BOOLEAN ALGEBRAS AND BOOLEAN-VALUED MODELS

A. G. KUSRAEV

The subject of this paper is classical algebraic structure – Boolean algebra and its importance in contemporary mathematical science. Boolean algebra can be considered as a real bridge between different mathematical disciplines. Boolean-valued models have proven to be a powerfull machinery for independence proofs in the sets theories and simultaneously as a basis for development of a new mathematical theory, so-called Boolean-valued analysis.

Обсуждается классическая алгебраическая структура – булева алгебра и ее значение для современной математической науки. Показано, что булевы алгебры можно рассматривать как мост между различными математическими дисциплинами. Булевозначные модели оказались удачным инструментом для доказательства независимости в теории множеств и одновременно основой для развития новой математической теории – булевозначного анализа.

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ И БУЛЕВОЗНАЧНЫЕ МОДЕЛИ

А. Г. КУСРАЕВ

Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, Владикавказ

ВВЕДЕНИЕ

Теория булевых алгебр берет свое начало от классического сочинения Джорджа Буля “Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и теории вероятностей”, изданного в 1854 году. Цель и задачи этой книги автор сформулировал так: “В предлагаемом вниманию читателей трактате мы намереваемся исследовать фундаментальные законы тех операций, которые совершает разум в процессе рассуждений, дабы выразить их в символическом языке исчисления и на этой основе построить науку логики и ее метод”. Следуя такой установке, Дж. Буль провел по существу алгебраизацию той логической системы, которая лежит в основе классических математических рассуждений. Таким образом возникла алгебраическая структура, именуемая ныне *алгеброй Буля* или *булевой алгеброй*.

Булевы алгебры имеют многочисленные связи с многими важнейшими направлениями математической науки. Общетеоретическое и прикладное значение булевых алгебр определяется той существенной ролью, которую они играют в математической логике, теории вероятностей и кибернетике. Живо и увлекательно о булевых алгебрах рассказано в книге [1] (см. также цитированную там литературу). Для первоначального знакомства с теорией множеств, булевыми алгебрами и математической логикой может послужить книга [2]. Основательное изложение теории булевых алгебр имеется в монографиях [3, 4]. Здесь мы коротко остановимся на внутриматематических применениях булевых алгебр, затронув также новый способ булевозначного моделирования, который привел к значительному прогрессу в исследованиях по логическим основаниям самой математики.

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Множество X называют (*частично*) *упорядоченным*, если для некоторых пар его элементов x и y определено отношение порядка $\leq$ так, что выполнены условия: 1) $x \leq x$ (*рефлексивность*); 2) если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ (*транзитивность*); 3) если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ (*антисимметричность*), каковы бы ни были элементы x, y, z из X. Запись $y \geq x$ означает, что $x \leq y$.

Пусть A является частью X. Элемент x называют *нижней* (*верхней*) *границей* множества A, если $x \leq y$

(соответственно $x \geq y$) для всех y из A. В случае, когда элемент a входит в A и $x \leq a$ для всех x из A (соответственно $x \geq a$ для всех x из A), то говорят, что a – *наибольший* (соответственно *наименьший*) *элемент* множества A. Если в множестве всех нижних границ имеется наибольший элемент, то его именуют *инфимумом* и обозначают $\inf(A)$. Аналогично наименьший элемент множества всех верхних границ называют *супремумом* и обозначают символом $\sup(A)$. Множество A называют *порядково ограниченным*, если оно имеет хотя бы одну нижнюю и хотя бы одну верхнюю границы.

Упорядоченное множество X называют *решеткой*, если любая пара элементов x и y из X имеет как супремум, так и инфимум. При этом приняты обозначения: $x \vee y := \sup\{x, y\}$ и $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ (символ := означает “равняется по определению”). Решетку X называют *дистрибутивной*, если

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

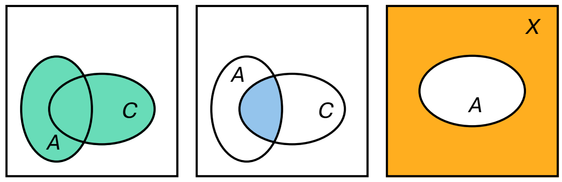
для любых ее трех элементов x, y и z. Допустим, что в решетке имеются наибольший элемент $\mathbf{I}$ и наименьший элемент $\mathbf{O}$. Если для каждого элемента x существует такой элемент x^*, что $x \vee x^* = \mathbf{I}$ и $x \wedge x^* = \mathbf{O}$, то говорят, что X есть решетка с дополнениями. Элемент x^* называют *дополнением* x, причем каждый элемент имеет единственное дополнение.

Булевой алгеброй называют дистрибутивную решетку B с дополнениями. Таким образом, в булевой алгебре имеются три операции: две двухместные операции $\vee$, $\wedge$ и одна одноместная операция $(\,\cdot\,)^*$. Булеву алгебру называют *полной*, если в ней любое множество имеет супремум и инфимум. Простейший пример булевой алгебры – двухэлементное множество $\mathbf{2} := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, где $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} \leq \mathbf{1}$.

Рассмотрим теперь (ассоциативное) кольцо K с единицей, в котором каждый элемент идемпотентен: $b^2 := b \cdot b = b$. Тогда K называют *булевым кольцом*. Булево кольцо коммутативно и удовлетворяет тождеству $b = -b$ для всех b из K. В булевом кольце K можно ввести отношение порядка: $a \leq b$ в том и только том случае, когда $a \cdot b = a$. Непосредственно выясняется, что упорядоченное множество $(K, \leq)$ представляет собой булеву алгебру. При этом решеточные операции $\wedge$ и $\vee$ связаны с кольцевыми сложением $(+)$ и умножением $(\,\cdot\,)$ формулами: $x \vee y := x + y + x \cdot y$ и $x \wedge y := x \cdot y$. Очевидно, что $b^* = 1 + b$. Наоборот, если B – булева алгебра, то B можно превратить в булево кольцо, полагая $x \cdot y := x \wedge y$ и $x + y := (x \wedge y^*) \vee (y \wedge x^*)$. Приведем еще несколько примеров булевых алгебр, которые указывают одновременно на важнейшие сферы приложений теории.

Алгебра множеств

Примером булевой алгебры служит совокупность всех подмножеств некоторого фиксированного непустого множества X, которую принято обозначать символом $\mathcal{P}(X)$. При этом под булевыми операциями понимаются теоретико-множественные операции объединения $A \cup C$, пересечения $A \cap C$ и дополнения $X–A$ (рис. 1). Нулем в $\mathcal{P}(X)$ служит пустое множество $\varnothing$, а единицей – само X. Булева алгебра $\mathcal{P}(X)$ полна.



$A \cup C$ окрашено $A \cap C$ окрашено $X–A$ окрашено

Рис. 1

Часть $\mathcal{A}$ булевой алгебры $\mathcal{P}(X)$ называют *полем множеств*, если она содержит пустое множество $\varnothing$, все множество X и замкнута относительно теоретико-множественных операций пересечения, объединения и дополнения. Поле множеств является булевой алгеброй с теми же булевыми операциями, что и в $\mathcal{P}(X)$. Одна из важнейших теорем теории булевых алгебр утверждает, что всякая булева алгебра может быть реализована в виде поля множеств. Этот факт установил М. Стоун в 1936 году.

Теория вероятностей

Фундаментальными понятиями теории вероятностей являются *событие и вероятность*. Приводимая ниже аксиоматика этих понятий предложена в 1933 году А.Н. Колмогоровым, она общепринята в современной теории вероятностей. Фиксированное множество X трактуется как множество всех возможных исходов некоторого наблюдаемого эксперимента. Под событием понимается часть A множества X. Совокупность всех событий $\mathcal{A}$ есть поле множеств, то есть часть булевой алгебры $\mathcal{P}(X)$, причем эта часть сама является булевой алгеброй. Последнее влечет, что если A и C – события, то $A \cup C$, $A \cap C$ и $X–A$ также являются событиями. Каждому событию A приписывается некоторое число $\mathbf{P}(A)$, называемое вероятностью события A. При этом выполняются следующие условия:

1) $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$, $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{P}(X) = 1$;

2) если $A \cap C = \varnothing$, то $\mathbf{P}(A \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C)$.

Алгебра высказываний

Под *высказыванием* понимается повествовательное предложение, для которого в данный момент однозначно решается вопрос о том, истинно оно или ложно. Примерами высказывания служат: *сегодня воскресенье*, *Маша – школьница*, *слон умеет летать*. Предложения *задача трудная*, *Борис –*

предприимчивый человек высказываниями не являются, так как в силу своего субъективного характера не могут быть оценены однозначно как истинные или ложные.

Из данных высказываний можно строить составные высказывания с помощью знаков $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\longrightarrow$, называемых *пропозициональными связками.* Для высказываний P и Q под *дизъюнкцией* $P \vee Q$ (читается: P или Q) понимается такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно или P, или Q, или одновременно P и Q. *Конъюнкция* $P \wedge Q$ (читается: P и Q) тех же высказываний определяется как высказывание, истинное лишь в том случае, когда истинны оба высказывания P и Q одновременно. *Отрицание* P есть высказывание $\neg P$ (читается: не P), истинное лишь тогда, когда P ложно. *Импликацией* $P \longrightarrow Q$ (читается: если P, то Q) высказываний P и Q называют высказывание, ложное лишь в том случае, когда P истинно, а Q ложно. Под *исчислением высказываний* понимают раздел математической логики, посвященный анализу сложных предложений, возникающих при построении новых предложений из составляющих с помощью пропозициональных связок.

Переменная, содержательной областью изменения которой является множество высказываний, называется *пропозициональной переменной. Формула* исчисления высказываний определяется следующим образом: а) пропозициональная переменная, обозначаемая q_1, q_2, ..., q_n, ..., где n – натуральное число, есть формула; б) если P и Q – формулы, то $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \longrightarrow Q)$, $\neg P$ также формулы. Запись $P(q_1, q_2, ..., q_n)$ означает, что в построении формулы участвуют переменные q_1, q_2, ..., q_n, и только они. Эту формулу называют *тождественно истинной*, или *общезначимой*, или *тавтологией*, если она превращается в истинное высказывание при замене входящих в нее переменных $q_1, q_2, ..., q_n$ любыми высказываниями (истинными или ложными). Примером тавтологии может служить, например, формула

$$(q_1 \wedge \neg q_1) \longrightarrow ((q_2 \vee q_3) \longrightarrow (q_3 \longrightarrow \neg q_1)).$$

Последнее высказывание истинно всегда независимо от истинности или ложности высказываний q_1, q_2, q_3. Формулы P и Q называют *эквивалентными*, если обе импликации $P \longrightarrow Q$ и $Q \longrightarrow P$ тождественно истинны. Можно показать, что *множество всех формул исчисления высказываний есть булева алгебра*, если отождествить эквивалентные формулы. Булево дополнение при этом определяется отрицанием $\neg$. Эту алгебру часто называют *алгеброй Линденбаума–Тарского.* Роль единицы отводится классу тождественно-истинных высказываний. Приведенная конструкция лежит в основе *булева метода*, под которым понимается систематический перевод логических задач на язык булевых алгебр.

Булеву алгебру можно назвать математической моделью классической логической системы, разработанной Аристотелем и его последователями. Способы умозаключения, зафиксированные в этой системе, суть абстракции, возникшие в результате идеализации тех реальных операций, которые совершает разум в процессе рассуждений. Неизбежное огрубление, происшедшее при идеализации, пробуждает интерес к неклассическим логическим системам и их математическим моделям.

Алгебра электрических цепей

Будем рассматривать электрические цепи, разорванные рядом контактных выключателей. Контакт может находиться в двух состояниях: замкнутом и разомкнутом. Для цепи также возможны два состояния: пропускает ток или не пропускает ток. Две цепи отождествляются, если входящие в них контакты можно поставить во взаимно однозначное соответствие так, что при одном и том же состоянии соответствующих контактов сами цепи пребывают в одинаковом состоянии.

Обозначим через **I** цепь, которая всегда пропускает ток (цепь с запаянными контактами), а через **O** – цепь, которая ток не пропускает (разрыв цепи). Введем операции над цепями. Под *суммой* $C \vee D$ двух цепей C и D понимается цепь, полученная в результате параллельного соединения C и D; это означает такое соединение, при котором $C \vee D$ пропускает ток в том и только том случае, когда пропускает ток хотя бы одна из цепей C и D. *Произведением* $C \wedge D$ цепей C и D называют цепь, полученную в результате их последовательного соединения. Это означает, что $C \wedge D$ пропускает ток лишь тогда, когда пропускают ток обе цепи C и D. Наконец, для цепи C символ C^* обозначает такую цепь, которая пропускает ток лишь в том случае, когда C не пропускает ток (технологически это делается просто с помощью переключателя).

Электрические цепи при введенных операциях и отождествлении образуют булеву алгебру. Этот факт имеет важное прикладное значение: при проектировании и расчете сложных электрических сетей и электронных устройств можно использовать алгебраический аппарат булевых алгебр (см. [5]).

ПРОСТРАНСТВА КАНТОРОВИЧА

Пространство Канторовича возникает как синтез двух фундаментальных понятий: булевой алгебры и действительного числа. В самом деле, элемент пространства Канторовича можно трактовать как действительное число, “размазанное” над булевой алгеброй. Способ такой трактовки – глубокая математическая теория с богатым спектром приложений, выходящие далеко за пределы наших рассмотрений. Кроме того, с понятием пространства Канторовича связаны примеры булевых алгебр, возникающих в современном функциональном анализе. В этой связи стоит познакомиться с пространствами Канторовича.

Действительное векторное пространство есть некоторое множество E, для элементов которого x и y определены сумма $x + y$ и произведение λx, где λ – произвольное действительное число, причем сложение и умножение подчиняются известным еще из школы правилам: переместительный и сочетательный законы сложения и умножения, распределительный закон умножения относительно сложения, существование нуля и противоположных элементов, нейтральность умножения на единицу.

Действительное векторное пространство E, являющееся одновременно решеткой, называют *векторной решеткой*, если в нем неравенства можно складывать и умножать на положительные числа. Последнее означает, что если $x \le y$, то $x + z \le y + z$ и $\lambda x \le \lambda y$ для всех x, y, z из E и $\lambda > 0$. Наиболее важным классом векторных решеток являются *пространства Канторовича*, в которых дополнительно выполняется аксиома полноты: *всякое порядково ограниченное множество имеет супремум и инфимум.*

В векторной решетке определяют *модуль* элемента $x \in E$ формулой $|x| := x \vee (-x)$. Элементы x, $y \in E$ называют дизъюнктными, если $|x| \wedge |y| = 0$. Множество вида $A^{\perp}$, состоящее из всех элементов $x \in E$, дизъюнктных с каждым элементом непустого множества $A \subset E$, называют *полосой*. Совокупность всех полос $\mathcal{B}(E)$ векторной решетки E, упорядоченная по включению ($L \le K \longleftrightarrow L \subset K$), является полной булевой алгеброй, в которой булевы операции имеют вид

$$L \wedge K := L \cap K, \qquad L \vee K := (L \cup K)^{\perp\perp}, \qquad L^* := L^{\perp}.$$

Булеву алгебру $\mathcal{B}(E)$ называют *базой* E.

Возьмем элемент $u \in E$, $u \ge 0$. *Осколком* элемента u называют такой элемент $e \in E$, что $e \wedge (u - e) = 0$. Множество всех осколков $\mathcal{E}(u)$ элемента u представляет собой полную булеву алгебру. При этом решеточные операции наследуются из E, а булево дополнение имеет вид $e^* := u - e$. Если для некоторого элемента $u \in E$, $u \ge 0$, в E нет ненулевых дизъюнктных с ним элементов ($\{u\}^{\perp} = \{0\}$), то u называют *порядковой единицей*. Для любой порядковой единицы $u \in E$ булевы алгебры $\mathcal{B}(E)$ и $\mathcal{E}(E)$ изоморфны.

Примером пространства Канторовича служит множество F всех действительных функций f, определенных на отрезке $[0, 1] := \{t \in \mathbf{R}: 0 \le t \le 1\}$. Сумма, произведение и неравенство в F понимаются поточечно, то есть $(f + g)(t) := f(t) + g(t)$, $(\lambda f)(t) := \lambda f(t)$, $f \le g \longleftrightarrow f(t) \le g(t)$, где $0 \le t \le 1$. Пусть $\mathbf{1}$ – функция, тождественно равная единице. Осколок $e \in F$ элемента $\mathbf{1}$ удовлетворяет уравнению (относительно e): $[e \wedge (\mathbf{1} - e)](t) = \min\{e(t), (1 - e(t))\} = 0$. Таким образом, для каждого $0 \le t \le 1$ либо $e(t) = 0$, либо $1 - e(t) = 0$, значит, функция e принимает только два значения: 0 и 1. Такую функцию называют характеристической функцией множества тех чисел t, для которых e принимает значение 1. Итак, осколки $\mathbf{1}$ суть характеристические функции всевозможных множеств, содержащихся в [0, 1]. Значит, алгебра $\mathcal{E}(F)$, а с ней и база $\mathcal{B}(F)$ изоморфны алгебре множеств $\mathcal{P}(X)$, где $X := [0, 1]$.

Допустим, что в E фиксирована порядковая единица u. Если $e_1, ..., e_n$ – осколки u, а $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – действительные числа, то элемент вида $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$ называют *ступенчатым*. Фундаментальный факт теории векторных решеток – *теорема Фрейденталя* утверждает, что любой элемент пространства Канторовича приближается ступенчатыми элементами.

Пространство Канторовича именуют *расширенным*, если его нельзя расширить, не изменив при этом его базы. Пусть B – произвольная полная булева алгебра. Допустим, что каждому действительному числу $t \in R$ поставлен в соответствие единственный элемент $e(t) \in B$, причем выполнены требования:

1) если $s \le t$, то $e(s) \le e(t)$;

2) $\sup\{e(t): t \in R\} = 1$, $\inf\{e(t): t \in R\} = 0$;

3) $\sup\{e(s): s < t, s \in R\} = e(t)$ для всех $t \in R$.

Тогда говорят, что задано *разложение единицы* $e(\cdot)$ в булевой алгебре B.

Теорема. *Множество всех разложений единицы $\mathcal{R}(B)$ в полной булевой алгебре B можно снабдить алгебраическими операциями и порядком так, что $\mathcal{R}(B)$ превращается в расширенное пространство Канторовича, база которого равна B.*

Как видно из изложенного, расширенное пространство Канторовича и его база однозначно определяют друг друга. Таким образом, теории полных булевых алгебр и расширенных пространств Канторовича фактически равнообъемны.

Пространства Канторовича были введены в 1935 году как некоторое обобщение понятия числа [6, 7]. Спустя 40 с лишним лет оказалось, что и в самом деле элементы пространства Канторовича суть действительные числа в подходящей булевозначной модели. Но прежде чем говорить о булевозначных моделях, необходимы некоторые сведения из аксиоматической теории множеств.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ ЦЕРМЕЛО–ФРЕНКЕЛЯ

Теория множеств Цермело–Френкеля – формальная система. Под *формальной системой* понимается конечный набор символов и точно определенных правил манипулирования над этими символами для образования некоторых комбинаций, именуемых теоремами. Тем самым вопросы, относящиеся к бесконечным множествам, заменяются вопросами, связанными с комбинаторными возможностями формальной игры. В теории ZF допущены следующие символы: 1) буквы латинского алфавита, возможно с индексами, называемые символами переменных; 2) символы предикатов $\in$ (быть элементом) и = (равняется); 3) кванторы $\forall$ (для всех) и $\exists$ (существует); 4) пропозициональные связки $\vee$ (или), $\wedge$ (и), $\neg$ (не), $\longrightarrow$ (влечет), $\longleftrightarrow$ (тогда и только тогда); 5) скобки) и (. Правильно составленные комбинации из этих символов называют *формулами*. Формулы теории ZF строятся из элементарных формул вида $x \in y$ и $x = y$ применениями связок, кванторов, а также разумной расстановкой скобок. Переменную x в формуле φ называют свободной, если в φ нет подформул вида $(\forall x)\psi$ и $(\exists x)\psi$.

Для полного описания игры с символами необходимы правила математической логики, то есть *логические аксиомы* и *правила вывода*, фиксирующие стандартные способы классических умозаключений. Аксиомы ZF – первоначальный набор комбинаций символов, из которых с помощью правил вывода производятся новые комбинации символов – теоремы ZF. Помимо логических аксиом, общих для всех формальных систем, допущены следующие специальные или собственные аксиомы теории Цермело–Френкеля.

Аксиома объемности или экстенсиональности (введена Г. Фреге в 1893 году). Множества совпадают в том и только том случае, если они состоят из одних и тех же элементов:

$$(\forall x)(\forall y)((x \subset y \wedge y \supset x) \longleftrightarrow x = y).$$

Аксиома суммы или объединения (введена Г. Кантором в 1899 году и Э. Цермело в 1908 году). Объединение множества множеств также множество:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \longleftrightarrow (\exists u)(z \in u \wedge u \in x)).$$

Аксиома множества подмножеств или степени (сформулирована Цермело в 1908 году). Все подмножества данного множества составляют некоторое множество:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \longleftrightarrow z \subset x).$$

Аксиома подстановки (сформулирована А. Френкелем в 1922 году и Т. Скулемом в 1923 году). Произвольный взаимно однозначный образ множества есть множество:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \longrightarrow y = z) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (\forall u)(\exists \upsilon)((\forall t)(t \in \upsilon \longleftrightarrow (\exists s \in u)t = \varphi(u, \upsilon))),$$

где φ – формула, не содержащая свободных вхождений a. Из этой аксиомы следует, в частности, существование пустого множества $\varnothing$, а также *неупорядоченной пары* $\{x, y\}$, то есть множества, состоящего в точности из двух элементов x и y.

Аксиома бесконечности (введена Цермело в 1908 году). Имеется бесконечное множество

$$(\exists x)(\varnothing \in x \wedge (\forall y)(y \in x \longleftrightarrow y \cup \{y\} \in z)).$$

Аксиома фундирования (указана П. Бернайсом и К. Гёделем в 1941 году и заменила **аксиому регулярности**, предложенную Дж. фон Нейманом в 1925 году):

$$\forall x \ (x \neq \varnothing \longrightarrow (\exists y \in x)(y \cap x = \varnothing)).$$

Именно с аксиомой фундирования связано важнейшее представление о классе всех множеств как об *универсуме фон Неймана V*. Исходным объектом построения является пустое множество $\varnothing$ (то есть множество, не имеющее элементов). Элементарный шаг построения новых множеств из уже построенных состоит в формировании множества подмножеств $\mathcal{P}(V_\alpha)$ из имеющегося множества V_α. Далее эти множества объединяются $V_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{P}(V_\alpha)$, а затем повторяется упомянутый элементарный шаг. По определению полагают $V := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$. Запись $\alpha \in \mathrm{On}$ означает, что α есть ординальное число, стало быть, определение универсума V требует понятия ординального числа.

Нижние “этажи” универсума V устроены довольно просто: $V_0 := \varnothing$ по определению; $V_1 := \mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ – множество, содержащее единственный элемент $\varnothing$; $V_2 := \mathcal{P}(V_1) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ – множество, состоящее из двух элементов $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$; $V_3 := \mathcal{P}(V_2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, и т.д. Далее полагают $V_\omega := \bigcup_{n = 1, 2, \ldots} \mathcal{P}(V_n)$, где ω – ординальное число, совпадающее по определению с упорядоченным множеством натуральных чисел $\{1, 2, \ldots\}$. Однако процесс на этом не заканчивается, далее идут трансфинитные ординальные числа, например: $\omega + 1 := \{1, 2, \ldots, 1\}$, $\omega + 2 := \{1, 2, \ldots, 1, 2,\}$, $\omega + n := \{1, 2, \ldots, 1, 2, 3, \ldots, n\}$, $\omega + \omega := \{1, 2, \ldots, 1, 2, 3, \ldots\}$. Эта иерархия простирается до $\omega \cdot \omega$, ω^n, ω^ω и далее. Первые трансфинитные этажи универсума V после V_ω строятся так:

$$V_{\omega + 1} := \mathcal{P}(V_\omega), \qquad V_{\omega + 2} := \mathcal{P}(V_{\omega + 1}), \ldots$$
$$\ldots, V_{\omega + \omega} := \bigcup_{n = 1, 2, \ldots} \mathcal{P}(V_{\omega + n}) \text{ и т.д.}$$

Ограничимся этими пояснениями, так как точное определение ординального числа достаточно тонко.

Формальные комбинации символов можно осмысливать как некоторые утверждения о множествах. Возьмем формулу $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставить некоторые множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то получится какое-то утверждение $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ об этих множествах. Таким образом, формальная теория ZF толкует о множествах. При этом содержательной областью изменения переменных является универсум V, знак $\in$ представляет свойство быть элементом, а знак = символизирует равенство множеств.

Все понятия и конструкции общепринятой математики можно записать как формальные тексты в теории ZF, а все теоремы можно получить с помощью правил вывода из аксиом ZF. Систематическое построение теории множеств ZF см. в [8].

БУЛЕВОЗНАЧНЫЕ МОДЕЛИ

Пусть $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ – двухэлементная булева алгебра. Возьмем произвольное множество $X \in V$. С подмножеством $A \subset X$ свяжем характеристическую функцию χ_A, которая принимает значение 1 на множестве A и значение 0 на всех элементах из X, не входящих в A. Отождествим множество A и двузначную функцию χ_A. Тогда множество всех подмножеств $\mathcal{P}(X)$ непустого множества X отождествляется с множеством всех двузначных функций, определенных на X. Последнее множество обозначим символом $(X \longrightarrow \mathbf{2})$. Теперь вспомним конструкцию универсума фон Неймана V. При формировании новых множеств вместо $\mathcal{P}(V_\alpha)$ возьмем множество двузначных функций $(X \longrightarrow \mathbf{2})$. Вновь, начиная с пустого множества, шаг за шагом возникают множества $V_\alpha^{(\mathbf{2})} := \bigcup_{\beta<\alpha}(V_\beta \longrightarrow \mathbf{2})$. При этом окажется, что множества $\mathcal{P}(V_\alpha)$ и $(V_\alpha \longrightarrow \mathbf{2})$ эквивалентны, то есть находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом. Но тогда будут эквивалентными и совокупности $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathcal{P}(V_\alpha)$ и $V^{(\mathbf{2})} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} (V_\alpha \longrightarrow \mathbf{2})$. Таким образом, вместо универсума фон Неймана V с таким же успехом можно использовать и “двузначный универсум” $V^{(\mathbf{2})}$. Теперь для построения булевозначного универсума следует заменить в описанной конструкции двузначную булеву алгебру $\mathbf{2}$ на произвольную полную булеву алгебру B, то есть вместо двузначных функций нужно использовать булевозначные функции $(X \longrightarrow B)$. Итак, в качестве *булевозначного универсума* $V^{(B)}$ рассматривают класс $V^{(B)} := \bigcup_\alpha V_\alpha^{(B)}$, где $V_\alpha^{(B)} := \bigcup_{\beta<\alpha}(V_\beta \longrightarrow B)$. Подчеркнем еще раз, что $V^{(B)}$ состоит только из функций. В частности, $\varnothing$ – это функция с областью определения $\varnothing$ и областью значений $\varnothing$. Значит, “нижние” этажи $V^{(B)}$ устроены так: $V_0^{(B)} = \varnothing$, $V_1^{(B)} = \{\varnothing\}$, $V_2^{(B)} = \{\varnothing, (\{\varnothing\}, b) \colon b \in B\}$.

Теперь выясним, как же следует понимать высказывания о множествах применительно к элементам булевозначного универсума. Если $x, y \in V^{(B)}$, то x и y являются функциями, поэтому формулы $x \in y$ и $x = y$ не следует понимать буквально, то есть так же, как и в универсуме V. Вместо этого каждому теоретико-множественному высказыванию φ приписывают *оценку истинности* $[\![\varphi]\!]$, которая является элементом булевой алгебры B. Возьмем формулу $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$. Если вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ подставить элементы $A_1, A_2, ..., A_n$ булевозначного универсума, то получится какое-то утверждение $\varphi(A_1, A_2, ..., A_n)$ относительно этих элементов. Элемент $b := [\![\varphi(A_1, A_2, ..., A_n)]\!] \in B$ характеризует степень истинности полученного утверждения. Если утверждение φ относительно элементов $A_1, A_2, ..., A_n$ получает максимальное значение истинности $b = 1$, то говорят, что это *утверждение верно, или истинно, в модели* $V^{(B)}$.

Приписывание оценок следует, очевидно, проводить двойной индукцией, как учитывая характер построения формул из атомарных, так и задавая оценки упомянутых формул $[\![x \in y]\!]$ и $[\![x = y]\!]$, где $x, y \in V^{(B)}$, на основе способа построения $V^{(B)}$.

Ясно, что если φ и ψ – уже оцененные формулы ZF, $[\![\varphi]\!] \in B$ и $[\![\psi]\!] \in B$ – их оценки, то следует положить:

$$[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!],$$

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!],$$

$$[\![\neg\varphi]\!] = \neg[\![\varphi]\!] = [\![\varphi]\!]^*,$$

$$[\![\forall(x)\varphi(x)]\!] := \bigwedge\{[\![\varphi(x)]\!] \colon x \in V^{(B)}\},$$

$$[\![\exists(x)\varphi(x)]\!] := \bigvee\{[\![\varphi(x)]\!] \colon x \in V^{(B)}\}.$$

(Знаки $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ в левых частях равенств – пропозициональные связки, а в правых частях – булевы операции; знаки $\bigwedge$ и $\bigvee$ обозначают инфимум и супремум бесконечного множества.) Только такие определения позволяют обеспечить оценку “единица” для классических тавтологий. Остается указать выражения для оценки элементарных формул $x \in y$ и $x = y$. С первого взгляда эти выражения ничего не дают, но все же приведем их для полноты изложения:

$$[\![x \in y]\!] := \bigvee\{y(z) \wedge [\![x = z]\!] \colon z \in \mathrm{dom}(y)\},$$

$$[\![x = z]\!] := \bigwedge\{x(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!] \colon z \in \mathrm{dom}(y)\} \wedge$$

$$\wedge\bigwedge\{y(z) \Rightarrow [\![z \in x]\!] \colon z \in \mathrm{dom}(x)\},$$

где $\mathrm{dom}(x)$ – область определения функции. Ценность изложенных конструкций объясняется следующими фундаментальными фактами.

Принцип переноса. *Аксиомы и теоремы теории множеств Цермело–Френкеля истинны в булевозначной модели.*

Принцип максимума. *Если в булевозначной модели верно какое-то утверждение о существовании объекта с некоторыми свойствами, то существует такой элемент булевозначного универсума, для которого эти свойства выполняются в указанной модели.*

Принцип переноса доказывается вычислением оценок истинности для всех аксиом ZF, которые оказываются равными единице. Кроме того, устанавливается, что правила вывода не уменьшают оценку истинности [8–11].

Своим возникновением булевозначные модели обязаны выдающемуся достижению П.Дж. Коэна, установившему в начале 60-х годов непротиворечивость отрицания знаменитой континуум-гипотезы и аксиом ZF (см. [8]). Много замечательных результатов о независимости и непротиворечивости было установлено с помощью булевозначных конструкций (аксиома конструктивности, аксиома выбора, гипотеза Суслина и т.д.). Позже было обнаружено, что пространства Канторовича – это то же самое, что и вещественные числа в булевозначной модели. Фактически оказывается, что любая теорема о вещественных числах имеет аналог для пространств Канторовича, причем перевод одних теорем в другие осуществляется с помощью точно определенных процедур. Это направление в анализе называют булевозначным анализом. Оно охватывает много интересных вопросов теории функциональных пространств, теории операторов и операторных алгебр. Подробности см. в [11] и указанной там литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яглом И.М.* Булева структура и ее модели. М.: Сов. радио, 1980.
2. *Столл Р.Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968.
3. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
4. *Владимиров Д.А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.
5. *Колдуэлл С.* Логический синтез релейных устройств. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
8. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1973.
9. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
10. *Манин Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое. М.: Сов. радио, 1979.
11. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.

* * *

Анатолий Георгиевич Кусраев, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа Северо-Осетинского государственного университета им. К.Л. Хетагурова, директор Института прикладной математики и информатики при СОГУ, ведущий научный сотрудник Института математики Сибирского отделения РАН, действительный член Российской академии естественных наук, член-корреспондент Международной академии наук высшей школы, член Американского математического общества. Область научных интересов: векторные решетки, теория операторов, выпуклый анализ, нестандартные модели анализа. Автор более 100 научных работ, в том числе 14 монографий и учебных пособий, часть из которых переведена на английский язык.