g_0 = (\bar{b}_{j_0} - v_{j_0}) / (c_{j_0})$ является направлением наискорейшего спуска функции f в точке z_0 .

Конечно, может оказаться, что существует несколько j_0 , удовлетворяющих (13), тогда каждому из этих j_0 соответствует свое направление наискорейшего спуска.

Аналогично для проверки выполнения необходимого условия максимума для каждого a_i найдем

$$\min_{w \in [-\bar{\partial}f(z_0)]} \|a_i - w\| = d_i. \quad (14)$$

Если $d_i = 0 \quad \forall i \in 1, 2, \dots, m$, то $a_i \in [-\bar{\partial}f(z_0)] \quad \forall i$, то есть $\partial f(z_0) \subset [-\bar{\partial}f(z_0)]$, или, что то же самое, $-\partial f(z_0) \subset \bar{\partial}f(z_0)$, и точка z_0 является sup-стационарной. Если при этом оказалось, что все вершины a_i лежат строго внутри многоугольника $-\bar{\partial}f(z_0)$, то точка z_0 является точкой строгого локального максимума.

Если же

$$\max_{i \in 1, 2, \dots, m} d_i = d_{i_0} = \|a_{i_0} - w_{i_0}\| > 0, \quad (15)$$

то направление $g^0 = (a_{i_0} - w_{i_0}) / d_{i_0}$ является направлением наискорейшего подъема функции f в точке z_0 . Если существует несколько i_0 , удовлетворяющих (15), то каждому из них соответствует свое направление наискорейшего подъема.

Замечание 1. Выше требуется уметь решать задачи (12) и (14) (то есть находить точку многоугольника, ближайшую к заданной точке). Эти задачи на плоскости не представляют трудностей.

2. ИСЧИСЛЕНИЕ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Для практического применения изложенной в разделе 1 теории надо уметь вычислять вершины многоугольников $\partial f(z)$ и $\bar{\partial}f(z)$. К счастью, для этого имеется хорошо разработанное квазидифференциальное исчисление, то есть исчисление квазидифференциалов, к изложению которого мы и переходим.

Нам понадобится ввести операции сложения пар многоугольников и умножение на вещественное число.

Пусть $D_1 = [A_1, B_1]$, $D_2 = [A_2, B_2]$ – пары выпуклых многоугольников, где A_1, A_2, B_1 и B_2 – выпуклые многоугольники. Положим

$$D_1 + D_2 = [A, B],$$

где $A = A_1 + A_2$, $B = B_1 + B_2$. Здесь, как обычно,

$$C_1 + C_2 = \{c = c_1 + c_2 \mid c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}.$$

Если

$$C_1 = \text{co}\{c_{1i} \mid i \in I\}, \quad C_2 = \text{co}\{c_{2j} \mid j \in J\},$$

то

$$C_1 + C_2 = \text{co}\{c = c_{1i} + c_{2j} \mid i \in I, j \in J\}.$$

Пусть $D = [A, B]$, λ – вещественное число. Положим

$$\lambda D = \begin{cases} [\lambda A, \lambda B], & \lambda \geq 0, \\ [\lambda B, \lambda A], & \lambda < 0. \end{cases}$$

Если

$$A = \text{co}\{a_i \mid i \in I\}, \quad B = \text{co}\{b_j \mid j \in J\},$$

то

$$\lambda D = \begin{cases} [\text{co}\{\lambda a_i \mid i \in I\}, \text{co}\{\lambda b_j \mid j \in J\}], & \lambda \geq 0, \\ [\text{co}\{\lambda b_j \mid j \in J\}, \text{co}\{\lambda a_i \mid i \in I\}], & \lambda < 0. \end{cases}$$

Теперь мы можем сформулировать основные формулы квазидифференциального исчисления.

1. Если $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ – квазидифференцируемые в точке z_0 функции и $D\varphi_1(z_0)$ и $D\varphi_2(z_0)$ – их квазидифференциалы в этой точке, то и функции

$$f_1(z) = \lambda_1 \varphi_1(z) + \lambda_2 \varphi_2(z), \quad f_2(z) = \varphi_1(z) \varphi_2(z),$$

$$f_3(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \quad (\text{если } \varphi_2(z_0) \neq 0)$$

тоже являются квазидифференцируемыми в точке z_0 , при этом

$$Df_1(z_0) = \lambda_1 D\varphi_1(z_0) + \lambda_2 D\varphi_2(z_0), \quad (16)$$

$$Df_2(z_0) = \varphi_2(z_0) D\varphi_1(z_0) + \varphi_1(z_0) D\varphi_2(z_0), \quad (17)$$

$$Df_3(z_0) =$$

$$= -\frac{1}{\varphi_2^2(z_0)} [\varphi_1(z_0) D\varphi_2(z_0) - \varphi_2(z_0) D\varphi_1(z_0)]. \quad (18)$$

Формулы (16)–(18) представляют собой обобщение формул дифференциального исчисления (если в (16)–(18) операцию $Df(z_0)$ заменить операцией f' , то получим формулы классического математического анализа).

Следующие две формулы не имеют аналога в гладком случае.

2. Если $\varphi_i(z)$, $i \in I$, – квазидифференцируемые в точке z_0 функции, $I = 1, 2, \dots, n$, $D\varphi_i(z_0)$ – их квазидифференциалы в этой точке, то и функции

$$f_1(z) = \max_{i \in I} \varphi_i(z), \quad f_2(z) = \min_{i \in I} \varphi_i(z)$$

тоже являются квазидифференцируемыми в точке z_0 , при этом

$$Df_1(z_0) = [\partial f_1(z_0), \bar{\partial} f_1(z_0)], \quad (19)$$

$$Df_2(z_0) = [\partial f_2(z_0), \bar{\partial} f_2(z_0)], \quad (20)$$

где

$$\partial f_1(z_0) = \text{co} \left\{ \partial \varphi_i(z_0) - \sum_{\substack{k \in R(z_0) \\ k \neq i}} \bar{\partial} \varphi_k(z_0) \mid i \in R(z_0) \right\},$$

$$\bar{\partial} f_1(z_0) = \sum_{i \in R(z_0)} \bar{\partial} \varphi_i(z_0), \quad \partial f_2(z_0) = \sum_{i \in Q(z_0)} \partial \varphi_i(z_0),$$

$$\bar{\partial}f_2(z_0) = \text{co} \left\{ \bar{\partial}\varphi_i(z_0) - \sum_{\substack{k \in Q(z_0) \\ k \neq i}} \bar{\partial}\varphi_k(z_0) \mid i \in Q(z_0) \right\}.$$

Здесь

$$R(z_0) = \{i \in J \mid \varphi_i(z_0) = f_1(z_0)\}, \\ Q(z_0) = \{j \in J \mid \varphi_j(z_0) = f_2(z_0)\}.$$

Тот факт, что операции взятия максимума и минимума сохраняют свойство квазидифференцируемости, является важнейшим свойством квазидифференцируемых функций.

Пример 1. Пусть $f(z) = f(x, y) = |x| - |y|$, $z = [0, 0]$. Положим $f_1(z) = x$, $f_2(z) = -x$, $f_3(z) = y$, $f_4(z) = -y$, $f_5(z) = |x|$, $f_6(z) = |y|$. Функции f_1, f_2, f_3, f_4 гладкие, поэтому по формуле (11)

$$Df_1(z_0) = [\partial f_1(z_0), \bar{\partial}f_1(z_0)],$$

где $\partial f_1(z_0) = \{[1, 0]\}$, $\bar{\partial}f_1(z_0) = \{[0, 0]\}$,

$$Df_2(z_0) = [\partial f_2(z_0), \bar{\partial}f_2(z_0)],$$

где $\partial f_2(z_0) = \{[-1, 0]\}$, $\bar{\partial}f_2(z_0) = \{[0, 0]\}$,

$$Df_3(z_0) = [\partial f_3(z_0), \bar{\partial}f_3(z_0)],$$

где $\partial f_3(z_0) = \{[0, 1]\}$, $\bar{\partial}f_3(z_0) = \{[0, 0]\}$,

$$Df_4(z_0) = [\partial f_4(z_0), \bar{\partial}f_4(z_0)],$$

где $\partial f_4(z_0) = \{[0, -1]\}$, $\bar{\partial}f_4(z_0) = \{[0, 0]\}$.

Поскольку $f_5(z) = \max\{f_1(z), f_2(z)\} = \max_{i \in 1, 2} f_i(z)$, то по формуле (19)

$$Df_5(z_0) = [\partial f_5(z_0), \bar{\partial}f_5(z_0)],$$

где

$$\partial f_5(z_0) = \text{co} \{ \partial f_1(z_0) - \bar{\partial}f_2(z_0), \partial f_2(z_0) - \bar{\partial}f_1(z_0) \} = \\ = \text{co} \{ \{[1, 0]\} - \{[0, 0]\}, \{[-1, 0]\} - \{[0, 0]\} \} = \\ = \text{co} \{ [1, 0], [-1, 0] \},$$

$$\bar{\partial}f_5(z_0) = \bar{\partial}f_1(z_0) + \bar{\partial}f_2(z_0) = \{[0, 0]\}.$$

Аналогично поскольку $f_6(z) = \max\{f_3(z), f_4(z)\}$, то

$$\partial f_6(z_0) = \text{co} \{ \partial f_3(z_0) - \bar{\partial}f_4(z_0), \partial f_4(z_0) - \bar{\partial}f_3(z_0) \} = \\ = \text{co} \{ [0, 1], [0, -1] \},$$

$$\bar{\partial}f_6(z_0) = \bar{\partial}f_3(z_0) + \bar{\partial}f_4(z_0) = \{[0, 0]\}.$$

Так как $f(z) = f_5(z) - f_6(z)$, то по формуле (16)

$$Df(z_0) = [\partial f(z_0), \bar{\partial}f(z_0)],$$

где

$$\partial f(z_0) = \partial f_5(z_0) - \bar{\partial}f_6(z_0) = \text{co} \{ [1, 0], [-1, 0] \},$$

$$\bar{\partial}f(z_0) = \bar{\partial}f_5(z_0) - \partial f_6(z_0) = \text{co} \{ [0, 1], [0, -1] \}.$$

Имеем (рис. 2)

$$\partial f(z_0) = \text{co} \{ a_1, a_2 \}, \quad \bar{\partial}f(z_0) = \text{co} \{ b_1, b_2 \},$$

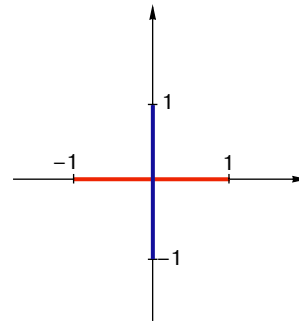


Рис. 2

где $a_1 = [1, 0]$, $a_2 = [-1, 0]$, $b_1 = [0, 1]$, $b_2 = [0, -1]$. Поскольку $-\bar{\partial}f(z_0) = \bar{\partial}f(z_0)$, то

$$\min_{v \in \bar{\partial}f(z_0)} \|b_1 - v\| = \|b_1 - v_1\| = c_1 = 1,$$

$$\min_{v \in \bar{\partial}f(z_0)} \|b_2 - v\| = \|b_2 - v_2\| = c_2 = 1,$$

где $v_1 = [0, 0]$, $v_2 = [0, 0]$. Так как $c_1 = c_2 = 1$, то из (13) заключаем, что направления $g_0 = [0, 1]$ и $g'_0 = [0, -1]$ являются направлениями наискорейшего спуска функции f в точке z_0 .

Аналогично направления $g^0 = [1, 0]$ и $g'^0 = [-1, 0]$ являются направлениями наискорейшего подъема.

Замечание 2. Этот пример мы уже рассматривали в [1], где непосредственными вычислениями были найдены направления наискорейшего спуска и подъема. Здесь эти же результаты были получены с помощью теории квазидифференциалов.

Пример 2. Пусть $f(z) = f(x, y) = \max\{|x| - |y|, |x + y|\}$, $z = [0, 0]$. Положим $\varphi_1(z) = |x| - |y|$, $\varphi_2(z) = |x + y|$, $\varphi_3(z) = x + y$, $\varphi_4(z) = -x - y$. Тогда $\varphi_2(z) = \max\{\varphi_3(z), \varphi_4(z)\}$, $f(z) = \max\{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$.

Функция $\varphi_1(z)$ рассматривалась в примере 1. Там было установлено, что

$$D\varphi_1(z_0) = [\partial\varphi_1(z_0), \bar{\partial}\varphi_1(z_0)],$$

где $\partial\varphi_1(z_0) = \text{co} \{ [1, 0], [-1, 0] \}$,

$$\bar{\partial}\varphi_1(z_0) = \text{co} \{ [0, 1], [0, -1] \}.$$

Функции φ_3 и φ_4 гладкие, поэтому можно взять

$$D\varphi_3(z_0) = [\partial\varphi_3(z_0), \bar{\partial}\varphi_3(z_0)],$$

$$D\varphi_4(z_0) = [\partial\varphi_4(z_0), \bar{\partial}\varphi_4(z_0)],$$

где

$$\partial\varphi_3(z_0) = \{[1, 1]\}, \quad \bar{\partial}\varphi_3(z_0) = \{[0, 0]\},$$

$$\partial\varphi_4(z_0) = \{[-1, -1]\}, \quad \bar{\partial}\varphi_4(z_0) = \{[0, 0]\}.$$

Так как $\varphi_2(z) = \max\{\varphi_3(z), \varphi_4(z)\}$, то по правилам квазидифференциального исчисления (см. (19))

$$D\varphi_2(z_0) = [\partial\varphi_2(z_0), \bar{\partial}\varphi_2(z_0)],$$

где

$$\partial\varphi_2(z_0) = \text{co} \{ [1, 1], [-1, -1] \}, \quad \bar{\partial}\varphi_2(z_0) = \{[0, 0]\}.$$

Поскольку $f(z) = \max\{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$, то из (19)

$$Df(z_0) = [\underline{\partial}f(z_0), \bar{\partial}f(z_0)],$$

где

$$\begin{aligned} \underline{\partial}f(z_0) &= \text{co}\{\underline{\partial}\varphi_1(z_0) - \bar{\partial}\varphi_2(z_0), \underline{\partial}\varphi_2(z_0) - \bar{\partial}\varphi_1(z_0)\}, \\ \bar{\partial}f(z_0) &= \bar{\partial}\varphi_1(z_0) + \bar{\partial}\varphi_2(z_0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \underline{\partial}f(z_0) &= \text{co}\{\text{co}\{[1, 0], [-1, 0]\} - \{[0, 0]\}, \\ &\text{co}\{[1, 1], [-1, -1]\} - \text{co}\{[0, 1], [0, -1]\}\} = \\ &= \text{co}\{\text{co}\{[1, 0], [-1, 0]\}, \\ &\text{co}\{[1, 1] - [0, 1], [1, 1] - [0, -1], \\ &[-1, -1] - [0, 1], [-1, -1] - [0, -1]\}\} = \\ &= \text{co}\{\text{co}\{[1, 0], [-1, 0]\}, \\ &\text{co}\{[1, 0], [1, 2], [-1, -2], [-1, 0]\}\} = \\ &= \text{co}\{[1, 0], [1, 2], [-1, -2], [-1, 0]\}, \\ \bar{\partial}f(z_0) &= \text{co}\{[0, 1], [0, -1]\} - \{[0, 0]\} = \\ &= \text{co}\{[0, 1], [0, -1]\}. \end{aligned}$$

В данном примере $\bar{\partial}f(z_0) = -\underline{\partial}f(z_0)$.

На рис. 3 видно, что

$$-\underline{\partial}f(z_0) \subset \underline{\partial}f(z_0),$$

то есть точка z_0 является inf-стационарной (в действительности она уже точка минимума, но это не следует из необходимого условия минимума, а достаточное условие (9) в данном случае не выполнено).

Условие максимума не выполнено. Для каждой из вершин многоугольника $\underline{\partial}f(z_0)$ найдем ближайшую точку отрезка $-\underline{\partial}f(z_0)$. Наиболее удаленными от множества $-\underline{\partial}f(z_0)$ вершинами являются $a_2 = [1, 2]$ и $a_3 = [-1, -2]$, при этом

$$\begin{aligned} \min_{w \in [-\underline{\partial}f(z_0)]} \|a_2 - w\| &= \|a_2 - b_1\|, \\ \min_{w \in [-\underline{\partial}f(z_0)]} \|a_3 - w\| &= \|a_3 - b_2\|, \end{aligned}$$

где $b_1 = [0, 1]$ и $b_2 = [0, -1]$. Поэтому (см. (15)) направлениями наискорейшего подъема функции f в точке z_0 являются

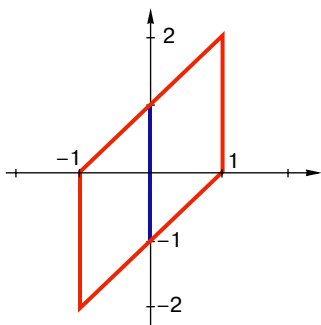


Рис. 3

$$\begin{aligned} g^0 &= \frac{(a_2 - b_1)}{\|a_2 - b_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ g^{0_1} &= \frac{(a_3 - b_2)}{\|a_3 - b_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из изложенного следует, что если функция является квазидифференцируемой, то исследование этой функции на экстремум можно проводить с помощью квазидифференциала. Существует хорошо разработанное квазидифференциальное исчисление, являющееся обобщением классического дифференциального исчисления (а сам квазидифференциал – обобщением понятия градиента). Все сказанное переносится на случай функций многих переменных.

Мы описали только одно из направлений в негладком анализе, который сейчас находится в стадии становления. Здесь еще остается много интересных и важных нерешенных задач, имеющих не только теоретическое, но и сугубо практическое значение. Мы ставили перед собой следующие цели:

1) показать, что математика (и, в частности, математический анализ) интенсивно развивается в настоящее время;

2) ознакомить с некоторыми результатами в негладком анализе, чтобы даже неспециалист мог при необходимости применить эти результаты в своей деятельности;

3) привлечь пытливого читателя к ведущимся сейчас исследованиям и заинтересовать его.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В.Ф. Негладкий анализ на плоскости. Часть 1 // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 8. С. 122–127.
2. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

* * *

Владимир Федорович Демьянов, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: оптимальное управление, математическое программирование, негладкий анализ, недифференцируемая оптимизация. Член редколлегии четырех международных математических журналов, автор более 100 работ, в том числе семи монографий, часть из которых переведена на английский, немецкий, польский и китайский языки.