

MATHEMATICS  
AND A PROBLEM  
OF SAFE EVACUATION  
WHEN NUCLEAR  
OR CHEMICAL  
CATASTROPHES HAPPEN

V. A. BABESHKO

*The article is dedicated to the problem of safe evacuation of the population who live near dangerous plants (nuclear power stations, chemical plants, etc.), when a catastrophe happens.*

*В статье излагается развитый в работах автора и его учеников подход к проблеме безопасной эвакуации населения, проживающего в районах, прилегающих к опасным производствам (атомным электростанциям, химическим заводам и т. д.), при авариях.*

**МАТЕМАТИКА И ПРОБЛЕМА  
БЕЗОПАСНОЙ ЭВАКУАЦИИ  
ПРИ АВАРИЯХ РАДИАЦИОННОЙ  
И ТОКСИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ**

В. А. БАБЕШКО

Кубанский государственный университет, Краснодар

**ВВЕДЕНИЕ**

Как ни старается человек быть предельно внимательным и осторожным в быту, он тем не менее не может освободиться от такого бедствия, как пожар. Время от времени пожары случаются в самых, казалось бы, защищенных от этого несчастья местах: в королевских дворцах, библиотеках, посольствах, картинных галереях и гостиницах, не говоря уже об учреждениях, квартирах, заводах и фабриках. Предвидя это, человек запасается огнетушителями, организует пожарные службы, применяет другие меры безопасности. К их числу относятся и планы эвакуации персонала в случае пожара, развешанные на каждом этаже служебного помещения или гостиницы, если там серьезно контролирует ситуацию пожарная служба. Эвакуационные планы, как правило, составлены с расчетом скорейшего покидания помещений персоналом, причем таким образом, чтобы в процессе эвакуации новые неприятности не постигли персонал.

А что случилось бы с эвакуацией, если бы стало известно, что некоторые проходы, обозначенные на эвакуационном плане, стали опасными для использования? Наверное, нужна такая служба информации, которая была бы в состоянии оперативно определять обстановку и немедленно информировать о безопасных путях эвакуации. Именно с такого рода проблемами могут столкнуться и уже сталкивались потерпевшие во время крупных аварий на Чернобыльской атомной электростанции, на предприятиях ядерного производства на Урале и в Сибири, на производствах, применяющих опасные отравляющие вещества. Будучи выброшенными в атмосферу, эти вещества, подхваченные ветром, могут "накрыть" эвакуируемых своим облаком, нанося невосполнимый ущерб. Хорошо, когда у поверхности Земли в этой зоне дует ветер и можно выбрать подветренную сторону для эвакуации. Но, как показывает практика, этого может оказаться недостаточно для безопасной эвакуации, потому что атмосфера является слоистой и в каждом слое может быть свое направление ветра. Именно так было во время выбросов на Чернобыльской АС, когда в трех слоях атмосферы было три различных направления ветра. Уклонившись от облака, уносимого нижним

слоем, можно угодить под оседающие облака верхних слоев даже вдали от места катастрофы.

Как можно предвидеть, где безопасные зоны и пути эвакуации? Этот вопрос выдвинут службами многих стран, развиваются различные методы решения этой проблемы, проводятся различные эксперименты. Один из подходов для продвижения в решении этой задачи предлагается ниже. Но прежде чем перейти к изложению этого подхода, необходимо ознакомиться с некоторыми сведениями об особенностях движения атмосферных масс воздуха, поведении различных видов загрязняющих веществ в атмосфере и о математическом моделировании этих процессов.

### КАКИЕ БЫВАЮТ ВЕТРЫ

Хорошо известно, что перемещения воздушных масс происходят из зоны с высоким давлением в зону с низким, вызывая тем самым ветры. Наиболее характерными в этом отношении являются ветры глобальных масштабов, охватывающие большие зоны Земли. Это ветры, вызываемые повышенной температурой вблизи экватора Земли и низкой температурой в зоне полюсов. Эти ветры, образующие замкнутые циклы, восходят в окрестности экватора до верхней границы тропосферы (6–10 км), направлены на этих высотах в сторону полюсов, затем ниспадают до приземных высот (0,1–2 км) направлением на юг.

Замкнутые циклы, описанные выше, называют ячейками Гадлея по имени английского ученого, открывшего их в 1735 году. Имея глобальный характер и являясь базой для построения прогнозов, эти ветры претерпевают многочисленные флуктуации, то есть отклонения, нередко вызывающие даже противоположные направления, особенно в нижних слоях атмосферы. Разность температур нагревания отдельных зон Земли оказывает существенное влияние на движение воздушных масс в нижних слоях атмосферы. Например, зоны, свободные от облаков, нагреваются сильнее, чем покрытые тучами. Или на границе берег–суша в летнее время утром море теплее суши, что вызывает ветер с суши в сторону моря, так как более холодный воздух над сушей вытесняет более теплый над морем, а вечером картина меняется на противоположную, так как суша нагревается в течение дня сильнее моря и также сильнее остывает за ночь. Утренние и вечерние ветры на прибрежных участках Земли называются бризами.

Однако не только разность в атмосферных давлениях является причиной, вызывающей ветер. Вращение Земли около своей оси также влияет на движение атмосферных масс. Для описания сложного движения, такого, как вращение Земли по отношению к условно неподвижной системе координат, связанной с Солнцем, и движение воздушных масс по отношению к Земле, целесообразно ввести

и подвижную систему координат, жестко соединенную с Землей. Тогда движение воздушных масс по отношению к Земле описывается в подвижной системе координат (оно называется относительным движением) в то время, как последние вращаются по отношению к условно неподвижной системе. Когда воздушные массы перемещаются в ячейках Гадлея вдоль меридианов, они совершают относительное движение, а удаляясь или приближаясь к оси вращения, испытывают переход из зоны с одними скоростями вращения подвижной системы координат в зоны с другими скоростями. Происходящее при этом изменение скорости воздушных масс порождает ускорение Кориолиса, названное так в честь его первооткрывателя и перпендикулярное плоскости, содержащей векторы вращения Земли и скорости относительного движения частиц воздушных масс.

Следствием появления ускорения Кориолиса является возникновение кориолисовых сил, проявляющихся в реакциях на совершающий относительное движение объект, в том числе частицу воздушной массы. Чтобы ощутить его эффект, достаточно осуществить следующий эксперимент. Представьте себе большой круговой диск с перилами вдоль радиуса, который может вращаться против часовой стрелки (если смотреть на диск сверху) около своей оси, в неподвижной прямоугольной системе координат, одна из осей которой совпадает с осью вращения, а две другие лежат в плоскости диска. Вы можете двигаться вдоль перил, совершая тем самым относительное движение в подвижной системе координат, жестко сцепленной с диском, первоначально совпадавшей с неподвижной системой и вращающейся вокруг оси, перпендикулярной диску. Если диск вращается, а вы стоите не двигаясь, то почувствуете, что масса вашего тела стремится вынести вас с диска вдоль радиуса, и, чтобы по-прежнему стоять на диске, вы должны упереться в пол и держаться на диске, используя усилия, направленные в сторону оси вращения диска. Это так называемая реакция на центростремительные силы, вызывающие центростремительное ускорение, которое исчезнет, если вы отпустите поручни и вылетите с диска, сохраняя уже только прямолинейное движение. Попробуйте теперь двигаться вдоль поручней от оси вращения диска. Вы почувствуете, что наряду с силой, выталкивающей вас с диска, возникает усилие, прижимающее вас к правому поручню. Это усилие будет тем ощутимее, чем быстрее вы будете двигаться вдоль перил. Давление со стороны правых перил, направленное влево от направления вашего движения, является реакцией перил на силы Кориолиса, порожденные кориолисовым ускорением. Давление возникает только во время вашего движения и немедленно исчезает, как только вы остановитесь. Если убрать правую часть перил, то вы попросту отклонитесь вправо от прямолинейного движения по диску.

Именно такое явление происходит с воздушными массами, движущимися вдоль меридианов Земли в соответствии с ячейками Гадлея. Поэтому ветры северного полушария, дующие вдоль меридиана, отклоняются вправо, а в южном полушарии — влево. Приведенный случай свидетельствует о том, что движение воздушных масс происходит не только в связи с перепадом давления. В данном случае справа от направления ветра давление растет, а слева падает, если это происходит в верхнем полушарии Земли.

Мы не случайно познакомились с основополагающими сведениями о движении воздушных масс, хотя и не можем претендовать на полноту изложения. Так, мы не касались особенностей ветров в горных районах, не говорили о смерчах, или торнадо, не касались такого явления, как “бора”, циклонов и антициклонов и других видов ветров, представляющих самостоятельный интерес. Заметим, что ученые стремились формализовать определение состояния атмосферы, научиться рассчитывать параметры ветров для целей гидрометеорологии, прогноза погоды. В этом направлении удалось сделать много: построены необходимые уравнения, описывающие перемещения воздушных масс, разработаны методы их решения, даны интерпретации эффектов, получаемых в результате решения уравнений. И тем не менее оказывается очень сложно предсказывать состояние атмосферных ветров в конкретном месте и на всех высотах, основываясь на этих расчетах.

Подытожим главное, что нам удалось выяснить:

- 1) перемещения воздушных масс в атмосфере носят сложный характер;
- 2) атмосфера слоиста как по составу, так и по направлениям ветров в каждом слое;
- 3) очень трудно давать прогноз о направлениях ветра в каждом слое над небольшим участком Земли в связи со сложностью описания поведения атмосферы около этого участка.

## О ПЕРЕНОСЕ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРЕ

Заметим, что существует много теорий и вытекающих из них уравнений, описывающих перенос загрязняющих веществ в атмосфере или водной среде. Они отличаются разной степенью точности моделирования этого процесса. Мы приводим достаточно точную и в то же время сравнительно простую и наглядную модель описания этого процесса, которая оказывается удобной для практического применения.

По-видимому, все наблюдали, как выходящий из трубы предприятия дым либо вздымается высоко вверх в безветрие, либо уносится в направлении ветра, продолжая подниматься и теряя свою окраску. Это типичная картина перемещения загрязняющих

выбросов. Надо только иметь в виду, что содержание их неоднородное. Выбросы включают в себя как несгоревшие частички топлива, так и сопутствующие топливу несгораемые материалы, в их числе и тяжелые металлы и их соли — свинец, цинк и другие, а также газы — CO, CO<sub>2</sub>, пар и т.д. Определенные элементы, входящие в состав выбросов, вступают во взаимодействие с атмосферой и либо распадаются на новые вещества, либо остаются неизменными. Последние называются консервативными, в то время как первые — неконсервативными. Попадая в атмосферу, выбросы подхватываются воздушным потоком и увлекаются в направлении ветра, если требуется знать распространение загрязняющих веществ. Разумеется, это только общие качественные рассуждения. Количественные данные можно получить только используя довольно сложные математические методы и модели, и тем не менее мы постараемся постичь их основы.

Для дальнейшего необходимо ввести прямоугольную систему декартовых координат. С этой целью совместим плоскость XOY с поверхностью Земли, а ось OZ направим вертикально вверх.

Представим себе аэрозольную субстанцию, сконцентрированную в некотором объеме перемещающейся массы — воздушной или водной, и обозначим ее концентрацию  $\varphi(x, y, z, t)$ . Очевидно, значение  $\varphi$  (размерность масса/объем) зависит от рассматриваемой точки пространства, времени и других факторов, о которых речь пойдет ниже. Под влиянием перемещающейся окружающей массы субстанция также начнет перемещаться по некоторой кривой. Поскольку мы считаем  $\varphi$  пока неизменной, продифференцируем ее вдоль этой кривой и тогда получим, следуя [1]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (1)$$

Справа стоит нуль, поскольку не изменилось значение  $\varphi$  вдоль кривой. Используем теперь известный факт о связи производной со скоростью частицы и обозначим проекции скорости субстанции на оси координат OX, OY, OZ соответственно

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w. \quad (2)$$

В результате уравнение о перемещении неизменяемой аэрозольной субстанции принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Скорости, описывающие перемещение субстанции вместе с окружающей массой, не могут быть разрывными функциями и осуществляют непрерывный перенос массы. Этот факт описывается уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Однако ранее мы отметили, что выбросы могут быть и неконсервативные, то есть могут распадаться со временем. Чтобы отразить этот факт в уравнениях, необходимо добавить к уравнению (1) дополнительный член  $\sigma\phi$ . В результате уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma\phi = 0, \quad (5)$$

$\sigma$  – коэффициент поглощения.

С физической точки зрения участвующие в уравнении (1) члены

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (6)$$

описывают движение аэрозольной субстанции под влиянием скоростей перемещающихся масс воздуха или воды. Поэтому их называют конвективными составляющими, составляющую  $\sigma\phi$  называют диссипативной, так как этим членом определяется поглощение (распад) субстанции. Для полноты учета всех основных факторов, влияющих на распространение аэрозольных субстанций в реальных средах, необходимо учесть диффузию вещества. Этот процесс описывается следующими членами, которые необходимо добавить к уравнению (1):

$$-\mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad (7)$$

$\mu, \nu$  – коэффициенты диффузии. В результате уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} - \\ & - \mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \sigma\phi = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь необходимо учесть наличие источника выбросов загрязняющих веществ. Будем считать, что этот выброс осуществляется, например, дымовой трубой, выбрасывающей загрязняющие вещества с интенсивностью, описываемой функцией

$$f(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t). \quad (9)$$

Такой источник называется точечным или сосредоточенным. Функция  $f$  добавляется к правой части уравнения (8). В принципе аналогичной функцией описывается и выброс загрязняющих веществ в случае аварий, когда аварийный выброс носит точечный характер. В то же время не исключается и ситуация, когда этот выброс носит площадной характер, то есть когда целая площадь, например завода, является источником извержения опасных загрязняющих веществ. Эта задача несколько более сложная, чем первая, но можно на нее посмотреть как на

проблему, когда на некоторой площади распределены достаточно плотно, то есть близко друг к другу, такие же источники, как трубы. Тогда такой набор источников будет приближенно описывать ситуацию площадного выброса. Есть и другие, более точные методы описания площадных выбросов, но они требуют специальных знаний и не могут быть кратко разъяснены.

Таким образом, окончательный вид уравнения, моделирующего перенос загрязняющих веществ в отдельно выбранном слое при наличии источника с введенной выше интенсивностью принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} - \\ & - \mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \sigma\phi = f. \end{aligned} \quad (10)$$

## О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

В начале предыдущего раздела было сказано, что дается изложение одной из моделей, описывающих распространение загрязняющих веществ в воздушной или водной средах. Используемая модель удобна для описания явлений в многослойных средах, когда направления и скорости потоков среды в каждом слое известны и постоянны в течение некоторого времени. Под постоянством понимается относительная их неизменность, так как в реальной ситуации имеет место небольшое изменение этих характеристик, однако оно не приводит к значительным отклонениям от реального перемещения загрязняющих веществ. Существуют модели, которые позволяют вначале рассчитать движение самой среды, вычислить значения ее скоростей, а затем использовать их в приведенном уравнении (10).

В нашей модели мы предполагаем, что значения скоростей можно определить быстрее иным путем, экспериментально, и не тратить на это много времени, проводя сложные расчеты на ЭВМ. В связи с этим нам не придется решать отдельно уравнения движения воздушных масс или жидкости, в которых при строгом подходе пришлось бы учитывать и члены, описывающие вращение Земли.

Теперь переходим к уравнениям (9). Прежде чем приступить к их решению, надо определиться, в какой области нужно их решать. Очевидно, необходимо высоту области ограничить той зоной, в которую в достаточном количестве проникают загрязняющие выбросы. Таким путем мы определяем верхний слой, на верхней границе которого можно считать, что концентрация загрязняющих веществ практически равна нулю, то есть  $\phi = 0$ . Это одно из так называемых граничных условий для дифференциального уравнения. Строгая математика требует, чтобы было и второе граничное условие, но уже на поверхности Земли. Важно знать, что если модель строится верно, то математические и физические требования

совпадают. С этой позиции объясним причину необходимости второго граничного условия. Представим себе, что оседающие на грунт загрязняющие вещества встречают три различных его состояния: ледовый покров, мокрый грунт и рыхлый грунт. Очевидно, при наличии ветра в первом случае загрязняющие вещества будут сдуваться и уноситься ветром в другие зоны, во втором все будет оседать на грунт, а в третьем частично оседать, частично отражаться от грунта. Математически в выбранной выше системе координат эти условия записываются соответственно в виде

$$z = 0: \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = b\varphi. \quad (11)$$

Здесь  $b$  — характеристика степени отражения загрязняющих веществ от поверхности.

Для полной корректности задачи в случае, когда атмосфера или водная среда оказываются многослойными, необходимо отразить тот физический факт, что загрязняющие вещества могут свободно, не скапливаясь на границе слоя, перемещаться через границу из одного слоя в другой. Обозначив через  $\varphi_k, \varphi_{k+1}$  концентрации загрязняющих веществ в двух соседних слоях соответственно, это условие математически записывают в виде

$$z = z_k: \quad \varphi_k = \varphi_{k+1}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial z}. \quad (12)$$

Здесь  $z_k$  — координата границы между слоями. Разумеется, в этом случае необходимо решать и уравнения (8) отдельно в каждом слое, то есть для каждой функции  $\varphi_k$ .

Оказывается, если опустить при решении уравнений одно из граничных условий, то модель будет неопределенной, в ней будут присутствовать неопределенные постоянные.

Теперь остается самая сложная часть задачи, состоящая в решении дифференциальных уравнений с приведенными граничными условиями.

Автору вместе с учениками удалось разработать новый оригинальный метод их решений, позволяющий в отличие от других методов получать решение уравнений в очень протяженных слоях, причем количество слоев может быть любое. Это удалось выполнить используя как аналитические методы, так и вычислительные. Эта часть исследования выходит далеко за рамки объема школьных знаний, и интересующиеся могут ознакомиться с краткой информацией по ним в опубликованных статьях [2–4], а более детально в научных отчетах в Кубанском государственном университете.

Благодаря этому решению оказалось возможным разработать и создать систему раннего оповещения об опасности при аварийном выбросе радиоактивных или сильно токсичных веществ в атмосферу или водную среду (в последнем случае и нефтепродук-

тов) и определять ожидаемые зоны наиболее интенсивного их осаждения. При различных направлениях и скоростях ветра в каждом слое эти зоны могут иметь сложное расположение. Безопасными путями эвакуации являются те, которые обходят зоны интенсивного осаждения опасных веществ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На первый взгляд может показаться, что потребность в разработанной системе оценки безопасных путей эвакуации населения при авариях будет возникать редко. На самом деле возможности использования системы гораздо шире, чем описаны выше. И практически каждый день происходят аварии, где наличие такой системы могло бы принести пользу, будь она в распоряжении пострадавших. Например, можно оценивать дрейф нефти, выброшенной при аварии в трубопроводе, проходящем через русло реки, как в зимнее, так и в летнее время. При наличии нашей системы можно было бы оперативно рассчитать дрейф нефти подо льдом, осуществить на его пути подрыв льда пиротехническими средствами и, очистив ото льда полынью по ширине реки, использовать нефтеулавливающую установку, не дав нефти дрейфовать на большое расстояние. Аналогичную проблему можно решать и при выбросе нефти в море или у морского побережья при авариях танкеров, что уже, к сожалению, далеко не редкое явление.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
2. Бабешко В.А., Зарецкая М.В., Кособуцкая Е.В. Об одной модели распространения загрязняющих веществ по глубине водного потока // Докл. Акад. наук. 1994. Т. 337, № 5.
3. Бабешко В.А., Глацкой И.Б., Зарецкая М.В., Кособуцкая Е.В. К проблеме оценки выбросов загрязняющих веществ источниками различных типов // Там же. 1995. Т. 342, № 6.
4. Babeshko V., Gladskoi I., Zaretskaja M., Kosobutzkaya E., Babeshko O. Distribution of Blow-outs Polluting Poly-layer Atmosphere. // Intern. Symp.: Technological Civilization Impact on the Environment, Karlsruhe, April 22–26, 1996.

\* \* \*

Владимир Андреевич Бабешко, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, действительный член Российской Академии наук. Область научных интересов: механика деформируемого тела, теория волновых процессов, математическое моделирование экологических и геоэкологических процессов. Автор и соавтор четырех монографий, 250 статей, нескольких изобретений, соавтор научного открытия.