CONTRACTIVE MAPPINGS AND SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS

A. G. BASKAKOV

Some methods are discussed to prove the existence and to find the solutions of the abstract nonlinear equations.

Обсуждаются некоторые методы доказательства существования решений абстрактных нелинейных уравнений, а также методы их решения.

СЖИМАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Г. БАСКАКОВ

Воронежский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

В традиционных курсах математики изучают различные способы решения уравнений, причем чаще всего ставится задача поиска точного решения рассматриваемого уравнения. Однако возникающие в приложениях математики уравнения таковы, что, как правило, не представляется возможным найти их точное решение, если оно у данного решения имеется.

В последние десятилетия математика претерпела серьезные изменения, связанные как с быстрым развитием вычислительной техники, так и с развитием вычислительных методов. Если вычислительная техника позволяет справляться с большим числом сложных уравнений, то абстрактные методы позволяют для разнообразных классов уравнений (таких, как алгебраические, дифференциальные, интегродифференциальные и т.д.) найти общие подходы к их решению.

Цель статьи – дать представление о некоторых результатах, связанных с вопросами существования и построения решений нелинейных уравнений. Вводятся некоторые математические понятия, с которыми знакомятся студенты-математики на первых курсах университетов.

ОТОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Желание охватить как можно большее число уравнений приводит к необходимости рассматривать отображения (функции), с помощью которых записываются уравнения достаточно общей природы, и встать на теоретико-множественную точку зрения. Для этого привлечем понятие отображения одного множества в другое, причем с самого начала подчеркнем, что это понятие будет считаться первичным, не подлежащим формально строгому определению (так же как и понятие числа, точки, множества и т.д.). Интуитивный смысл слова “отображение“ отражает наличие соответствия между элементами двух множеств (при желании можно ограничиться только рассмотрением числовых множеств).

Пусть: 1) задано (непустое) множество X; 2) задано непустое множество Y; 3) для каждого элемента множества X указан один вполне определенный элемент множества Y. В таком случае будем говорить об отображении множества X в множество Y.

Иначе говоря, понятие “отображение“ включает в себя неразделимое описание двух множеств X (область определения отображения), Y (область значения) и описание правила (способа, закона), по которому для каждого элемента x из множества X задается определенный элемент y из множества Y, в который элемент x отображается.

Закон (правило) соответствия, по которому для каждого элемента области определения множества X отображения задается ровно один элемент области значений Y, обозначим буквой f. Тогда отображение множества X в множество Y можно записать так (это обозначение принято в современной математике):

$$f\colon X \longrightarrow Y \quad \text{или} \quad X \xrightarrow{f} Y. \tag{1}$$

Элемент $y \in Y$, в который при данном отображении (1) переходит элемент $x \in X$, называется образом элемента x (или значением отображения на элементе x) и обозначается символом $f(x)$. Часто, когда ясен выбор множеств X и Y, для рассматриваемой функции используется обозначение f.

Выяснив смысл понятия “отображение“, можно дать определение функции: функцией называется отображение одного множества чисел в другое множество чисел. Таким образом, функция – тот частный случай отображения, когда область определения и область значений суть числовые множества.

В школьной математике термин “функция“ используют в несколько других смыслах, что не всегда достаточно четко разъясняется в учебниках и иногда приводит к недоразумениям.

Рассмотрим два примера функций.

Пример 1. Пусть $X = [0, 1]$, $Y = R = (-\infty, \infty)$. Каждому числу из $[0, 1]$ поставим в соответствие его квадрат.

Пример 2. Пусть $X = R = (-\infty, \infty)$, $Y = R$ и каждому действительному числу поставим в соответствие его квадрат.

В обоих примерах над выбранным числом x надо произвести одну и ту же операцию. Однако эти функции различны, так как у них не совпадают области определения. Следует иметь в виду, что сама по себе формула вида $y = f(x)$ не определяет, строго говоря, функцию, так как не описано то множество значений x, над которыми надо производить указанные в формуле операции. С этой точки зрения типичная школьная формулировка задачи: найти область определения функции

$$y = \sqrt{\sin x} + \arcsin\frac{1+x^2}{2x} \tag{2}$$

является некорректной. Здесь можно было бы говорить лишь об области определения аналитического выражения в правой части равенства (2), то есть о совокупности $x \in R$, для которых предусмотренные там операции выполнимы в множестве действительных чисел.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ

Одна из простых теорем существования решений выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* $f\colon [a, b] \longrightarrow R$ *– непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция и* $f(a)f(b) < 0$ (*то есть на концах отрезков она принимает значения разных знаков*), *тогда уравнение*

$$f(x) = 0 \tag{3}$$

имеет на отрезке $[a, b]$ *хотя бы одно решение.*

Теоремы существования обычно формулируют как теоремы существования неподвижных точек отображений.

Пусть $f\colon X \longrightarrow X$ – некоторое отображение множества X в себя. Элемент x_0 из X называется неподвижной точкой отображения f, если имеет место равенство $f(x_0) = x_0$.

Если $f\colon [a, b] \longrightarrow R$ – функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1, то рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функцию F вида $F(x) = \lambda f(x) + x$, где параметр λ выберем так, чтобы все значения функции F лежали на отрезке $[a, b]$. Например, можно положить $\lambda = M/m$, где $M = \max\limits_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2)$ и $m = \min\limits_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1)$, где x_1 и x_2 – точки из отрезка $[a, b]$, в которых достигаются минимум и максимум функции f соответственно.

Непосредственно из вида функции F следует, что x_0 – решение уравнения (3) тогда и только тогда, когда x_0 – неподвижная точка для функции F. Таким образом, теорема 1 эквивалентна следующей теореме, которая формулируется в виде принципа неподвижной точки.

Теорема 2. *Непрерывное отображение F отрезка в себя имеет неподвижную точку.*

Аналогично задачу о разрешимости систем уравнений с несколькими неизвестными можно свести к вопросу существования неподвижной точки многомерного куба (или шара) в себя.

Кроме проблемы существования неподвижной точки возникает естественный вопрос о способах ее приближенного вычисления. В следующей теореме одновременно решаются обе проблемы.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi\colon [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *– функция, удовлетворяющая условию: существует число q из интервала* $(0, 1)$ *такое, что*

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le q|x_1 - x_2| \tag{4}$$

для всех чисел x_1, x_2 *из* $[a, b]$. *Тогда функция* φ *имеет единственную неподвижную точку* $x_* \in [a, b]$, *которая является пределом последовательности* x_0, x_1, x_2, …, *где* x_0 *– произвольная точка из* $[a, b]$ *и остальные члены последовательности определяются по следующему правилу*: $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \ge 1$.

Изложенный в теореме метод построения неподвижной точки называется методом простых итераций или методом последовательных приближений, а последовательность (x_n) – итерационной последовательностью.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Естественным образом возникает вопрос о получении аналогов теорем 1–3 для разнообразных классов уравнений. Поскольку решениями уравнений могут быть объекты различного происхождения: числа, упорядоченные наборы чисел, векторы, функции (при рассмотрении дифференциальных и интегральных уравнений), то разумно получить аналоги соответствующих теорем для отображений множеств произвольной природы. Желание использовать условие (4) приводит к необходимости рассмотрения множеств, на которых введено расстояние. Такие множества называются метрическими пространствами. Дадим точные определения.

Пусть X – непустое множество и каждой паре элементов x, y из множества X поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$ со следующими тремя свойствами:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (свойство симметрии) ;

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Эти свойства выполняются для всех x, y, z из X. Число $\rho(x, y)$ называют расстоянием между элементами x и y.

Множество X с заданным на нем расстоянием называется метрическим пространством.

Рассмотрим несколько примеров метрических пространств.

Пример 1. На множестве R вещественных чисел расстояние определяется обычным образом: $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in R$. На R можно рассматривать и другие расстояния. Например, $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, $x, y \in R$.

Пример 2. На множестве R^n упорядоченных наборов n действительных чисел можно рассмотреть следующие три расстояния:

$$\rho_1(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}$$

(евклидово расстояние);

$$\rho_2(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|;$$

$$\rho_3(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ – произвольная пара наборов вещественных чисел.

Это метрическое пространство обычно используется при изучении систем уравнений с несколькими неизвестными.

Пример 3. Пусть $C[a, b]$ – множество непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Тогда формула

$$\rho(f, \varphi) = \max_{[a, b]} |f(t) - \varphi(t)|$$

определяет расстояние в $C[a, b]$.

В любом метрическом пространстве X с расстоянием ρ можно определить понятие сходящейся и фундаментальной последовательности следующим образом.

Последовательность $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ элементов метрического пространства X называется сходящейся к элементу $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число N, что $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ для всех $n > N$. Элемент x_0 называется пределом последовательности (x_n) и используется обычная запись $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Последовательность (x_n) элементов из X называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что $\rho(x_n, x_m)$ при всех $n, m > N$.

Метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность из X сходится к некоторому элементу из X.

Во всех рассмотренных здесь примерах метрических пространств они являются полными, кроме метрического пространства R с расстоянием d, определяемым с помощью арктангенса. Например, последовательность натуральных чисел (1, 2, ...) фундаментальна, но не имеет предела.

ТЕОРЕМЫ О СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Рассмотрим полное метрическое пространство X с расстоянием ρ. Отображение $f: X \longrightarrow X$ называется сжимающим, если существует такое число $q \in (0, 1)$, что

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \le q\rho(x_1, x_2) \tag{5}$$

для всех элементов x_1, x_2 из X.

Имеет место следующее обобщение теоремы 3.

Теорема 4 (о сжимающих отображениях). *Сжимающее отображение $f: X \longrightarrow X$ имеет единственную неподвижную точку $x_* \in X$, которую можно найти как предел последовательности*

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

где x_0 – произвольный элемент из X. Кроме того, имеют место оценки

$$\rho(x_m, x_n) \le \frac{q^m}{1 - q}\rho(x_1, x_0), \qquad m = 1, 2, ... \tag{7}$$

Доказательство. Покажем, что последовательность (x_n) фундаментальна. Из (5) и (6) получаем оценки

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \le \rho(f(x_k), f(x_{k-1})) \le q\rho(x_k, x_{k-1}) \le$$
$$\le q^k\rho(x_1, x_0).$$

Для определенности считая, что $n > m$, из неравенства треугольника получаем оценки

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_m, x_{n-1}) + \rho(x_{n-1}, x_n) \le$$
$$\le \rho(x_n, x_{n-1}) + \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + \rho(x_{m+1}, x_m) \le$$
$$\le q^n\rho(x_1, x_0) + q^{n-1}\rho(x_1, x_0) + \ldots + q^{m-1}\rho(x_1, x_0) \le$$
$$\le \frac{q^m - q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0) \le \frac{q^m}{1-q}\rho(x_1, x_0) \longrightarrow 0$$

при $m \longrightarrow \infty$.

Таким образом, построенная последовательность (x_n) фундаментальна. Поскольку метрическое пространство X полно, то оно имеет предел x_* из X. Так как

$$\rho(x_*, x_m) \le \rho(x_*, x_n) + \rho(x_m, x_n),$$

то при $n \longrightarrow \infty$ из приведенных оценок получаем доказываемую оценку (7).

Поскольку при $m \longrightarrow \infty$

$$\rho(x_*, f(x_*)) \le \rho(x_*, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, f(x_*)) =$$
$$= \rho(x_*, x_{m+1}) + \rho(f(x_*), f(x_{m+1})) \le$$
$$\le \rho(x_*, x_{m+1}) + \rho(x_m, x_*) \longrightarrow 0,$$

то $f(x_*) = x_*$, то есть x_* – неподвижная точка отображения f.

Докажем ее единственность. Пусть x_{**} – другая неподвижная точка для f. Тогда из оценки

$$\rho(x_*, x_{**}) = \rho(f(x_*), f(x_{**})) \le q\rho(x_*, x_{**})$$

следует, что $\rho(x_*, x_{**}) = 0$ и поэтому $x_* = x_{**}$. Теорема доказана.

Неравенство (7) позволяет определить, сколько нужно найти последовательных приближений, чтобы найти неподвижную точку x_* отображения f с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Например, неравенство $\rho(x_*, x_m) < \varepsilon$ будет заведомо выполнено, если

$$m > m(\varepsilon) = \frac{1}{\ln q}\ln\frac{\varepsilon(1-q)}{\rho(x_1, x_0)}.$$

Теорема 4 находит широкое применение при поиске решений систем алгебраических уравнений, дифференциальных, интегральных уравнений, а также лежит в основе различных методов, используемых в вычислительной математике.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Рассмотрим обобщения теорем 1 и 2, которые связаны с вопросами существования неподвижных точек отображений. Формулировка соответствующих результатов использует следующие важные понятия.

Множество K из метрического пространства X, на котором введено расстояние ρ, называется компактным, если из любой последовательности (x_n) элементов этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой также принадлежит K.

Множество B из линейного пространства X (то есть множество, на котором определены операции сложения и умножения на числа из R элементов) называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками x_1, $x_2 \in B$ множеству B принадлежат все точки вида $ax_1 + (1-a)x_2$, $a \in [0, 1]$ (множество таких точек называется отрезком, соединяющим точки x_1, $x_2 \in B$).

Теорема 5. *Всякое непрерывное отображение $f: K \longrightarrow K$ выпуклого компактного множества K из линейного пространства R^n имеет неподвижную точку.*

Эта теорема доказана голландским математиком Л.Э.Я. Брауэром. Поскольку любой отрезок $[a, b]$ из R является выпуклым компактным множеством, то теорема 2 следует из теоремы Брауэра.

Рассмотрим некоторые следствия теоремы Брауэра.

Теорема Бореука–Улама для окружности. *Пусть $f: C \longrightarrow R$ – непрерывная функция на окружности C. Тогда существует пара точек – антиподов x, x^* такая, что $f(x) = f(x^*)$.*

Следствием этой теоремы является тот факт, что на любой большой окружности земного шара (например, на экваторе) найдется пара антиподов, в которых температура воздуха одинакова.

Теорема (о блинах). *Если A и B – ограниченные фигуры на плоскости, то существует прямая, которая делит каждую из этих фигур на две части равной площади.*

В этой теореме предполагается, что каждая фигура имеет площадь (что может быть не всегда, а если фигура имеет сложную форму). Образно говоря, теорема утверждает, что два блина, лежащие на тарелке, можно разрезать точно пополам одним взмахом ножа.

Теорема Брауэра имеет разнообразные обобщения, которые находят широкое применение в вопросах существования решений дифференциальных и интегральных уравнений, в математической экономике (теория экономического равновесия) и теории игр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматгиз, 1976. 542 с.
2. *Шашкин Ю.А.* Неподвижные точки. М.: Физматгиз, 1989. 80 с.

* * *

Анатолий Григорьевич Баскаков, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математических методов исследования операций Воронежского государственного университета. Область научных интересов – функциональный анализ. Автор двух книг и 85 научных статей.