INVERSE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS AND THEIR APPLICATIONS

N. B. IL'INSKIY

The article is dedicated to the modern theory of the inverse boundary-value problems, which finds its applications in aerohydrodynamics, theory of filtration, and theory of explosion. Concept of the direct and inverse boundary-value problems is given. Problems of formulation and solving incorrect problems of mathematical physics are discussed. Examples on calculation and design of airfoils are described.

Статья посвящена современной теории обратных краевых задач, находящей приложения в аэродинамике, теории фильтрации и теории взрыва. Даются понятия классических прямых и обратных краевых задач. Обсуждаются проблемы постановки и решения некорректных задач математической физики. Приводятся примеры, связанные с расчетом и проектированием профиля крыла самолета и экраноплана.

ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Н. Б. ИЛЬИНСКИЙ

Казанский государственный университет

Обратные краевые задачи [1] – сравнительно новое научное направление математической физики, получившее применение в механике и технике. К настоящему времени оно довольно хорошо разработано, особенно для аналитических функций комплексного переменного, и находит приложение в таких областях науки, как аэродинамика, гидродинамика, теория фильтрации, теория взрыва, электрохимическая размерная обработка.

СУЩНОСТЬ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Под краевыми задачами понимают задачи, в которых требуется найти функцию или систему функций, удовлетворяющих в заданной области некоторому дифференциальному уравнению или системе дифференциальных уравнений, а на границе области – заданным условиям. Такие краевые задачи, когда задана область, в которой отыскивается функция, удовлетворяющая внутри области заданному дифференциальному уравнению и заданным условиям на границе области, позднее стали называть прямыми краевыми задачами. Эти задачи проникли в математику в конце XVIII века (Л. Эйлер, П. Лаплас), однако теория их продолжает развиваться. Интересно отметить, что впервые краевыми задачами стали заниматься при решении задач механики и физики. Приведем простой пример прямой краевой задачи.

На рис. 1, *а* в плоскости (x, y) изображена область D с границей L; s – дуговая абсцисса этой границы. В области D функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Суть задачи в следующем: в заданной области D с границей L найти функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую приведенному выше уравнению (на рис. 1, *а*, *в* символом Δ обозначен оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$), по заданным на L граничным значениям этой функции $\varphi = f(s)$. Это классическая краевая задача Дирихле для гармонической функции. Существуют другие, более сложные прямые краевые задачи, например: Неймана, Шварца, Гильберта, Римана [2, 3]. Эти задачи призваны дать ответ на вопрос, какими свойствами обладает заданный

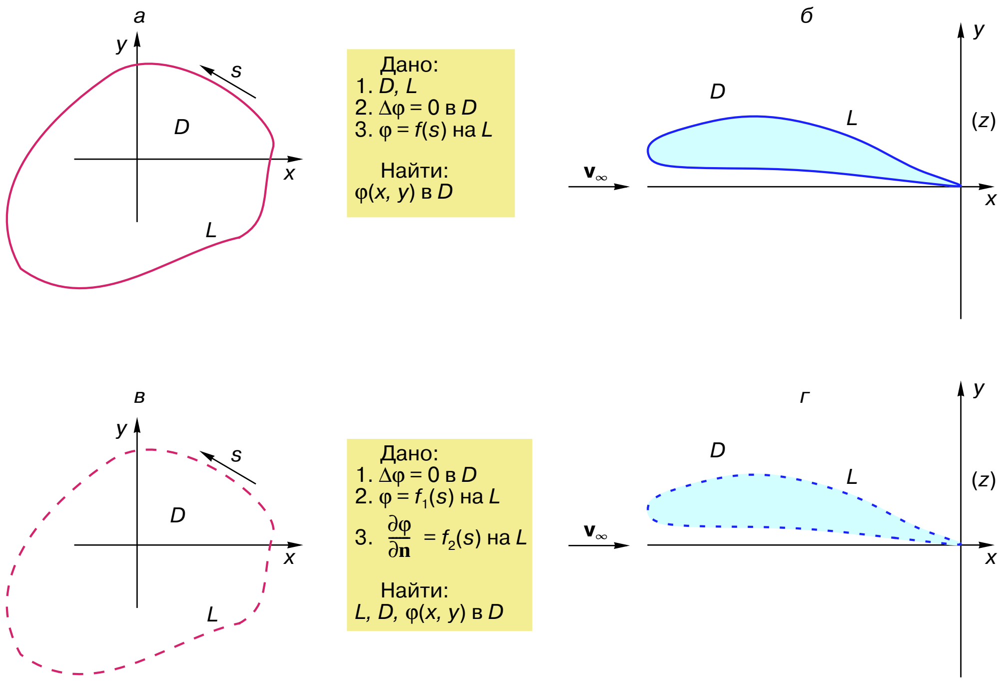

Рис. 1. *а* – прямая краевая задача для гармонической функции (задача Дирихле); *б* – прямая краевая задача аэрогидродинамики; *в* – обратная краевая задача для гармонической функции (задача Рябушинского); *г* – обратная краевая задача аэрогидродинамики

объект в условиях изучаемого явления. Чтобы пояснить это, приведем пример из аэрогидродинамики.

На рис. 1, *б* показан профиль крыла, которое обтекается плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью $\mathbf{v}_\infty$. В чем состоит прямая задача? Профиль задан, потенциал скорости $\varphi(x, y)$ является гармонической функцией, то есть удовлетворяет уравнению Лапласа. Ее нормальная производная $\partial\varphi/\partial\mathbf{n}$ на границе равна нулю, что выражает условие непроницаемости профиля крыла. Требуется найти функцию $\varphi(x, y)$ в области течения. Решив эту задачу, мы найдем потенциал скорости, рассчитаем распределение скоростей и величин давления по профилю крыла, определим подъемную силу.

Однако на практике часто возникают задачи иного характера, именно когда форма тела заранее неизвестна и ее следует построить так, чтобы обеспечить выполнение заданных свойств. Когда инженер-проектировщик приступает к созданию крыла самолета, никто заранее эту форму указать не может. Он сам, используя свой опыт, интуицию, опыт предшественников, задает первоначальную форму. Но после расчета этого профиля может выясниться, что его свойства заданным условиям не удовлетворяют, например мала подъемная сила или велико сопротивление. Как же в этом случае поступать? Обычно подправляют форму профиля и снова производят прямой расчет. И нередко так поступают десятки раз, причем этот процесс может продолжаться бесконечно долго, не приводя к цели. Для того чтобы процесс проектирования сделать более рациональным, задачу надо переформулировать. Следует задавать не саму форму профиля, а дополнительные граничные условия, которые отражали бы необходимые свойства. Так мы приходим к обратной краевой задаче.

На рис. 1, *в* дано определение обратной краевой задачи для гармонической функции (задача Рябушинского). Функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области D, форма которой неизвестна. Требуется определить форму области и саму функцию по заданным на границе значениям этой функции и величины ее нормальной производной. За пояснением вновь обратимся к аэрогидродинамике (рис. 1, *г*). В обратной задаче аэрогидродинамики форма профиля не задается, а отыскивается. Как и прежде, потенциал скорости является гармонической функцией в потоке и условие непроницаемости выражается равенством нулю граничных значений нормальной производной потенциала. Однако этого для решения задачи недостаточно, требуется еще одно условие. Известно, что практически все аэродинамические характеристики крылового профиля могут быть выражены через распределение скоростей потока вдоль контура профиля. Поэтому в обратной задаче задается распределение скоростей потока вдоль контура профиля крыла.

Это дает дополнительное условие для граничных значений потенциала и делает задачу математически определенной. Известной является также и величина скорости набегающего потока υ_∞, то есть скорости, с которой движется летательный аппарат. Описанная задача послужила мощным стимулом в развитии не только обратных задач аэродинамики, но и всей теории обратных краевых задач для аналитических функций.

ЗАДАЧИ ПРОГНОЗА И ЗАДАЧИ КОНСТРУИРОВАНИЯ

Следует отметить, что задачи, в которых отыскивается граница или часть границы, составляют достаточно обширный класс краевых задач с неизвестными границами, интенсивно исследуемый в последнее время. Однако среди задач с неизвестными границами надо различать два широких подкласса. Один из них содержит задачи прогноза. В них граничные условия полностью определяются принятой физической моделью процесса и менять их по своему усмотрению мы не можем. В примере на рис. 2, *а* изображено сечение канала, из которого высачивается вода. Требуется определить область, которая будет смочена фильтрующейся жидкостью. Это практически важная задача расчета области подтопления территорий является задачей прогноза. Другой подкласс включает задачи конструирования. На рис. 2, *б* представлена задача нахождения формы подземного контура *BC* бетонной водосливной плотины. Устойчивость этого гидросооружения определяется характером потока жидкости, которая под действием напора медленно фильтруется под плотиной. Как правильно выбрать подземный контур этой плотины? Заранее он неизвестен, но мы знаем, какими свойствами он должен обладать. Скорость течения жидкости под плотиной не должна превышать критической скорости размыва грунта, не должно происходить выпора и суффозии. Эти данные позволяют сформулировать задачу отыскания подземного контура, имеющую конструктивный характер [4].

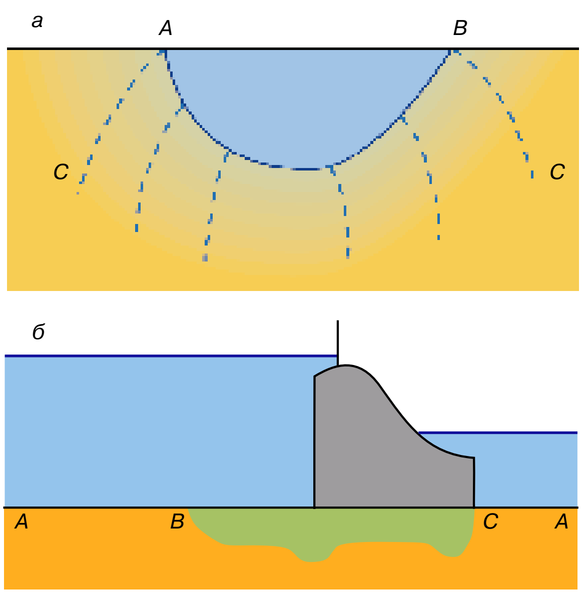

Рис. 2. *а* – задача фильтрации из канала; *б* – задача фильтрации под бетонной плотиной

О НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Таким образом, постановка и решение обратных задач позволяют значительно повысить эффективность процесса проектирования различных объектов. Однако логично и понятно, что природа не всегда может выдать то, что мы желаем. Допустим, надо построить профиль, обладающий подъемной силой в два раза большей, чем какой-либо известный профиль. Задав эти свойства и решив обратную задачу, можно получить незамкнутый контур профиля и даже неоднолистный. О чем это говорит? Математика дает решение задачи, но это решение физически нереализуемо, потому что справедливо лишь на многолистной римановой поверхности и реализовать на практике такое решение невозможно. С этой точки зрения обратные краевые задачи относятся к так называемым некорректным задачам.

Что значит корректная задача? Задача называется поставленной корректно, если ее решение существует, единственно и устойчиво. То, что решение существует, – это понятно. Если вам предложат найти корень квадратный из отрицательного числа в классе действительных чисел, то вы ответите, что такая задача неразрешима. Что значит неединственность решения, тоже понятно: это когда мы можем получить несколько разных решений одной задачи. Что значит устойчивость решения? Это когда малым изменениям в исходных данных соответствуют малые изменения в решении. Если же малым вариациям исходных данных будут соответствовать значительные изменения решения, то такое решение называется неустойчивым. Математики на протяжении долгого времени старались обходить некорректные задачи, считая, что они не имеют практического смысла. Но жизнь заставила повернуться лицом и к этим проблемам. Толчком для начала исследований послужила, как думается, как раз обратная задача теории потенциала. Представьте себе самолет, летающий над поверхностью земли и замеряющий сигналы от рудного месторождения, по которым необходимо определить форму этого месторождения. Оказалось, что эта практически важная задача является некорректной. Такие задачи получили название условно-корректных. Для их решения была создана сильная и красивая теория некорректных краевых задач [5–7].

О КВАЗИРЕШЕНИЯХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Занимаясь обратными краевыми задачами, которые в некотором смысле также являются некорректными, мы столкнулись с проблемой получения решения задачи из нужного класса. На рис. 3 показано множество W – множество корректности, содержащее все крыловые профили с замкнутым простым, то есть непересекающимся, контуром. Решив задачу построения профиля с большой подъемной силой, мы не попали в множество корректности W: это решение $z_0(\zeta)$ оказалось вне W. То есть получили либо самопересекающийся, либо разомкнутый контур, а возможно, и то и другое вместе. Как в этом случае поступать? Следуя общей теории некорректных задач, надо из множества корректности W выбрать такое решение $z_*(\zeta)$, соответствующее физически реализуемому профилю, свойства по которому минимально отличались бы от тех, реализовать которые мы хотели. Решение этой задачи удается построить основываясь на достижениях современной теории некорректных краевых задач. В результате получаем обобщенное решение нашей задачи, которое при достаточно общих условиях в отличие от истинного решения является корректным [8].

Исследования в этом направлении дали новый импульс в развитии обратных краевых задач аэрогидродинамики, где удается в явном виде построить интегральное представление решения и достаточно просто выполнить условия разрешимости задачи, то есть условия, которые требуют, чтобы контур крылового профиля был замкнутым и заданная скорость набегающего потока совпадала с определяемой в процессе решения. Общая теория обратных краевых задач для аналитических функций была разработана в 40–50-х годах, но наличие условий разрешимости и отсутствие ЭВМ сдерживали доведение результатов прикладных задач до числа и графика. Теория квазирешений обратных краевых задач, разработкой которой мы начали заниматься около 10 лет назад, и наличие быстродействующих ЭВМ позволили существенно продвинуться, особенно в решении обратных краевых задач аэрогидродинамики. Более того, удалось построить решение этих задач с учетом сжимаемости и вязкости потока, что очень важно с практической точки зрения.

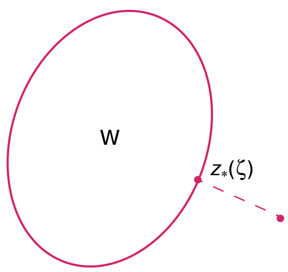

Рис. 3. К понятию квазирешений обратной краевой задачи аэрогидродинамики

Приведем один простой пример. На рис. 4 представлен результат проектирования крылового профиля. Исходный профиль, изображенный красной штриховой линией *1* с распределением скорости по контуру, показанным красной штриховой линией *3*, обладал характеристиками, не удовлетворяющими заказчика. Мы выбрали новое распределение скорости (синяя линия *4*), которое обеспечивало профилю требуемые свойства, и, используя разработанный аппарат квазирешений, получили новый профиль (сплошная синяя линия *2*) с улучшенными аэродинамическими параметрами.

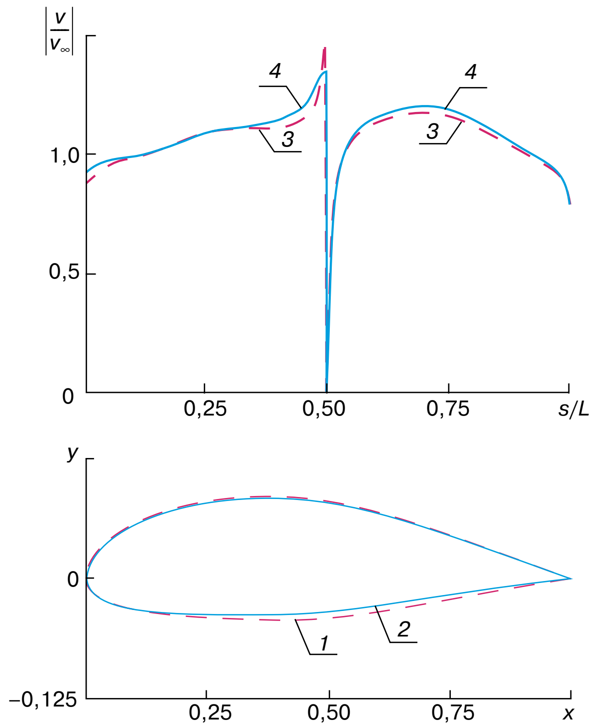

Рис. 4. Пример усовершенствования крылового профиля

К ПРОБЛЕМЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ ЭКРАНОПЛАНОВ

Последнее десятилетие большой интерес вызывает создание новых летательных аппаратов – экранопланов. Экраноплан – это аппарат, который движется очень низко над поверхностью земли, океана или реки. В зависимости от размеров аппарата расстояние до поверхности составляет 2–3 м. Оказывается, такие аппараты экономичны и выгодны.

Проектирование этих летательных аппаратов вызывает много споров, связанных с решением ряда сложнейших проблем. Если самолет, летящий на высоте 9000 м, нырнет на несколько метров или поднимется, ничего не случится. А если экраноплан, который движется на расстоянии 2 м от поверхности земли, как-то не так среагирует на действия пилота, то катастрофа неизбежна. Существует и много других серьезных вопросов. Поэтому не все ученые разделяют точку зрения о целесообразности создания и использования экранопланов.

В теории экранопланов можно выделить три главные задачи: аэродинамическую задачу, задачу управления аппаратом и задачу прочности и надежности. При этом многое зависит от формы профиля крыла экраноплана. Оказывается, если крыловой профиль экраноплана выбран правильно, поток, движущийся между профилем и экраном, будет создавать дополнительную подъемную силу. Но если профиль выбран неудачно, то возникают обратные явления, связанные с подсасыванием профиля к поверхности земли. Обычно эту задачу решали прямыми методами: задавали форму профиля крыла и начинали проводить обдувки в аэродинамических трубах или расчеты потока, обтекающего профиль. Если характеристики профиля оказывались неудовлетворительными, меняли его форму и опять подвергали обдувке или расчету и т.д. Однако к этой проблеме можно подойти и с точки зрения обратных задач. Как и в случае изолированного крылового профиля, удается, задавая желаемое распределение скорости или давления, найти форму крыла экраноплана. Конечно, тут опять могут возникнуть проблемы, связанные с некорректностью и необходимостью построения квазирешений, но главное – то, что таким образом процесс проектирования делается осмысленным и целенаправленным, а получение решения задачи (или квазирешения) – гарантированным.

ПРИМЕР АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА ЭКРАНОПЛАНА

Проиллюстрируем проектировочные возможности разработанного метода. Был рассмотрен профиль Clark-YH-5% (синяя кривая *1* на рис. 5, *б*) и проведен прямой расчет при отстоянии профиля от экрана на $h = 0{,}1$ хорды. Результаты расчетов показали, что при угле атаки $\alpha > 2°$ этот профиль обтекается с отрывом потока, начинающимся непосредственно с передней кромки профиля. Наличие отрыва объясняется тем, что с ростом угла атаки у распределения скорости по профилю появляется ярко выраженный пик скорости с большими отрицательными градиентами (на рис. 5, *а* сплошной кривой *1* показано распределение скорости $\upsilon(s)$ при $\alpha = 5°$, имеющее максимальное значение $\upsilon_{max}/\upsilon_\infty = 3{,}3$). Для того чтобы избежать отрыва, пик скорости был срезан на уровне $\upsilon_{max}/\upsilon_\infty = 1{,}6$. Кроме того, для обеспечения соответствия задаваемого распределения скорости модели безотрывного обтекания оно

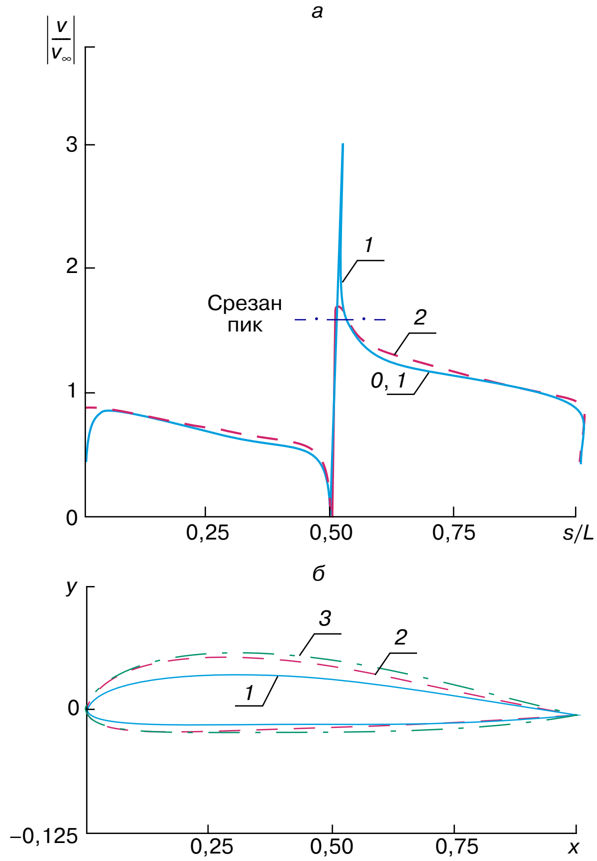

Рис. 5. Аэродинамическое совершенствование крылового профиля экраноплана

было подправлено в окрестности задней кромки так, чтобы $\upsilon(0) = -\upsilon(l) > 0$ (синяя кривая *0* на рис. 5, *а*). По полученному таким образом распределению скорости была решена обратная краевая задача аэродинамики для вязкости потока, равной $Re = 10^6$, где Re – число Рейнольдса. Построенный профиль и распределение скорости по нему изображены на рис. 5 штриховыми кривыми *2*. За счет удаления пика найденный профиль имеет более закругленную переднюю кромку и большую относительную толщину $c = 7{,}52\%$.

Для сравнения характеристик построенного профиля с характеристиками профиля Clark-YH-5%, а также профиля Clark-YH-8%, близкого к найденному по толщине (штрихпунктирная кривая *3* на рис. 5, *б*), были проведены прямые расчеты при $h = 0{,}1$ по модели идеальной несжимаемой жидкости. Для оценки величины коэффициента сопротивления (в диапазоне безотрывного обтекания) по получаемым для каждого угла атаки распределениям скорости по формуле Сквайра–Юнга находились значения коэффициента сопротивления C_x.

Сопоставление полученных результатов показало, что за счет увеличения толщины построенного профиля по сравнению с исходным произошло уменьшение экранного эффекта (максимального значения $C_y/C_{y\infty}$), однако модифицированный профиль обеспечивает при одинаковых углах атаки большие значения C_y, чем профили серии Clark-YH. Кроме того, произошло увеличение верхней границы диапазона безотрывного обтекания до $\alpha = 8°$, что даже лучше, чем у более толстого профиля Clark-YH-8%, для которого этот диапазон ограничен значением $\alpha = 5°$.

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Впервые обратную краевую задачу как чисто математическую для гармонической функции поставил в 1929 году Д. Рябушинский. Примерно в те же годы обратными задачами занялись специалисты-аэродинамики – это немецкие ученые В. Вейниг, Р. Бетц и особенно В. Манглер. Последний в 1938 году опубликовал фундаментальную работу в этой области. В Советском Союзе различными обратными краевыми задачами занимались в ЦАГИ. Существенный вклад в развитие теории этих задач внес Г.Г. Тумашев в 1942–1946 годах. Он предложил свой метод решения, который позволил расширить исследуемый класс задач. М.Т. Нужин заложил основы общей математической теории. Их монография [1], название которой я взял для своей статьи, содержит основы этой теории. Позднее к механикам подключилась большая группа казанских математиков.

О СПЕЦИАЛЬНОСТИ МЕХАНИКА

Красивое полусерьезное-полушутливое определение механики дал М.Т. Нужин: "Механика – это сплав математики со здравым смыслом". То есть мы должны находить решение задач, имеющих не только математический, но и физический смысл. Какие же проблемы стоят перед механиками, когда они приступают к решению практических задач? Кратко перечислю их. В первую очередь механик должен четко и ясно понимать физику изучаемого явления: или это фильтрация жидкости под плотиной, или это движение нефти, то есть сначала нужно представить себе физику процесса. Следующий этап, который также должен проделать механик, – это разработать или выбрать соответствующую математическую модель. Здесь уже можно перейти на язык математики. Какими уравнениями можно описать данное явление? Каковы граничные условия? Если математическая модель будет выбрана неудачно, то естественно и результат будет ошибочным. Далее требуется дать постановку задачи, причем по возможности корректную. Академик М.А. Лаврентьев говорил, что 50% успеха – это правильная постановка задачи. Допустим, что задача поставлена, дальше ее нужно решать. В настоящее время лишь для немногих задач удается построить решение в замкнутой аналитической форме. Большая часть требует приближенных или численных методов. Их разработка составляет еще один важный и трудоемкий этап в работе ученого-механика. Но даже если все эти методы разработаны, еще нет гарантии, что, запустив программу в вычислительную машину, вы получите нужное решение. Процесс может не сходиться. Надо исследовать вопросы сходимости этих приближенных методов. После того как сходимость исследована, решена задача, получен результат, процесс исследования еще не завершен. Надо сопоставить найденное решение с известными, чтобы убедится, что полученный результат достоверен. И только после этого можно говорить, что задача решена.

Благодарю Соросовского секретаря Д.А. Фокина за помощь в оформлении моей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.

2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения: Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 600 с.

3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

4. *Нужин М.Т., Ильинский Н.Б.* Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений: Обратные краевые задачи теории фильтрации. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1963. 140 с.

5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.

6. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 200 с.

7. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.

8. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.

* * *

Николай Борисович Ильинский, доктор физико-математических наук, профессор Казанского государственного университета, главный научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева, заслуженный деятель науки Татарстана и России, член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике. Область научных интересов: обратные краевые задачи механики жидкости и газа. Соавтор трех монографий и автор и соавтор более 120 научных статей, опубликованных в отечественных и зарубежных журналах. Лауреат первой премии Минвуза СССР за лучшую научную работу 1983 года.