ТЕОРЕМА С.В. КОВАЛЕВСКОЙ И СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

О. А. ОЛЕЙНИК

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

THE KOVALEVSKAYA THEOREM AND THE MODERN THEORY OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

O. A. OLEINIK

The Kovalevskaya theorem on the existence of analytical (represented in the form of a power series) solution of partial differential equations has numerous applications in the most important branches of the modern theory of partial differential equations and in other related domains of mathematics. Its use is essential in the proofs of many important and difficult theorems.

Теорема Ковалевской о существовании аналитических (то есть представимых в виде степенных рядов) решений уравнений с частными производными находит многочисленные применения во всех важнейших разделах современной теории дифференциальных уравнений и смежных областях математики. Ее использование существенно в доказательствах многих важных и трудных теорем.

Известный русский математик Софья Васильевна Ковалевская родилась в 1850 году в Москве. Ее деятельность столь значительна, ее личность столь многогранна и интересна, что о ней и ее научном творчестве написаны многочисленные книги и статьи (см., например, [1] и приведенную там обширную библиографию). Здесь я расскажу об одной теореме С.В. Ковалевской. Эту теорему часто называют также теоремой Коши–Ковалевской. Представленная в 1874 году в Гёттингенский университет (вместе с двумя другими работами) под названием “Zur Theorie der partiellen Differential-Gleichungen” в качестве докторской диссертации и опубликованная в 1875 году в “Journal für die reine und angewandte Mathematik” (Berlin. Bd. 80. S. 1–32), она явилась первым значительным результатом в общей теории уравнений с частными производными.

До тех пор глубоко изучались главным образом уравнения математической физики, то есть отдельные примеры уравнений с частными производными, возникающие в конкретных физических задачах, как, например, уравнение теплопроводности, описывающее распределение тепла в нагретом теле, уравнение колебания струны или мембраны, уравнение распространения звуковых колебаний, уравнение Лапласа, описывающее многие физические процессы электропроводимости, гидродинамики, стационарной теплопроводности и др. Большой вклад в изучение таких конкретных уравнений был сделан трудами Д’Аламбера, Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Пуассона, Фурье. Можно считать, что работа Ковалевской положила начало развитию общей теории уравнений с частными производными. В настоящее время теорема Коши–Ковалевской вошла во все основные учебники по уравнениям с частными производными, ее доказательство приводится на лекциях для студентов университетов. Теорема Коши–Ковалевской является важным рабочим аппаратом в современной теории дифференциальных уравнений.

Можно назвать лишь очень небольшое число теорем в теории уравнений с частными производными, которые бы использовались так часто и так по существу, как теорема Ковалевской. Многие десятки работ посвящены обобщениям теоремы Коши–Ковалевской. Во всех важнейших разделах современной теории дифференциальных уравнений и смежных областей математики, таких, как теория гиперболических уравнений, теория локальной разрешимости, теория гиперфункций и многие другие, теорема Ковалевской находит многочисленные применения, ее использование является существенным моментом в доказательстве многих важных и трудных теорем. Заметим, что это первая и единственная работа С.В. Ковалевской по теории уравнений с частными производными (всего у нее девять опубликованных работ).

В 1842 году французский математик О. Коши (1789–1857), систематически изучавший задачу с начальными условиями для дифференциальных уравнений, которая в настоящее время носит название задачи Коши, доказал существование аналитических решений этой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и для некоторого класса линейных систем уравнений с частными производными. Этим вопросам он посвятил четыре статьи.

Функция $\psi(x_1, ..., x_n)$ называется аналитической в окрестности точки $(x_1^0, ..., x_n^0)$, если в окрестности этой точки она представима в виде степенного ряда по целым неотрицательным степеням $x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0$.

Сформулируем теорему Коши–Ковалевской для простейшего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(0) = 0. \tag{2}$$

Если функция $f(x, y)$ *является аналитической функцией x и y в окрестности точки* $(0, 0)$, *то существует единственное аналитическое решение* $y(x)$ *уравнения* (1) *в некоторой окрестности точки* $x = 0$, *удовлетворяющее начальному условию* (2).

Доказательство аналогичной теоремы для дифференциального уравнения любого порядка и для системы таких уравнений О. Коши провел методом мажорант. Метод мажорант на примере задачи (1), (2) состоит в следующем. Функция $f(x, y)$ в уравнении (1) заменяется мажорантой, то есть аналитической функцией $F(x, y)$, коэффициенты разложения которой в степенной ряд неотрицательны и не меньше модулей соответствующих коэффициентов разложения в степенной ряд функции $f(x, y)$. Мажоранта выбирается по возможности настолько простой, чтобы уравнение (1) интегрировалось в явном виде, то есть из явного вида решения $y(x)$ задачи

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(0) = a_0, \quad a_0 = \text{const} > 0$$

следовала бы сходимость соответствующего степенного ряда, который является, очевидно, мажорантой для решения задачи (1), (2).

Коши пользовался мажорантами вида

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)}, \qquad M, a, b = \text{const} > 0, \tag{3}$$

что приводило к громоздким вычислениям. С.В. Ковалевская, по-видимому, не знала этих работ Коши; никаких ссылок на них в ее работах нет (интересно отметить, что Коши является автором 789 опубликованных работ, не считая нескольких объемистых монографий). В начале своей работы она приводит формулировки теорем существования аналитических решений обыкновенных дифференциальных уравнений и отмечает, что они взяты из лекций “уважаемого учителя господина Вейерштрасса”.

К. Вейерштрасс (1815–1897) пользовался более простыми, чем (3), мажорантами вида

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x + y}{a}\right)}, \qquad M, a = \text{const} > 0, \tag{4}$$

что упрощало доказательство существования аналитических решений методом мажорант. (Заметим, что большинство работ Вейерштрасса не было опубликовано при его жизни.)

С.В. Ковалевская в своей работе доказала теорему о существовании аналитического решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, сначала для квазилинейной системы уравнений с частными производными первого порядка, а затем для общей нелинейной системы любого порядка нормальной формы путем сведения ее к квазилинейной системе. Известный французский математик А. Пуанкаре (1854–1912) писал: “Ковалевская значительно упростила доказательство и придала теореме окончательную форму”. Для доказательства С.В. Ковалевская применила метод мажорант, используя мажоранты вида (4).

Сформулируем теорему Ковалевской, пользуясь принятыми в настоящее время обозначениями. Рассмотрим уравнение

$$D_t^n = F(t, x, u, ..., D^\alpha u), \tag{5}$$

где

$$u = u(t, x), \quad x = (x_1, ..., x_n), \quad D_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n), \quad D^\alpha = D_t^{\alpha_0} D_{x_1}^{\alpha_1} ... D_{x_n}^{\alpha_n},$$

$$|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n, \quad \alpha_0 < n, \quad |\alpha| \le n,$$

и начальные условия

$$D_t^s u|_{t=t_0} = \varphi^s(x), \qquad s = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Теорема С.В. Ковалевской утверждает, что *если функции* φ^s *аналитические в некоторой окрестности точки* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, *а функция F аналитическая в окрестности*

$$(t^0, x^0, \varphi^0, \ldots, D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n} \varphi^{\alpha_0}(x^0)),$$

то существует единственное аналитическое решение $u(t, x)$ *задачи* (5), (6) *в некоторой окрестности точки* (t^0, x^0).

С.В. Ковалевская, построив пример, показала, что если уравнение не имеет нормальной формы (5), то теорема может быть неверна. Этот пример высоко ценили К. Вейерштрасс и А. Пуанкаре, он состоит в следующем. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

не имеет аналитического решения в окрестности начала координат, так как, если такое решение существует, оно должно представляться рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}},$$

который, однако, расходится в любой точке при $t \neq 0$.

Таким образом, теорема Ковалевской имеет глубокий и в определенном смысле завершенный характер. Вейерштрасс в 1874 году писал Дюбуа-Реймону по поводу диссертации С.В. Ковалевской: "В диссертации, о которой идет речь, я (не считая того, что поправил многочисленные грамматические ошибки) не принимал другого участия, кроме того, что поставил задачу перед автором. И в этом отношении я тоже должен заметить, что я, собственно, не ожидал другого результата по сравнению с известным из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Я был, чтобы оставаться при простейшем случае, того мнения, что степенной ряд от многих переменных, удовлетворяющий формально уравнению в частных производных, должен также быть всегда сходящимся внутри некоторой области и должен, следовательно, представлять тогда функцию, действительно удовлетворяющую дифференциальному уравнению. Что это не так, как Вы видите из рассмотренного в диссертации примера уравнения $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, было открыто, к моему большому изумлению, моей ученицей совершенно самостоятельно, и притом сначала для гораздо более сложных дифференциальных уравнений, чем приведенное, так что она даже сомневалась в возможности получения общего результата; кажущиеся такими простыми средства, которые она нашла для преодоления возникшего таким образом затруднения, я высоко оценил как доказательство ее правильного математического чутья".

В настоящее время для доказательства теоремы Коши–Ковалевской и ее обобщений, кроме метода мажорант, применяются и другие методы, в частности метод последовательных приближений и метод сведения к симметрической системе. Поясним эти методы на примере линейной системы первого порядка

$$D_t u = \sum_{s=1}^{n} A^s(x, t) D_{x_s} u + f(x, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{7}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $A^s(x, t)$ – матрицы с аналитическими элементами, f, φ – заданные вектор-функции с аналитическими компонентами в окрестности точки P.

Метод последовательных приближений для доказательства теоремы Коши–Ковалевской и ее обобщений применялся П. Розенблюмом (США), Ж. Лерэ (Франция), Л. Хёрмандером (Швеция) и др. Аналитическое решение задачи (7) получается как предел последовательности функций $u^m(x, t)$, определяемых соотношениями

$$D_t u^m = \sum_{s=1}^{n} A^s(x, t) D_{x_s} u^{m-1} + f(x, t), \quad u^m|_{t=0} = \varphi(x).$$

Очевидно, функции u^m аналитичны в окрестности рассматриваемой точки P. С помощью довольно простых лемм об оценках производных аналитических функций доказывается, что последовательность u^m равномерно сходится в некоторой окрестности точки P.

Другой метод доказательства теоремы Коши–Ковалевской состоит в следующем. Если аналитическое решение $u = (u_1, \ldots, u_N)$ задачи (7) существует в комплексной окрестности точки P переменных t, $x_s + iy_s$, $s = 1, \ldots, n$, то оно удовлетворяет в этой окрестности следующей симметрической системе, для которой, как известно, задача Коши поставлена корректно:

$$D_t u = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{A^s + (A^s)^*}{2} D_{x_s} u + \frac{A^s - (A^s)^*}{2i} D_{y_s} u \right) + f(x + iy, t) \tag{8}$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x + iy), \tag{9}$$

где $(A^s)^*$ является матрицей, комплексно-сопряженной к A^s. Здесь мы воспользовались условием Коши–Римана в виде

$$D_{x_s}u + iD_{y_s}u = 0,$$

которое выполняется для аналитических функций переменной $x_s + iy_s$. Решая задачу Коши (8), (9) для симметрической системы, получаем аналитическое решение, существование которого утверждается в теореме Коши–Ковалевской. Идея доказательства этой теоремы указанным выше методом высказана в известной книге Р. Куранта “Уравнения с частными производными”.

Из приведенного доказательства видно, что требование аналитичности коэффициентов системы и вектор-функции $f(x, t)$ относительно t является несущественным для того, чтобы задача Коши (7) имела аналитическое относительно x решение. В этом направлении теорема Коши–Ковалевской обобщалась в работах многих математиков. В различных работах уточнялась величина окрестности, в которой существует аналитическое решение.

На других идеях основано доказательство теоремы Ковалевской, найденное Л.В. Овсянниковым (см. [4]). Оно является одним из самых изящных и применимо к исследованию очень широкого класса задач.

С теоремой Ковалевской тесно связано одно из важнейших понятий теории уравнений с частными производными – понятие характеристики. В классической теореме Коши–Ковалевской предполагается, что начальные данные заданы на гиперплоскости $t = 0$ либо на гиперповерхности, которые не имеют характеристических направлений.

Характеристическим направлением в точке (x, t) для системы (7) называется направление $(\xi_1, ..., \xi_n, \xi_{n+1})$ в пространстве $\xi \in R^{n+1}$, удовлетворяющее уравнению

$$\det\left\{\xi_{n+1}E - \sum_{s=1}^{n} A^s(x, t)\xi_s\right\} = 0, \qquad \sum_{s=1}^{n+1}\xi_s^2 \neq 0,$$

левая часть которого называется характеристическим многочленом или символом. Здесь E – единичная матрица.

Гиперповерхность, нормаль к которой в каждой ее точке имеет характеристическое направление, называется характеристикой.

Интересные обобщения теоремы Ковалевской содержатся в работах известного французского математика Ж. Лерэ. Он изучал задачу Коши для систем уравнений с аналитическими коэффициентами и аналитическими начальными функциями, допуская наличие характеристических направлений на гиперповерхности, на которой заданы начальные функции. Лерэ установил характер особенностей решений соответствующей задачи Коши, возможность их униформизации.

Рассмотрим общую систему вида

$$D_t^{n_j}u_j = \sum_{k=1}^{N} P_{kj}(x, t, D_x, D_t)u_k + f_j(x, t), \quad j = 1, ..., N,$$

где линейные операторы P_{kj} содержат дифференцирование по t порядка не выше $n_k - 1$. Выбирая $D_tu_j, D_t^2u_j, ..., D_t^{n_j-1}u_j$, $j = 1, ..., N$, как новые неизвестные функции, получим эквивалентную систему вида

$$D_tu_j = \sum_{k=1}^{N_1} Q_{kj}(x, t, D_x)u_k + f_j(x, t), \quad j = 1, ..., N_1. \tag{10}$$

Будем называть систему (10) с аналитическими коэффициентами системой Ковалевской, если для нее справедлива теорема Коши–Ковалевской. Условия этой теоремы дают, таким образом, достаточные условия для того, чтобы система (10) была системой Ковалевской. Если система (10) имеет постоянные коэффициенты, то теорема Коши–Ковалевской справедлива для системы (10) тогда и только тогда, когда многочлен

$$\det\{\lambda E - \|Q_{kj}(x, t, \xi)\|\} = \lambda^{N_1} + \sum_{s=1}^{N_1} a_s(\xi, x, t)\lambda^{N_1-s}$$

таков, что степень $a_s(\xi, x, t)$ по ξ не превосходит s. Простые примеры показывают, что в случае переменных коэффициентов это условие не является необходимым, а также и не является достаточным для принадлежности системы (10) к системе Ковалевской.

Ж. Лерэ доказал следующее обобщение теоремы Ковалевской: *теорема Ковалевской справедлива для системы* (10) *в том случае, когда порядок каждого члена определителя*

$$\det\{\lambda E - \| Q_{kj}(x, t, \xi)\|\}$$

не превосходит N_1. Очевидно, что это требование является более слабым, чем требование Ковалевской на систему иметь нормальную форму.

В случае одного уравнения теорема Ковалевской неулучшаема, то есть для справедливости теоремы Ковалевской необходимо и достаточно, чтобы уравнение имело нормальную форму

$$D_t^m u = \sum_{j=1}^{m} a_j(x, t, D_x)D_t^{m-j}u + f(x, t),$$

где порядок оператора a_j не превосходит j. Это замечательное утверждение недавно доказано в работе известного японского математика С. Мизохата.

Теорема Коши–Ковалевской содержит также утверждение о единственности аналитического решения задачи Коши. Возникает вопрос: существуют ли другие решения задачи Коши, кроме аналитического? Для систем с аналитическими коэффициентами отрицательный ответ на этот вопрос был дан в теореме Хольмгрена, доказанной в 1901 году. Интересно заметить, что теорема Хольмгрена доказывается с помощью теоремы Коши–Ковалевской.

Вопрос о единственности решения задачи Коши для уравнений и систем с гладкими коэффициентами явился предметом многих глубоких исследований. Наиболее общие результаты принадлежат А. Кальдерону и Л. Хёрмандеру и изложены в известной книге Л. Хёрмандера [2]. Польский математик А. Плис построил пример эллиптического уравнения четвертого порядка с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, для которого задача Коши имеет неединственное решение. Точнее, соответствующее однородное уравнение имеет решение с компактным носителем. Здесь мы видим, что отказ от аналитичности коэффициентов и замена их бесконечно дифференцируемыми функциями даже в случае эллиптических уравнений могут привести к неединственности решения задачи Коши.

Теория уравнений с частными производными в XX столетии и особенно за последние 50 лет достигла высокого уровня развития. И.Г. Петровский выделил классы гиперболических, параболических и эллиптических систем, которые в его работах и последующих работах многих математиков подверглись всестороннему и глубокому изучению. Для таких систем изучены качественные свойства решений, выяснен характер корректно поставленных задач. Но трудности изучения уравнений с частными производными и создания общей теории лежат в самой природе уравнений с частными производными.

Еще в 1946 году И.Г. Петровский в статье “О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными” писал: “Для самых простых неаналитических уравнений мы, как правило, не знаем, имеет ли такое уравнение хотя бы одно решение. Было бы очень важно исследовать этот вопрос” [3]. Начиная с 1956 года этот вопрос подвергался тщательному и глубокому изучению, в частности наглядно выявлены роль теоремы Ковалевской и ее место в общей теории уравнений с частными производными. В 1956 году большую сенсацию произвела работа Ганса Леви (США), в которой было доказано, что уравнение вида

$$\frac{1}{2}(D_x u + iD_y u) + (-i(x+iy)D_t u) = f(x, y, t) \qquad (11)$$

не имеет решений для некоторых бесконечно дифференцируемых функций $f(x, y, t)$ и что таких функций в определенном смысле большинство. Дальнейшие исследования Л. Хёрмандера показали, что пример Леви не является исключением. Неразрешимым при некоторой бесконечно дифференцируемой правой части является любое уравнение $Pu = f$ с аналитическими коэффициентами, для которого мнимая часть выражения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overline{P_0}}{\partial \xi_j} \frac{\partial P_0}{\partial \xi_j}$$

отлична от нуля в точках, где $P_0(x, \xi) = 0$. Здесь $P_0(x, \xi)$ – характеристический многочлен соответствующего оператора P.

Интересно заметить, что доказательство этой глубокой теоремы Хёрмандера, а также ее обобщений и доказательство неразрешимости для некоторых других классов уравнений и систем основаны на применении теоремы Коши–Ковалевской. Она используется для построения асимптотических решений, опровергающих справедливость априорной оценки, которая является необходимым условием разрешимости уравнения. Уравнение Леви (11) неразрешимо также в классе обобщенных функций или распределений. Недавно французский математик П. Шапира́ доказал, что уравнение

$$D_{x_1} u + i x_i D_{x_2} u = f(x_1, x_2)$$

при некоторых бесконечно дифференцируемых функциях $f(x_1, x_2)$ неразрешимо даже в классе гиперфункций. Гиперфункции – это объекты более общей природы, чем обобщенные функции. Теория гиперфункций возникла в последние десятилетия (создателем ее можно считать японского математика М. Сато, 1960 год).

Таким образом, исследования по неразрешимости уравнений, которые успешно ведутся в нашей стране и за рубежом (Ю.В. Егоров (Россия), Л. Ниренберг (США), Ф. Трев (США) и др.), показывают, что малейшие отступления от условий теоремы Ковалевской могут приводить к неразрешимым уравнениям. Они указывают, что в развитии теории дифференциальных уравнений решающую роль должна играть связь с физическими задачами.

Отметим, что теорема Коши–Ковалевской играет важную роль также и в исследованиях задачи Коши для гиперболических уравнений и систем (работы Ю. Шаудера, И.Г. Петровского, С.Л. Соболева). Для решений задачи Коши, а также краевых задач для гиперболических уравнений имеют место так называемые оценки, гарантирующие устойчивость решения задачи Коши. Приближенное решение задачи Коши для гиперболического уравнения можно получить по теореме Ковалевской, приближая коэффициенты уравнения, свободный член и начальные функции аналитическими функциями. Сходимость приближенных решений к точному решению задачи Коши вытекает из энергетических оценок.

Теорема Ковалевской применяется также там, где требуется построить асимптотические решения, то есть решения, удовлетворяющие уравнению лишь с определенной точностью. Такие решения используются, например, при установлении необходимых условий корректности задачи Коши для гиперболических уравнений с кратными характеристиками – это вопрос, который в последние годы привлек внимание многих исследователей. Теорема Коши–Ковалевской и ее модификации играют основную роль в вопросах теории гиперфункций, связанных с разрешимостью линейных уравнений с частными производными. Всякая гиперфункция может быть представлена как сумма граничных значений аналитических функций. Основная схема решения уравнений в гиперфункциях состоит в следующем: 1) правые части, начальные и граничные функции представляются в виде сумм граничных значений аналитических функций; 2) в аналитических функциях решение находится применением теоремы Коши–Ковалевской; 3) для получения решения в гиперфункциях берутся граничные значения полученного аналитического решения. Провести два последних этапа удается не всегда. Интересно отметить, что французские математики Ж.-М. Бони и П. Шапирá доказали теорему о существовании решения задачи Коши в классе гиперфункций для гиперболических уравнений с характеристиками произвольной кратности. Этот факт не имеет места в классе обобщенных функций.

Таким образом, мы видим, что теорема Ковалевской находит важные и существенные применения в исследованиях по теории уравнений с частными производными, выполненных вплоть до последнего времени, и тонкие современные исследования все в большей степени выявляют ее глубокий и завершенный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочина П.Я.* Софья Васильевна Ковалевская. М.: Наука, 1981.

2. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.

3. *Петровский И.Г.* Избранные труды. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. М.: Наука, 1987. С. 131–164.

4. *Егоров Ю.В.* Лекции по уравнениям с частными производными. М.: Изд-во МГУ, 1985.

* * *

Ольга Арсеньевна Олейник, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, главный научный сотрудник Математического института РАН им. В.А. Стеклова, академик РАН и пяти иностранных академий наук. Лауреат Государственной премии, лауреат премий им. М.В. Ломоносова, И.Г. Петровского, Н.Г. Чеботарева. Автор восьми книг и более 340 других публикаций.