MATHEMATICAL METHODS FOR PURPOSEFUL DESIGN OF ENGINEERING OBJECTS WITH GIVEN PROPERTIES

N. B. IL'INSKIY

Two approaches to design of objects with prescribed properties are presented. Underground concrete dambs contours and earth embankment slops are considered. Mathematical models of corresponding physical phenomena are described. Essence of the method of inverse boundary-value problems, allowing to perform reasonable search of object with given characteristics is shown.

Излагаются два подхода к задачам конструирования объектов с заданными свойствами. Рассматриваются подземные контуры бетонных и откосы земляных плотин. Описываются математические модели соответствующих физических процессов. Раскрывается сущность метода обратных краевых задач, позволяющего целенаправленно находить форму объекта по заданным свойствам.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ С НУЖНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Н. Б. ИЛЬИНСКИЙ

Казанский государственный университет

Известно, что многие инженерные проблемы сводятся к решению проблем чисто математических. Широкое распространение в задачах механики жидкости и газа получили краевые задачи, то есть задачи, в которых либо характеристики объекта (подземного контура плотины, контура профиля крыла самолета и т.п.) рассчитываются при заданной его форме, либо форма находится по заданным характеристикам. Первые задачи получили название прямых краевых задач, а вторые – обратных.

Переход от инженерных задач к чисто математическим нередко представляет большие трудности и доступен, как правило, исследователям, глубоко понимающим физическую сущность изучаемого процесса и блестяще владеющим математическими методами. Создание математических моделей физических процессов – важнейшее направление современной науки.

Последние несколько десятилетий усиленное внимание математиков направлено на так называемые некорректные задачи, то есть задачи, у которых решение может не существовать или быть неединственным, неустойчивым. К числу таких задач относятся и многие обратные краевые задачи, так как заранее задаваемым свойствам не всегда может соответствовать физически реализуемый объект.

Ниже на примере конкретных задач теории фильтрации освещаются затронутые вопросы.

ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Фильтрацией называется движение жидкостей, газов и их смесей (газированной жидкости) в пористой или трещиноватой среде. Теория фильтрации изучает законы движения жидкости, газа и удовлетворяет запросам практики путем создания методов фильтрационного расчета различного рода сооружений при их проектировании, постройке и эксплуатации. В области проектирования фильтрационные расчеты играют исключительно важную роль [1, 2].

Вопросы борьбы с фильтрацией в гидротехнических сооружениях определяют конструкцию и размеры этих сооружений. Так обстоит дело при проектировании плотин: бетонных, деревянных и земляных. Вода фильтруется под основаниями этих сооружений и в обход их примыканий – в берегах. При этом фильтрационный поток оказывает давление на сооружения, стремится вымыть под ними грунт. Изучение аварий гидротехнических сооружений приводит к выводу, что большая их часть происходит за счет разрушительного действия фильтрации. Отсюда ясно, насколько важно при проектировании гидросооружений дать правильный прогноз фильтрации и определить меры борьбы с ней.

Теория фильтрации возникла сравнительно недавно, правда, некоторые практические сведения о фильтрации известны давно. Развитие теории фильтрации началось во второй половине XIX столетия. В основу научной разработки большинства вопросов фильтрации был положен закон сопротивления при фильтрации жидкости, установленный в 1852 году французским инженером Г. Дарси. Первые теоретические исследования фильтрации, основанные на этом законе, были начаты Ж. Дюпюи. Ф. Форхгеймер рассмотрел более сложные задачи. Однако общей теории и общих дифференциальных уравнений фильтрации до 1889 года не было. Первая работа в этом направлении была написана выдающимся русским аэродинамиком Н.Е. Жуковским. Она называлась “Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод”. В ней Н.Е. Жуковский вывел дифференциальные уравнения фильтрации. В 1922 году теория фильтрации получила новый толчок в своем развитии благодаря работе Н.Н. Павловского “Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения”. Этот труд послужил фундаментом, на котором развивалось гидротехническое направление школы фильтрации.

В последующие годы развитие теории фильтрации и методов фильтрационного расчета гидротехнических сооружений проходило весьма интенсивно как в нашей стране, так и за рубежом. В нашей стране велось большое строительство гидроузлов на Волге, Енисее и других реках. Существенный вклад в развитие теории фильтрации внесли В.И. Аравин, Н.Н. Веригин, Б.Б. Девисон, Е.А. Замарин, С.Н. Нумеров, П.Я. Полубаринова-Кочина и многие другие.

Остановимся на физических и математических основах теории фильтрации. Итак, движение жидкости, газа или газированной жидкости в пористой среде называется фильтрацией. Пористую среду можно представить в виде твердого тела, заключающего в себе большое количество соединенных между собой пустот или же прорезанного большим количеством трещин. Можно также осуществить модель пористой среды из множества твердых частиц любой формы, например шарообразной. При изучении фильтрации имеются в виду пористые среды, образованные из грунтов, бетона, трещиноватых горных пород и других пористых материалов, фильтрация в которых представляет практический интерес. Отсутствие закономерности в распределении пор и трещин не позволяет определить скорости жидкости в любой точке поры или трещины. Необходимо знать расходы, скорости и давления в пределах маленьких площадок, величина которых, однако, велика по сравнению с размерами пор грунта. Если изучать скорость в пределах малой, но значительно большей сечения поры площадки, то можно говорить о некоторой средней скорости в порах, постоянной в пределах этой малой площадки. Эта скорость будет равна действительному расходу Q через площадку, поделенному на площадь $S_п$ сечений всех пор на данной площадке: $\upsilon_с = Q/S_п$.

Как видим, понятие средней скорости в порах не отличается от известного из гидравлики понятия средней скорости в сечении потока, например в трубе.

Однако при изучении фильтрации представляется целесообразным вообще отвлечься от размеров и формы пор, предполагая, что жидкость движется сплошь заполняя все пространство – поры и частицы грунта. При этом расход жидкости через любую площадку должен быть равен действительному ее расходу. Таким путем реальный поток жидкости в порах грунта мы заменяем фиктивным фильтрационным потоком той же жидкости, непрерывно заполняющим объемы пор и скелет грунта. В случае фильтрации через трещиноватую породу, если трещины достаточно многочисленны, к этой породе можно отнести сказанное выше о фильтрационном потоке в пористой среде.

Основываясь на понятии фильтрационного потока, можно заключить, что если действительный расход жидкости через площадку S равен Q, то скорость фиктивного фильтрационного потока в пределах данной площадки будет $\upsilon = Q/S$.

Эта фиктивная скорость называется скоростью фильтрации. При ее определении было принято, что фильтрационный поток заполняет все пространство, в действительности же жидкость движется через ту часть площади, которая занята порами. При коэффициенте пористости грунта m ($m = S_п/S$) эта часть площади равна mS.

Таким образом, $\upsilon_с S_п = \upsilon S$, то есть $\upsilon = m\upsilon_с$. Так как $m < 1$, то $\upsilon < \upsilon_с$. Эта формула устанавливает связь между фиктивной скоростью фильтрации υ и осредненной истинной $\upsilon_с$.

Итак, фиктивный фильтрационный поток, заменяющий реальный поток фильтрующей жидкости, должен обладать следующими свойствами: расход фиктивного фильтрационного потока через любую выделенную в пористой среде площадку равен расходу реального потока через эту площадку; давление фильтрационного потока на данную площадку равно давлению реального потока; сила сопротивления фильтрационного потока, приходящаяся на произвольно выделенный в нем объем, равна реальной силе сопротивления того же объема; скорости фиктивного фильтрационного потока распределены непрерывно в его объеме, они связаны со средними скоростями в порах зависимостью $\upsilon = m\upsilon_c$.

Введем в рассмотрение следующие характеристики: I – пьезометрический напор или градиент напора, определяющий отношение потерь напора Δh к пути течения Δs, и k – коэффициент фильтрации, характеризующий свойства грунта. Оказалось, что для многих грунтов (пески, глины, торфяные грунты, мелкотрещиноватые скальные грунты и т.д.) имеет место линейная зависимость скорости фильтрации υ от пьезометрического напора I:

$$\upsilon = kI.$$

Эта зависимость была установлена экспериментально Дарси и получила название закона Дарси.

В случае плоской фильтрации, исходя из закона Дарси и уравнения неразрывности (сплошности потока) $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, нетрудно убедится [1, 2], что существует комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, являющийся аналитической функцией в области фильтрации. Здесь $\varphi = -kh$ – потенциал скорости, ψ – функция тока, $z = x + iy$ – комплексная координата физической плоскости. Таким образом, исследование задач по расчету фильтрации в грунтах под плотинами свелось к решению краевых задач для аналитических функций. Естественно должны быть добавлены граничные условия.

Опираясь на полученную математическую модель фильтрации, удалось решить ряд задач по расчету гидротехнических сооружений, форма которых задавалась заранее. Эти задачи сводились, как правило, к прямым краевым задачам для аналитических функций. Мы далее остановимся на решении обратных задач теории фильтрации, позволяющих находить форму сооружений по заранее заданным характеристикам [3]. Но сначала несколько слов об истории возникновения этих задач.

Впервые обратный подход к фильтрационному расчету подземного контура плотин применили в 1952 году И.Н. Кочина и П.Я. Полубаринова-Кочина, построив подземный контур постоянной скорости в грунте конечной глубины и рассмотрев смешанные краевые задачи теории фильтрации, когда известные участки подземного контура прямолинейны, а на искомых участках скорость фильтрации постоянна. Такой подход позволил аналитически исследовать подземный контур плавного очертания. Методы обратных краевых задач впервые были применены к фильтрационному расчету подземного контура плотин также в 1952 году М.Т. Нужиным, что позволило решить некоторые интересные задачи при наличии водоупора, проницаемого основания, дренажей, смешанных задач и т.п. М.Т. Нужин, его ученики и последователи разработали способы построения подземного контура по эпюре фильтрационных скоростей $\upsilon(s)$ (s – дуговая абсцисса точки подземного контура) и эпюре напоров $h(x)$ (x – абсцисса). Также были решены обратные задачи с учетом проницаемости подземного контура. Обратные краевые задачи были применены к фильтрационному расчету каналов и земляных плотин; был доказан ряд интересных вариационных теорем обратных краевых задач напорной фильтрации; рассмотрены обратные краевые задачи нелинейной фильтрации.

Обратимся к описанию физического процесса фильтрации жидкости под бетонной водосливной плотиной и на этом примере рассмотрим метод конструирования подземной части плотины, опирающийся на теорию обратных задач.

На рис. 1 изображено вертикальное сечение такой плотины. Здесь H_1 – уровень воды перед плотиной, то есть в верхнем бьефе, H_2 – уровень воды в нижнем бьефе, $H = H_1 - H_2$ – действующий напор, AB и CD – границы верхнего и нижнего бьефов соответственно, BMC – подземный контур заглубленной в грунт части плотины (флютбет), AND – граница водоупора, T – глубина залегания водоупора. Под действием напора H вода из верхнего бьефа просачивается (фильтруется) под флютбетом BMC в нижний бьеф. В отличие от бурного верхового потока через плотину (при поднятом затворе mn для пропуска паводковых вод) фильтрационный поток движется очень медленно, но именно он приводит к большинству аварий. Этот поток размывает грунт под плотиной, ослабляя тем самым основание

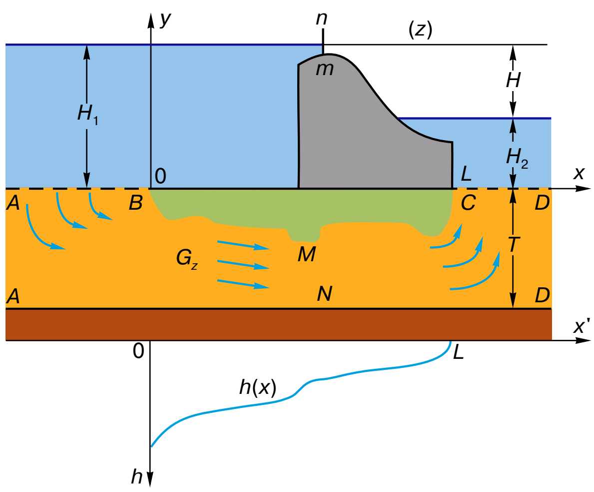

Рис. 1. Вертикальное сечение бетонной водосливной плотины на проницаемом основании конечной глубины

(явление суффозии), разрыхляет и выносит грунт в нижнем бьефе (явление выпора). Кроме того, фильтрующаяся жидкость оказывает давление на флютбет, стремясь как бы облегчить плотину, приподнять и опрокинуть ее. Наконец, на флютбет еще действует архимедова сила. Перечисленные факторы в совокупности приводят к разрушению плотин и последующим катастрофам, когда вал воды в несколько десятков метров устремляется вниз по течению реки, сметая и затопляя на своем пути селения и даже города. Чтобы избежать этих бед и чтобы плотины стояли надежно веками, необходимо при их проектировании, строительстве и эксплуатации опираться на результаты и рекомендации тщательно проверенных фильтрационных расчетов. Основываясь на них, выбирается рациональный подземный контур плотины, обеспечивающий устойчивость и надежность всего сооружения.

Приведем сначала постановку классической краевой задачи фильтрации под плотиной (рис. 1). Будем считать, что грунт дна реки, лежащий под плотиной, однородный и изотропный, а фильтрация установившаяся. Тогда в силу описанной физической схемы фильтрации и соответствующей математической модели задача сводится к краевой задаче в известной области G_z для аналитической функции $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где φ, ψ – гармонически сопряженные функции, связанные уравнениями Коши–Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$\varphi = -hk$, $h = p/\rho g + y$ – функция напора, p – давление, ρg – удельный вес фильтрующей жидкости, k – коэффициент фильтрации.

Чтобы найти давление, действующее на флютбет, и поле скоростей фильтрации, то есть выполнить фильтрационный расчет и оценить устойчивость плотины, надо определить комплексный потенциал скорости $w(z)$ в известной области G_z (прямая задача) по следующим граничным (краевым) условиям:

$$\varphi = \begin{cases} -kH_1 \text{ на } AB, \\ -kH_2 \text{ на } CD, \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} 0 \text{ на } BMC, \\ -Q \text{ на } AND, \end{cases}$$

где Q – фильтрационный расход, то есть количество просачивающейся под плотиной жидкости. Мы пришли к прямой краевой задаче для $w(z)$ в области G_z. Определив $w(z)$, найдем нужные фильтрационные характеристики, в том числе эпюру напоров $h(x)$ (рис. 1), показывающую, как падает напор по ширине флютбета.

Такая постановка задач фильтрационного расчета оснований гидросооружений является вполне закономерной и целесообразной, если подземный контур задан заранее. Однако, приступая к проектированию сооружения, проектировщик не имеет заранее заданного контура. В действительности ему необходимо решать другую задачу – задачу о построении контура основания, удовлетворяющего наперед заданным требованиям, в частности обладающего желательными фильтрационными характеристиками. Очевидно, решение задач такого рода с помощью методов, разработанных в предположении, что изучаемый контур известен, возможно только путем подбора: нужно ориентировочно задать несколько контуров, для каждого из них провести расчет и после этого выбрать наиболее подходящий вариант. Так и поступают обычно при практических расчетах. Например, при проектировании водосливной плотины Каховского гидроузла было исследовано 19 различных подземных контуров. Понятно, что все это требует большого количества расчетов и экспериментов.

В связи с созданием и развитием в Казанском университете теории обратных краевых задач стало возможным разработать методы, позволяющие непосредственно получить решение задач фильтрации в такой постановке, когда подземный контур заранее не задается, а отыскивается по заданным на нем фильтрационнным свойствам. В качестве таких свойств могут задаваться эпюра фильтрационного давления, закон распределения скоростей фильтрации по контуру основания, максимальное значение выходного градиента напора, полный фильтрационный расход под сооружением и др. Следовательно, представляется возможность построить подземный контур, обладающий заранее заданными важнейшими фильтрационными характеристиками, определяющими режим грунтового потока. Упомянутые задачи получили название обратных краевых задач теории фильтрации. Следует заметить, что после построения подземного контура, удовлетворяющего заранее заданным требованиям, дальнейший фильтрационный расчет не представляет никаких затруднений.

Дадим постановку обратной краевой задачи напорной фильтрации, когда подземный контур плотины отыскивается по заданной эпюре напоров.

Требуется построить подземный контур BMC плотины по заданной вдоль ширины L флютбета эпюре напоров $h = f(x)$, $0 \le x \le L$, где $f(x)$ – монотонно убывающая функция, которая имеет однозначную дифференцируемую обратную функцию $f^{-1}(h)$, $H/2 \ge h \ge -H/2$; H – действующий на сооружение напор, L – ширина флютбета (рис. 1).

Границы AB и CD бьефов прямолинейны и расположены на одном уровне, граница AND водоупора параллельна границам бьефов. Глубина T водопроницаемого слоя и коэффициент фильтрации k

известны, причем согласно принятой модели фильтрации $k = \text{const}$. Напор $H = H_1 - H_2$, ширина L флютбета и фильтрационный расход Q задаются заранее.

Исследование вопросов разрешимости этой задачи показало, что она поставлена корректно: ее решение существует, единственно, устойчиво. Более того, удается в аналитическом виде выписать само решение, то есть получить уравнение искомого подземного контура, распределение скоростей фильтрации вдоль найденного подземного контура, главный вектор и главный момент сил фильтрационного противодавления.

Таким образом, удалось найти форму флютбета с заданной величиной сил фильтрационного давления, необходимой для расчета плотины на устойчивость. Важно еще отметить, что по заданному расходу Q удается заранее оценить фильтрационную прочность грунта основания. В сказанном и виден конструктивный подход к проектированию гидросооружения.

Изложенный метод был использован при решении самых различных задач теории фильтрации с обобщением на более сложные конструктивные схемы.

Остановимся еще на одной интересной и важной задаче, связанной с проектированием бассейна гидроаккумулирующей электростанции (ГАЭС).

Для предотвращения выхода фильтрационного потока на склоны массива, вмещающего верхний бассейн ГАЭС, и обеспечения устойчивости этого массива используется система плоских горизонтальных дренажей – устройств для отбора фильтрующейся жидкости.

На рис. 2 показано вертикальное сечение верхнего бассейна ГАЭС и его дамбы. Дамба $ABCD$ (рис. 2, *б*) с сухим нижним бьефом и верховым откосом AB, наклоненным под углом $\pi\theta$ к непроницаемому основанию AD, оборудована системой двух горизонтальных дренажей в целях предотвращения выхода фильтрационного потока на низовой откос, CD – участок высачивания. Необходимо найти размеры дамбы и подобрать ширину и расположение дренажей так, чтобы уменьшить до заданных пределов выход фильтрационного потока на склон дамбы (участок высачивания CD).

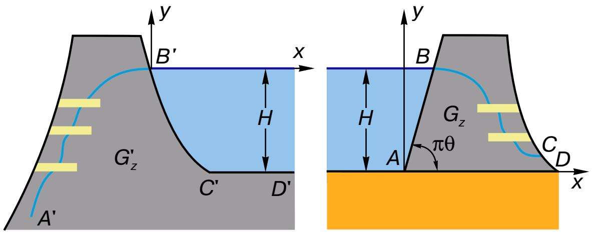

Рис. 2. Вертикальное сечение верхнего бассейна ГАЭС и его дамбы

На рис. 2, *а* изображено сечение склона массива верхнего бассейна с тремя горизонтальными дренажами. Требуется определить форму массива и расположение дренажей так, чтобы совсем не допустить выхода фильтрационного потока на склон массива.

Фильтрация предполагается плоской (что допустимо для достаточно протяженных верхних бассейнов), установившейся (ГАЭС сезонного типа аккумулирования) и подчиняющейся закону Дарси. Грунт основания считается однородным и изотропным.

Когда размеры дамбы и размеры и расположение дренажей заданы заранее, во-первых, не удается построить аналитическое решение задачи, а во-вторых, решение в такой постановке не гарантирует выполнения исходных требований относительно поведения фильтрационного потока (могут возникнуть промежуточные участки высачивания между дренажами, поток может выйти на склон массива). В этом случае придется менять исходные размеры плотины, расположение дренажей и повторять расчет заново, добиваясь выполнения исходных требований путем подбора. Такой путь вряд ли можно признать эффективным.

Воспользуемся методом обратных краевых задач. Рассмотрим сначала дамбу $ABCD$ с двумя дренажными щелями. Величины H и Q заданы, коэффициент фильтрации k известен. Задаем высоту расположения y_j, $j = 1, 2$, каждой из дренажных щелей, а также расходы q_j^- втекающей и q_j^+ вытекающей из них жидкости. Форму участка высачивания заранее не фиксируем, но задаем его высоту y_c и эпюру расходов по высоте. Требуется определить ширину дамбы по основанию AD, положение дренажных щелей по горизонтали, форму промежутка высачивания и вид депресионной кривой BC, то есть кривой, отделяющей влажный грунт от сухого.

В задаче, изображенной на рис. 2, *а*, требуется определить форму бассейна $B'C'D'$, положение дренажных щелей по горизонтали и вид депрессионной кривой $A'B'$ по заданной вдоль откоса $B'C'$ и дна $C'D'$ бассейна эпюре расходов $\psi = \psi(y)$, $0 \geq y \geq -H$, $0 \leq \psi \leq \infty$, высоте y_j расположения каждой дренажной щели и расходам q_j^- втекающей и q_j^+ вытекающей из нее жидкости, $j = 1, 2, 3$. Глубину водонепроницаемого основания считаем неограниченной.

Решение обеих задач в такой постановке удается построить в аналитической форме, а его численная реализация не вызывает затруднений. При этом сразу достигается выполнение требований, предъявляемых к сооружению.

В заключение отметим, что разработанный подход к решению задач конструктивного характера, опирающийся на теорию обратных краевых задач для аналитических функций, позволил не только решить несколько новых задач по нахождению формы важных инженерных объектов (см., например, [4]), но и поставить и решить серию задач оптимизационного характера (первая из подобных задач опубликована в [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аравин В.И.*, *Нумеров С.Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: ГИТТЛ, 1953.

2. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

3. *Нужин М.Т.*, *Ильинский Н.Б.* Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Казань: Казан. ун-т, 1963. 140 с.

4. *Ильинский Н.Б.*, *Якимов Н.Д.* Определение формы низового откоса грунтовой плотины по условиям фильтрационной прочности на границе откоса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1987. № 3. С. 101–107.

5. *Ильинский Н.Б.*, *Касимов А.Р.* Фильтрационная оптимизация формы земляного канала методом обратных краевых задач // Там же. 1984. № 3. С. 74–80.

* * *

Николай Борисович Ильинский, доктор физико-математических наук, профессор Казанского государственного университета, главный научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева, заслуженный деятель науки Татарстана и России, член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике. Лауреат первой премии Минвуза СССР за лучшую научную работу 1983 года. Область научных интересов – обратные краевые задачи механики жидкости и газа. Соавтор трех монографий и автор и соавтор более 120 научных статей.